Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Киселев, А. А. Расковалов, Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 2, 268–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:19:07

© 2012 г.

В. В. Киселев*, А. А. Расковалов*

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КВАЗИОДНОМЕРНОЙ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В рамках модели синус-Гордон методом “одевания” аналитически описаны солитоны и спиновые волны в геликоидальной структуре магнетиков без центра инверсии. Анализ нелинейной динамики спиновых волн на фоне спиральной структуры сведен к решению линейных интегральных уравнений на римановой поверхности, которая порождена сверхструктурой. Получены спектральные разложения интегралов движения, в которых выделены вклады солитонов и спиновых волн.

Ключевые слова: геликоидальная структура, уравнение синус-Гордон, задача Римана, кинки, бризеры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемое уравнение синус-Гордон

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi + \sin \Phi = 0 \quad (1.1)$$

является наиболее популярной и универсальной моделью при рассмотрении несоизмеримых магнитных и кристаллических структур [1]–[5]. В квазиодномерной (вдоль оси Oz) спиральной структуре ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа “легкая плоскость” (плоскость xOy) поле Φ описывает геликоидальное распределение намагниченности вдоль оси Oz : $\mathbf{M} = M_0(\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$, где $M_0 = \text{const}$ – номинальная намагниченность. В безразмерных переменных плотность функции Лагранжа таких систем имеет вид

$$L = \frac{(\partial_t \Phi)^2 - (\partial_z \Phi)^2}{2} - q \partial_z \Phi - (1 - \cos \Phi), \quad (1.2)$$

где параметр q зависит от температуры или внешнего поля. Наличие в (1.2) слагаемого, пропорционального $\partial_z \Phi$, не сказывается на уравнении движения (1.1), но обуславливает выбор основного состояния системы. При $q < 4/\pi$ реализуется однородное распределение намагниченности $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$ – соизмеримая фаза, а при

*Институт физики металлов УРО РАН, Екатеринбург, Россия.
E-mail: kiseliiev@imp.uran.ru

$q > 4/\pi$ имеет место несоизмеримая длиннопериодическая структура в виде одномерной решетки 2π -кинков поля Φ :

$$\Phi \equiv \varphi_0 = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), \quad (1.3)$$

где $\operatorname{am}(\chi, k)$ – эллиптическая амплитуда Якоби с модулем $k = 4E/\pi q$ и периодом $L_0 = 2Kk$, где $K = K(k)$, $E = E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Все решения уравнения синус-Гордон (1.1) с однородным асимптотическим поведением намагниченности на бесконечности исследованы в монографиях [6], [7] с помощью метода обратной задачи рассеяния или его модификаций. Наличие нелинейной периодической структуры (1.3) осложняет технику интегрирования модели. Хотя $(U-V)$ -пара уравнения (1.1) имеет рациональную зависимость от спектрального параметра, условие сопряжения аналитических функций, которое лежит в основе метода обратной задачи рассеяния, формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности. Риманова поверхность связана с периодической структурой (1.3) и оказывается топологически эквивалентной тору.

Заметим, что алгебро-геометрические методы конечнозонного интегрирования малоэффективны при анализе искомых решений модели синус-Гордон, так как приводят к плохо изученным трансцендентным соотношениям и многомерным тета-функциям [8]. Как правило, эти методы дают комплексные решения исходной модели. Выделение многообразия вещественных и ограниченных решений представляет сложную математическую проблему. Кроме того, конечнозонная техника не приспособлена к исследованию нелинейных волн, связанных с непрерывным спектром традиционной задачи рассеяния.

В работах [9]–[11] с использованием интегральных преобразований типа Гельфанда–Левитана–Марченко в рамках эллиптического уравнения синус-Гордон аналитически описаны двумерные дефекты в несоизмеримой (полосовой доменной) структуре магнетиков: солитонные вихри и несолитонные струнные конфигурации из отрезков доменных границ в полосовой структуре. Впервые одевание с помощью интегральных операторов Шабата было осуществлено в работе [12] при анализе нелинейных возбуждений на пьедестале бегущей кноидальной волны в конденсированных средах, описываемых универсальной моделью Кортевега–де Фриза. В нашей работе для изучения нелинейной динамики квазиодномерной спиральной структуры привлекается метод одевания частных решений гиперболического уравнения синус-Гордон (1.1) с помощью задачи Римана на торе [13]–[15]. При таком подходе процедура построения решений оказывается локальной (в подходе Гельфанда–Левитана–Марченко локальность теряется). Это обстоятельство чрезвычайно облегчает аналитическое описание возбуждений в спиральной структуре. Выделение вещественных решений не вызывает затруднений, окончательные формулы записываются в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций.

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 дана формулировка задачи Римана, необходимая для анализа солитонов и спиновых волн в спиральной структуре. В разделе 3 изложена схема построения солитонных решений модели при наличии спиральной структуры. Существуют и другие методы построения

солитонных решений (преобразования Беклунда, метод Хироты [4], [5], [11]). Однако предлагаемая в настоящей статье процедура глубже вскрывает спектральную природу рассматриваемой проблемы. Это позволяет получить новые результаты и в конечном счете сформулировать схему описания солитонов и спиновых волн при произвольных начальных распределениях намагниченности в спиральной структуре (см. раздел 4).

Построение солитонных матриц задачи Римана связано с преодолением следующих трудностей. Образование солитонов неизбежно сопровождается трансляциями геликоидальной структуры. В разделе 3 найдены формулы, которые связывают сдвиги в краевых условиях фоновой структуры с нулями задачи Римана, определяющими строение и скорость солитонов. Из-за наличия периодического фона функции задачи Римана оказываются “блоховскими” – при изменении спектрального параметра на период они умножаются на дополнительные множители. Отмеченная особенность отсутствует в задаче Римана, которая использовалась при интегрировании эллиптического уравнения синус-Гордон [9]–[11].

Полный набор нелинейных нормальных мод на фоне сверхструктуры содержит дискретную совокупность солитонов и спиновые волны с непрерывным спектром. В разделе 4 описание нелинейной динамики спиновых волн сведено к решению линейных интегральных уравнений на торе. В разделе 5 найдены спектральные разложения интегралов движения для нелинейных возбуждений в геликоидальной структуре.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Приведем основные формулы, необходимые для дальнейшего анализа. Будем рассматривать два типа граничных условий. Для первого из них

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) \rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) &\equiv \varphi_0(\chi), & z \rightarrow +\infty, \\ \Phi(z, t) \rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) &= 2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta) = \varphi_0(\chi + 2K\sigma + \Delta), & z \rightarrow -\infty,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\sigma = \pm 1$. В случае $\sigma = 1$ спиральная структура испытывает сжатие на период и дополнительное смещение вдоль оси Oz на расстояние $k\Delta$, меньшее периода решетки кинков. В результате в одной из ячеек решетки кинков обязательно появляется солитон – лишний 2π -кинк поля Φ с тем же топологическим зарядом, что и у остальных кинков структуры. Если $\sigma = -1$, то происходит локальное расширение решетки кинков на период и сбой при образовании геликоидальной структуры такой, что в одной из ячеек решетки кинков появляется лишний 2π -кинк с топологическим зарядом, противоположным зарядам остальных кинков структуры. При тех же краевых условиях (2.1) в спиральной структуре могут дополнительно существовать другие солитоны: четное число кинков с попарно противоположными топологическими зарядами и произвольное число бризеров. Кроме того, вдоль структуры могут распространяться спин-волновые пакеты, образование которых происходит без трансляций решетки кинков и связано с колебаниями намагниченности около равновесных положений геликоидальной структуры.

Второй тип граничных условий

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi), & z &\rightarrow +\infty, \\ \Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi + \Delta), & z &\rightarrow -\infty,\end{aligned}\quad (2.2)$$

предполагает наличие спиновых волн, четного числа кинков с попарно противоположными зарядами и произвольного числа бризеров. Параметр Δ определяет локальный сдвиг сверхструктуры на расстояние, меньшее периода, из-за образования в ней солитонов (кинков и бризеров).

Уравнение синус-Гордон (1.1) эквивалентно условию совместности вспомогательной системы линейных уравнений [7]

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial_z \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right) \Psi \equiv V \Psi, \\ \partial_z \Psi &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial_t \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_2 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_1 \sin \frac{\Phi}{2} \right) \Psi \equiv U \Psi,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $w_1^2 - w_2^2 = 1$, σ_i – матрицы Паули, $i = 1, 2, 3$. В параметризации $w_1 = \operatorname{sn}(u, k)$, $w_2 = i \operatorname{sn}(u, k)$ частное решение системы (2.3), которое отвечает фоновой структуре $\varphi_0(\chi + \delta)$, записывается как

$$\Psi_\delta(u, \chi, t) = M(u, \chi + \delta) \exp \left(A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \delta}{K} u \sigma_3 \right), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}A(u, \chi, t) &= ip(u) \chi + \frac{it}{2k} \operatorname{dn}(u, k), \\ p(u) &= -i \left(\frac{\eta_1 u}{K} - \frac{\zeta(u - iK') + \zeta(u + iK')}{2} \right) = \frac{i}{2} Z(u), \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi + u) & i\sigma(\chi + 2iK' - u)e^{-\eta_3(\chi + iK' - u)} \\ -i\sigma(\chi + 2iK' + u)e^{-\eta_3(\chi + iK' + u)} & \sigma(\chi - u) \end{pmatrix} \times \\ &\times \frac{m(\chi)}{\sigma(u)} \exp \left(-\frac{\eta_1 u}{k} \chi \sigma_3 \right), \quad \det M = \frac{\operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{dn} u}, \\ m(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sigma(iK')}{\sigma(\chi + iK')} \right|.\end{aligned}$$

Здесь параметр δ отвечает за сдвиг решения (2.4) вдоль оси Oz , $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $(2K, 4iK')$, где $K = K(k)$ и $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы первого рода от модуля k и сопряженного модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $Z(u)$ – дзета-функция Якоби [16]–[18]. Ветвь квадратного корня выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$\sqrt{\sigma(\chi \pm 2K + iK')\sigma(\chi \pm 2K - iK')} = -|\sigma(\chi + iK')|e^{\pm 2\eta_1(\chi \pm K)},$$

где $|\sigma(\chi + iK')| = \sqrt{\sigma(\chi + iK')\sigma(\chi - iK')}$. Для функции $\Psi_\delta(u, \chi)$ величина $p(u)$ играет роль блоховского квазиимпульса:

$$\Psi_\delta(\chi \pm 4K, t, u) = \Psi_\delta(\chi, t, u)e^{\pm 4Kip(u)\sigma_3}.$$

В процедуре интегрирования модели синус-Гордон используются аналитические свойства фундаментальных решений вспомогательной системы (2.3), которые задаются асимптотическими условиями при $z \rightarrow \pm\infty$. В данном случае асимптотические условия должны учитывать не только наличие сверхструктуры, но и ее трансляции при образовании солитонов. Хотя исходные нелинейные уравнения (1.1) инвариантны относительно преобразования $\Phi \rightarrow \Phi \pm 2\pi$, вспомогательная линейная система (2.3) таким свойством не обладает, и состояния Φ и $\Phi \pm 2\pi$ в ней различаются.

Базисные решения Йоста системы (2.3), отвечающие асимптотическим условиям (2.1) модели синус-Гордон, определим так:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \sigma_3 \Psi_\Delta(z, t, u) \sigma_3, & z \rightarrow -\infty, \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u), & z \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (2.5)$$

При краевых условиях (2.2) определения решений Йоста изменяются:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta(z, t, u), & z \rightarrow -\infty, \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u), & z \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Множеству

$$\Gamma = \{u: \operatorname{Im} p(u) = 0\} = \{u: \operatorname{Re} u = 0, K, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}$$

(множество Γ определено по модулю $(2K, 4iK')$) соответствует непрерывный спектр системы (2.3). На контуре Γ фундаментальные решения $\Psi_{1,2}$ определены одновременно, и потому связаны между собой:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Матрица перехода

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & -b^*(-u^*) \\ b(u) & a^*(-u^*) \end{pmatrix}$$

зависит только от спектрального параметра u , и ее элементы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}a(u \pm 2K) &= a(u)e^{\pm 2\eta_1 \Delta}, & a^*((u \pm 2iK')^*) &= -\theta a(u)e^{\pm \eta_3 \Delta}, \\ b(u \pm 2K) &= -b(u)e^{\pm 2\eta_1 \Delta}, & b^*((u \pm 2iK')^*) &= -\theta b(u)e^{\pm \eta_3 \Delta}, \\ a(u)a^*(-u^*) + b(u)b^*(-u^*) &= 1,\end{aligned}\quad (2.8)$$

где $\theta = 1$ и $\theta = -1$ при краевых условиях (2.1) и (2.2) соответственно.

Функции Йоста $\Psi_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) \left(1 + \int_{-\infty}^z dz' [\Psi_1^{(0)}(z')]^{-1} (U(z') - U_1^{(0)}(z')) \Psi_1(z') \right), \\ \Psi_2(z) &= \Psi_2^{(0)}(z) \left(1 - \int_z^{+\infty} dz' [\Psi_2^{(0)}(z')]^{-1} (U(z') - U_2^{(0)}(z')) \Psi_2(z') \right).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Здесь $U_{1,2}^{(0)}$ – значения матрицы U при $\Phi = \varphi_{1,2}^{(0)}$. Последовательные итерации уравнений (2.9) приводят к представлению их решений $\Psi_{1,2}$ в виде рядов по степеням $\Psi_{1,2}^{(0)}$. Ряды сходятся, если решения модели синус-Гордон достаточно быстро (быстрее любой степени z) стремятся к асимптотическим значениям, заданным условиями (2.1), (2.2). Аналитические свойства столбцов матриц $\Psi_{1,2}(u)$ определяются расстановкой пределов интегрирования по z в рядах для $\Psi_{1,2}(u)$, а также знаком величины $\text{Im } p(u)$. Матричные функции

$$\Psi_{-}(u) = (\Psi_1^{(1)}(u), \Psi_2^{(2)}(u)), \quad \Psi_{+}(u) = (\Psi_2^{(1)}(u), \Psi_1^{(2)}(u)) \quad (2.10)$$

оказываются аналитическими соответственно в областях

$$D_{-} = \{u: -K < \text{Re } u < 0, |\text{Im } u| \leq 2K'\}, \\ D_{+} = \{u: 0 < \text{Re } u < K, |\text{Im } u| \leq 2K'\}$$

(области D_{-} и D_{+} определены по модулю $(2K, 4iK')$). В (2.10) введено обозначение $\Psi^{(i)}$ для i -го столбца матрицы Ψ , $i = 1, 2$.

Из уравнения (2.7) следуют соотношения

$$a(u) = \frac{\det \Psi_{-}(u)}{\det M}, \quad a^{*}(-u^{*}) = \frac{\det \Psi_{+}(u)}{\det M}. \quad (2.11)$$

Согласно этим равенствам функции $a(u)$ и $a^{*}(-u^{*})$ аналитически продолжаются с контура Γ в области D_{-} и D_{+} соответственно (за исключением, быть может, точек, где $\det M = \text{dn } u / (1 - \text{dn } u) = 0$). Нули функций $a(u)$ и $a^{*}(-u^{*})$ в областях D_{-} и D_{+} определяют дискретный спектр системы (2.3). Далее для определенности мы считаем, что если нули существуют, то они простые. В силу редукций (2.8) нули функции $a(u)$ разбиваются на две группы:

$$u = v_p + i\varepsilon_p K' \equiv \nu_p, \quad -K < v_p < 0, \quad \varepsilon_p = \pm 1, \quad p = 1, 2, \dots, M, \\ u = \mu_s, \quad u = \mu_s^{*} - 2iK', \quad -K < \text{Re } \mu_s < 0, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (2.12)$$

Каждый особый ноль ν_p обеспечивает появление лишнего кинка в структуре. Каждая группа нулей $\mu_s, \mu_s^{*} - 2iK'$ параметризует пульсирующий солитон – бризер на фоне спиральной структуры.

Функция $a(u)$ допускает представление

$$a(u) = \lim_{z \rightarrow +\infty} [(\Psi_2^{(0)}(u))^{-1} \Psi_1(u)]_{11}. \quad (2.13)$$

Используя разложения функций $\Psi_2^{(0)}(u)$ и $\Psi_1(u)$ вблизи точки $u = iK'$ (см. раздел 5), находим нормировочное условие:

$$a(u)|_{u=iK'} = s e^{\eta_3 \Delta/2}, \quad (2.14)$$

где $s = -i\sigma$ и $s = 1$ при краевых условиях (2.1) и (2.2) соответственно.

Проблема интегрирования уравнений (2.3), а значит, и модели синус-Гордон (1.1) сводится к решению задачи Римана на торе, которая формулируется следующим образом. Необходимо найти аналитические в областях D_+ и D_- функции $\Psi_+(u)$ и $\Psi_-(u)$ (2.10), удовлетворяющие условию сопряжения на контуре Γ

$$\Psi_-(u) = \frac{\Psi_+(u)}{a^*(-u^*)} \begin{pmatrix} 1 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \Gamma, \quad (2.15)$$

редукциям

$$\begin{aligned} \Psi_+(u \pm 2K) &= \sigma_3 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mp 2\eta_1 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-(u \pm 2K) &= \sigma_3 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm 2\eta_1 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Psi_+^*((u \pm 2iK')^*) &= q(u) \sigma_1 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mp \eta_3 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-^*((u \pm 2iK')^*) &= -\theta q(u) \sigma_1 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm \eta_3 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$i \frac{\sigma(u)}{\sigma(u + 2iK')} e^{\eta_3(u + iK')} = k \frac{\operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{dn} u} \equiv q(u),$$

и ограничению

$$\Psi_+(u) = -\sigma_2 \Psi_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \Gamma. \quad (2.17)$$

Условие (2.15) является иной формой записи связи (2.7) решений Йоста на контуре Γ , свойства симметрии (2.16) и (2.17) функций $\Psi_{\pm}(u)$ следуют из аналогичных свойств функций Йоста.

После того как решение задачи Римана найдено, по нему восстанавливается не только решение линейной системы (2.3), но и точное решение Φ исходной существенно нелинейной модели (1.1). Для этого достаточно использовать разложение функции $\Psi_-(u)$ вблизи особой точки $u = iK'$ системы (2.3):

$$\begin{aligned} \Psi_-(u)|_{u=iK'+\varepsilon} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{4}(\Phi + \pi)\sigma_3\right) (1 + i\sigma_1)(1 + O(\varepsilon)) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{z-t}{2k\varepsilon}\sigma_3 + O(\varepsilon)\right) \begin{pmatrix} se^{\eta_3\Delta/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| \ll 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

3. СОЛИТОНЫ

Солитонам в спиральной структуре соответствуют решения задачи Римана (2.15) с нулями коэффициентов $a(u)$ и $a^*(-u^*)$ в областях D_- и D_+ при $b = b^* \equiv 0$. Для солитонных состояний условие унитарности матрицы перехода принимает вид $a(u)a^*(-u^*) = 1$. Отсюда следует, что функция $a(u)$ мероморфна внутри фундаментального прямоугольника со сторонами $2K, 4iK'$. При этом если в области D_- эта функция имеет ноль в точке $u = u_p$, то в области D_+ у нее обязательно будет полюс при $u = -u_p^*$. Для солитонных возбуждений квазипериодическая функция $a(u)$

полностью определяется [18] своими нулями (2.12), полюсами и условием нормировки (2.14):

$$a_{\text{sol}}(u) = c \prod_{p=1}^M \varepsilon_p \frac{\sigma(u - \nu_p)}{\sigma(u + \nu_p^*)} e^{-\eta_3 \varepsilon_p \nu_p} \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s) \sigma(u - \mu_s^* + 2iK')}{\sigma(u + \mu_s^*) \sigma(u + \mu_s + 2iK')} e^{\eta_3(\mu_s + \mu_s^*)}, \quad (3.1)$$

где периоды функций Вейерштрасса равны $(2K, 4iK')$. При краевых условиях (2.1) число кинков M нечетное, $c = i\sigma$, а в случае граничных условий (2.2) M – четное число, $c = 1$. На число бризеров N нет ограничений. Представление (3.1) приводит к верным трансформационным свойствам функции $a(u)$ только при условии, что положения ее нулей связаны со сдвигом Δ сверхструктуры:

$$\sum_{p=1}^M \nu_p + \sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = -\frac{\Delta}{2} \pmod{2K}. \quad (3.2)$$

Напомним, что нули функции $a(u)$ определены по модулю $(2K, 4iK')$, а сдвиг Δ – по модулю $4K$. Далее для определенности мы считаем, что нули лежат в области D_- . Тогда равенство (3.2) будет справедливо по модулю $2K$.

Учитывая формулы (2.11), мы можем переписать ограничение (2.17) в виде

$$\Psi_+^{-1}(u) = -\frac{\Psi_-^\dagger(-u^*)}{a^*(-u^*) \det M}, \quad u \in \Gamma, \quad (3.3)$$

где верхний индекс $\dagger$ означает эрмитово сопряжение. Отсюда следует, что для солитонных состояний задача нахождения решения Ψ_- сводится к построению мероморфной квазипериодической функции с периодами $(2K, 4iK')$ и редукциями (2.16), которая удовлетворяет следующему условию на контуре Γ :

$$\Psi_-^\dagger(-u^*) \Psi_-(u) = \Psi_-(u) \Psi_-^\dagger(-u^*) = \left(\frac{dn u}{dn u - 1} \right) I, \quad u \in \Gamma, \quad (3.4)$$

где I – единичная матрица. Если $\Psi_-(u)$ имеет ноль при $u = u_p$ в области D_- , то в области D_+ у нее будет полюс в точке $u = -u_p^*$. Ввиду специфики операторов U, V функция $\Psi_-(u)$ не может быть нормирована на I ни при каком значении u , поэтому, чтобы доопределить задачу Римана, используются асимптотические значения $\Psi_-(u)$ при $z \rightarrow \pm\infty$.

В отличие от функций задачи Римана, применявшихся при интегрировании эллиптического уравнения синус-Гордон с периодическим фоном [9]–[11], функции $\Psi_-(z, t, u)$, используемые для описания солитонов в модели (1.1), не являются двоякопериодическими по параметру u . Это осложняет задачу. Процедура построения солитонных функций $\Psi_-(z, t, u)$ сводится к алгебраическим вычислениям и во многом напоминает изложенную в работе [19]. Особенности поясним на примерах.

При краевых условиях (2.1) функция $\Psi_-(z, t, u)$ доопределяется своими асимптотиками, которые получаются из (2.5), (2.7):

$$\begin{aligned} \Psi_- &\rightarrow \Psi_0(z, t, u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow +\infty, \\ \Psi_- &\rightarrow \sigma_3 \Psi_\Delta(z, t, u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(u) \end{pmatrix}, & z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулы (3.1), (3.2), (3.5) и редукции (2.16) позволяют выявить алгебраическую структуру “однокинковой” функции Ψ_- :

$$\Psi_-(u) = r \begin{pmatrix} (\Psi_0)_{11} a(u|\nu_1)\alpha + (\Psi_\Delta)_{11}\beta & (\Psi_0)_{12}\alpha - (\Psi_\Delta)_{12} a(u|\nu_1)\beta \\ (\Psi_0)_{21} a(u|\nu_1)\alpha^* - (\Psi_\Delta)_{21}\beta^* & (\Psi_0)_{22}\alpha^* + (\Psi_\Delta)_{22} a(u|\nu_1)\beta^* \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$a(u|\nu_1) = i\sigma\varepsilon_1 \frac{\sigma(u - \nu_1)}{\sigma(u + \nu_1^*)} e^{\varepsilon_1 \eta_3 \Delta/2}, \quad \nu_1 = iK'\varepsilon_1 - \frac{\Delta}{2}, \quad 0 < \Delta < 2K, \quad (3.7)$$

α , β и r – комплексные и вещественная функции от переменных z, t .

После подстановки представления (3.6) в (3.4) левая часть равенства (3.4) будет содержать полюсы в точках $u = \nu_1, -\nu_1^* \pmod{(2K, 4iK')}$, в то время как правая часть таких полюсов не содержит. Требование обращения в ноль вычетов в лишние полюсах приводит к ограничениям

$$\alpha = pe^{i\gamma}, \quad \beta = he^{i\gamma}, \quad (3.8)$$

где p, h и γ – пока неизвестные вещественные функции от переменных z, t . Прямой проверкой можно убедиться, что левая и правая части формулы (3.4) имеют одинаковые периоды, нули и полюсы: нули в точках $u = \pm(K + iK')$ и двойной полюс при $u = 0 \pmod{(2K, 4iK')}$. Потому согласно теореме Луивилля [18] левая и правая части соотношения (3.4) могут отличаться только коэффициентом, не зависящим от спектрального параметра u . Подставим в равенство (3.4) значение $u = iK'$, это дает уравнение для расчета коэффициента r^2 , которое после преобразований с учетом тождества

$$-\frac{i\sigma(\chi - iK')}{\sigma(\chi + iK')} e^{\eta_3 \chi} = -\operatorname{sn} \chi + i \operatorname{cn} \chi \quad (3.9)$$

принимает вид

$$r^2 \left(p^2 + h^2 + 2ph \cos \frac{\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)}}{4} \right) = 1. \quad (3.10)$$

Матричная функция $\Psi_-(u)$, заданная формулами (3.6), (3.8), (3.10), дает решение задачи Римана на торе с особым нулем ν_1 и редукциями (2.16). Отметим, что в данном случае солитонная функция $\Psi_-(u)$ не выражается через проекционные матрицы [6]. В конкретизации ее структуры важную роль сыграли редукции.

Дополнительное дифференциальное ограничение на выбор матриц $\Psi_-(z, t, u)$ состоит в том, что в области D_- должны выполняться соотношения (см. (2.3))

$$\partial_t \Psi_- \Psi_-^{-1} = V, \quad \partial_z \Psi_- \Psi_-^{-1} = U. \quad (3.11)$$

Подстановка (3.6) в эти соотношения вновь дает лишние полюсы в левых частях равенства (3.11). Требование отсутствия лишних полюсов приводит к дифференциальным уравнениям для расчета величины p/h . Их решения имеют вид

$$\frac{p}{h} = -c_0 \frac{(\Psi_\Delta(u))_{21}}{(\Psi_0(u))_{22}} \bigg|_{u=\nu_1} = c_0 \left| \frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi + \Delta + iK')} \right| e^{\eta_1 \Delta \chi / K + A(\nu_1, \chi, t) + A^*(\nu_1, \chi, t)}, \quad (3.12)$$

где c_0 – вещественная постоянная интегрирования.

Возникающие при вычислении $\partial_t \Psi_- \Psi_-^{-1}$, $\partial_z \Psi_- \Psi_-^{-1}$ нули и полюсы, связанные с функцией $\operatorname{dn} u / (\operatorname{dn} u - 1)$ (см. (3.4)), полностью устраняются. Отметим также, что уравнений для расчета функции $\gamma(z, t)$ (3.8) не возникает. Величина γ фиксируется условиями (3.5) и оказывается равной нулю. При этом постоянную c_0 в формуле (3.12) и корень r уравнения (3.10) следует выбрать положительными.

Сформулированные условия полностью определяют решение $\Psi_-(z, t, u)$ системы (2.3). Из (2.18) восстанавливаем решение модели синус-Гордон:

$$\Phi(z, t) = 4 \arg \left(\sqrt{\frac{p}{h}} e^{i\varphi_2^{(0)}/4} + \sqrt{\frac{h}{p}} e^{i\varphi_1^{(0)}/4} \right). \quad (3.13)$$

Оно описывает “лишний” кинк шириной $d \sim [2 \operatorname{Re} \partial_z A(\nu_1, \chi, t)]^{-1}$, движущийся в спиральной структуре со скоростью

$$V = - \frac{\operatorname{Re} \partial_t A(\nu_1, \chi, t)}{\operatorname{Re} \partial_z A(\nu_1, \chi, t)}.$$

Форма записи (3.13) однокинквого состояния проще найденной в работе [5] с помощью преобразований Беклунда в терминах эллиптических интегралов третьего рода.

При граничных условиях (2.2) задача Римана доопределяется условиями, которые предписаны связью (2.7):

$$\begin{aligned} \Psi_- &\rightarrow \Psi_0(z, t, u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow +\infty, \\ \Psi_- &\rightarrow \Psi_\Delta(z, t, u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(u) \end{pmatrix}, & z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Бризерные функции $\Psi_-(z, t, u)$ приобретают дополнительные множители при сдвиге на периоды по параметру u , поэтому схема их построения путем разложения на “простые дроби” по дзета-функциям Вейерштрасса [13]–[15] оказывается неэффективной. Вместо дзета-функций удобнее использовать функции

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \frac{\sigma(u - \mu_1)}{\sigma(u + \mu_1^*)} \exp \left[-\frac{\eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}{2} \right], \\ g_2(u) &= \frac{\sigma(u - \mu_1^* - 2iK')}{\sigma(u + \mu_1 - 2iK')} \exp \left[-\frac{\eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}{2} \right], \\ g_3(u) &= i \frac{\sigma(u + iK')\sigma(u - iK')}{\sigma(u + \mu_1^*)\sigma(u + \mu_1 - 2iK')} \exp \left[-\eta_3 \left(u + \frac{\mu_1 + \mu_1^*}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

которые с точностью до блоховского множителя задают представление группы редукций рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} g_{1,2}(u \pm 2K) &= g_{1,2}(u) e^{\mp 2\eta_1(\mu_1 + \mu_1^*)}, & g_3(u \pm 2K) &= -g_3(u) e^{\mp 2\eta_1(\mu_1 + \mu_1^*)}, \\ g_{1,2}^*((u \pm 2iK')^*) &= g_{2,1}(u) e^{\mp \eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}, & g_3^*((u \pm 2iK')^*) &= g_3(u) e^{\mp \eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}. \end{aligned}$$

Кроме того, они удовлетворяют соотношениям

$$g_{1,2}^*(-u^*) = \frac{1}{g_{1,2}(u)}, \quad g_3^*(-u^*) = -\frac{g_3(u)}{g_1(u)g_2(u)},$$

которые обеспечивают переход (3.3) от решения $\Psi_-(u)$ к $\Psi_+(u)$.

Согласно формулам (3.1), (3.2) для одного бризера в спиральной структуре элемент матрицы перехода $a(u) = g_1(u)g_2(u)$ параметризуется нулем $\mu_1 = i\theta_1 - \Delta/4$ задачи Римана, где $0 < \Delta < 4K$, $-2K' < \theta_1 < 2K'$. Будем искать бризерное решение задачи Римана в виде

$$\Psi_-(z, t, u) = \Psi(\chi, t, u)\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u). \quad (3.15)$$

Схема построения функции $\Psi(u)$ совпадает с приведенной в работе [19]: редукции и требование отсутствия лишних полюсов в соотношении (3.4) определяют ее с точностью до фазового множителя, который оказывается не зависящим от z, t и фиксируется условием (3.14). Приведем окончательный результат:

$$\Psi(\chi, t, u|\mu_1, \mathbf{m}) = i \left| \frac{r}{\kappa} \right| \begin{pmatrix} |m_2|^2 g_2(u) \kappa^* - |m_1|^2 g_1(u) \kappa & i|\kappa|^2 g_3(u) m_1 m_2^* \\ i|\kappa|^2 g_3(u) m_1^* m_2 & |m_1|^2 \kappa^* g_2(u) - |m_2|^2 g_1(u) \kappa \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где $g_i(u) \equiv g_i(u|\mu_1)$, $i = 1, 2, 3$, и

$$\kappa = \frac{\sigma(\mu_1 + \mu_1^*)\sigma(\mu_1 - \mu_1^* - 2iK')}{\sigma(\mu_1 + iK')\sigma(\mu_1 - iK')} e^{n_3 \mu_1},$$

$$|r|^{-2} = |m_1|^4 + |m_2|^4 + 2|m_1 m_2|^2 \cos \theta, \quad \theta = \text{am}(\mu_1, k) + \text{am}(\mu_1^*, k).$$

Вычеты в полюсах функции Ψ представляют собой проекционные матрицы. Поэтому, как и в монографии [6], требование отсутствия лишних полюсов в формулах (3.11) для операторов U и V определяет зависимость от переменных χ, t вектора $\mathbf{m} = (m_1, m_2) = \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1)\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ – произвольный постоянный комплексный вектор. Комплексный параметр μ_1 и вектор $\mathbf{m}$ конкретизируют вид функции Ψ , поэтому в обозначениях они указаны после вертикальной черты.

Из (2.18), (3.15) находим решение нелинейной модели синус-Гордон (1.1), соответствующее бризеру на фоне спиральной структуры:

$$\Phi(z, t) = \varphi_0 \left(\chi + \frac{\Delta}{2} \right) + 4 \text{Arctg} \left(\frac{|m_1|^2 - |m_2|^2}{|m_1|^2 + |m_2|^2} \text{tg} \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.17)$$

где $\Delta = -4 \text{Re} \mu_1$, $\text{Arctg}(x)$ – полная квазипериодическая функция.

Поскольку матрица $M(\mu_1, \chi)$, входящая в $\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1)$, является квазипериодической, протяженность и динамические свойства бризера (3.17) определяются экспоненциальными множителями $e^{\pm A(\mu_1, \chi, t)}$, $e^{\pm A^*(\mu_1, \chi, t)}$. Представим линейную по χ, t функцию A (2.4) в виде $2A(\mu_1, \chi, t) = q_0(z - Vt) + i(k_0 z + \omega_0 t)$, где

$$q_0 = -\frac{2}{k} \text{Im} p(\mu_1) > 0, \quad V = \frac{1}{k q_0} \text{Im}(\text{dn} \mu_1),$$

$$k_0 = \frac{2}{k} \text{Re} p(\mu_1), \quad \omega_0 = \frac{1}{k} \text{Re}(\text{dn} \mu_1). \quad (3.18)$$

Тогда параметр q_0 характеризует размер бризера, $d \sim 1/q_0$, V – скорость движения бризера как целого, k_0 и ω_0 – волновой вектор и частота пульсаций намагниченности в области локализации бризера.

Мультибризеры на фоне сверхструктуры выражаются через матричные функции $\Psi(\chi, t, u|\mu_s, \mathbf{m}^{(s)})$, где $\mathbf{m}^{(s)} = \Psi_{\rho_s}(\chi, t, \mu_s)\mathbf{c}^{(s)}$, $\mathbf{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)})$ – произвольный постоянный комплексный вектор, $\mu_s = -\rho_s/2 + i\theta_s$, $0 < \rho_s < 2K$, $|\theta_s| < 2K'$,

$$\Psi_{\rho_s}(\chi, t, u) = M(u, \chi + \rho_s) \exp\left(A(u, \chi, t)\sigma_3 + \frac{\eta_1 \rho_s u}{K} \sigma_3\right).$$

Построим двухбризерное возбуждение. Для этого заметим, что решение системы (2.3) останется решением после умножения его справа на не зависящую от χ, t матрицу и сдвига аргумента $\chi \rightarrow \chi + \rho_2$. Путем перечисленных преобразований из однобризерного решения (3.15) получаем новое однобризерное решение системы (2.3):

$$\Psi(\chi, t, u|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u),$$

где $\mathbf{n}^{(1)} = \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1)\mathbf{d}^{(1)}$ и $\mathbf{d}^{(1)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор. Будем трактовать это решение как “затравочное” и “оденем” его в соответствии с изложенной схемой. Результатом будет двухбризерное решение

$$\tilde{\Psi}_-(\chi, t, u|\mu_1, \mu_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}) = \Psi(\chi, t, u|\mu_2, \mathbf{n}^{(2)})\Psi(\chi, t, u|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u). \quad (3.19)$$

Здесь $\mathbf{n}^{(2)} \equiv \Psi(\chi, t, \mu_2|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_2)\mathbf{d}^{(2)}$ и $\mathbf{d}^{(2)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор, $\mu_s = -\rho_s/2 + i\theta_s$, $s = 1, 2$, $\rho_2 + \rho_1 = \Delta/2$.

Прямой проверкой можно убедиться, что решение (3.19) удовлетворяет дифференциальным ограничениям и трансформационным свойствам решения системы (2.3) с граничными условиями (2.2). Таким образом, мы наметили рекуррентную схему размножения бризерных решений системы (2.3), а значит, и модели синус-Гордон. На $(N - 1)$ -м шаге мы получаем описание N бризеров в спиральной структуре.

К простейшим солитонным решениям модели синус-Гордон с граничными условиями (2.2) относится не только бризер, но и два “лишних” кинка с противоположными зарядами на фоне спиральной структуры. Факторизация (3.19) не описывает такие солитоны. Двухкинковое решение задачи Римана с нулями в точках $\nu_s = -\Delta_s/2 + i\varepsilon_s K'$, $s = 1, 2$, где $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$, получается из (3.6), (3.7) после формальных замен

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi_-^{(2)}, \quad \Psi_{\Delta} \rightarrow \Psi_-^{(1)}, \quad a(u|\nu_1) = i\sigma\varepsilon_1 \frac{\sigma(u - \nu_1)}{\sigma(u + \nu_1^*)} e^{\varepsilon_1 \eta_3 \Delta_1/2}. \quad (3.20)$$

Здесь $\Psi_-^{(s)}$, $s = 1, 2$, – решения задачи Римана с нулем в точке $u = \nu_2$, которые соответствуют двум однокинковым состояниям $\Phi^{(s)}$ модели синус-Гордон с асимптотическими условиями

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)} &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv \varphi_0(\chi + \delta_s, k), & z &\rightarrow +\infty, \\ \Phi^{(s)} &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv -2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta_2 + \delta_s, k), & z &\rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где $\sigma = \pm 1$, $\delta_1 = \Delta_1$, $\delta_2 = 0$, $0 < \Delta_{1,2} < K$. Выражения для $\Psi_-^{(s)}$ получаются из (3.6), (3.20), а также из формул (3.10), (3.12) после очевидных замен, связанных с изменением асимптотических условий и нуля задачи Римана. Константа c_0 в соотношениях (3.12) заменяется на постоянные c_s , которые следует подчинить

ограничению $c_2/c_1 = |a(\nu_2|\nu_1)|^2$. Тогда в условии (3.4) лишние полюсы в точках $u = \nu_2, -\nu_2^* \pmod{(2K, 4iK')}$ не появятся, и функции α, β станут положительными, причем

$$\frac{\alpha}{\beta} = c \left| \frac{(\Psi_-^{(1)}(\nu_1))_{21}}{(\Psi_-^{(2)}(\nu_1))_{22}} \right|, \quad r = \left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\sigma\alpha\beta \sin \frac{\Phi^{(2)} - \Phi^{(1)}}{4} \right)^{-1/2},$$

где $c > 0$ – еще одна постоянная интегрирования. Решение модели синус-Гордон с асимптотическими условиями (2.2), описывающее кинк и антикинк в сверхструктуре, имеет вид

$$\Phi = 4 \arg (\alpha e^{i\Phi^{(2)}/4} + i\sigma\beta e^{i\Phi^{(1)}/4}).$$

Интересно, что для солитонов в спиральной структуре в отличие от солитонов на однородном фоне характерны не только приращения координат и фаз солитонов после каждого их парного столкновения, но и трансляции фоновой структуры, сопровождающие движение каждого из солитонов.

4. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

При малых внешних воздействиях, недостаточных для локальных сдвигов структуры и формирования в ней солитонов, образуются спиновые волны, в которых намагниченность колеблется около равновесных положений спиральной структуры. Первоначально локализованные на фоне сверхструктуры спин-волновые состояния расплываются с течением времени из-за эффектов дисперсии. Теоретическое описание нелинейной динамики спиновых волн связано с решением так называемой регулярной задачи Римана, для которой функции $a(u)$ и $a^*(-u^*)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности. Краевые условия для такой задачи совпадают с (2.2) при $\Delta = 0$: $\Phi(z, t) \rightarrow \varphi_0(\chi)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Поскольку $\Delta = 0$, функции $\Psi_{\pm}(u)$, $\Psi_0(u)$ имеют периоды $(4K, 4iK')$ и однозначно определены на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору.

Для решения регулярной задачи Римана на торе полезны функции

$$F_+(u) = \exp\left(\frac{i}{4}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3\right) \Psi_+(u) \Psi_0^{-1}(u), \quad \det F_+ = a^*(-u^*),$$

$$F_-(u) = \exp\left(\frac{i}{4}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3\right) \frac{\Psi_-(u)}{a(u)} \Psi_0^{-1}(u), \quad \det F_- = \frac{1}{a(u)},$$

которые являются не только двоякопериодическими и аналитическими в областях $D_{\pm}$, но и непрерывными в этих областях вплоть до границы. Переход от $\Psi_{\pm}(u)$ к $F_{\pm}(u)$ необходим для исключения особенностей функций $\Psi_{\pm}(u)$, порожденных фоновой структурой.

С помощью асимптотических разложений функций $\Psi_{\pm}(u)$, $\Psi_0(u)$ вблизи точек $u = \pm iK'$ (см. раздел 5) нетрудно убедиться в справедливости формул

$$a(\pm iK') = a(\pm iK' + 2K) = 1,$$

$$F_{\pm}(-iK') = F_{\pm}(-iK' + 2K) = I, \quad F_{\pm}(iK') = \exp\left(\frac{i}{2}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3\right). \quad (4.1)$$

Рис. 1. Граница γ между областями D_+ и D_- .

Редукции для функций $F_{\pm}(u)$ в областях их аналитичности следуют из редукций для $\Psi_{\pm}(u)$, $\Psi_0(u)$:

$$F_{\pm}(u + 2K) = \sigma_3 F_{\pm}(u) \sigma_3, \quad F_{\pm}^*((u^* + 2iK')^*) = \sigma_1 F_{\pm}(u) \sigma_1. \quad (4.2)$$

В ячейке своей периодичности $(4K, 4iK')$ на границах $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ между областями D_+ и D_- , где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{\operatorname{Re} u = 0, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, & \tilde{\gamma}_1 &= \{\operatorname{Re} u = 2K, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \\ \gamma_2 &= \{\operatorname{Re} u = -K, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, & \tilde{\gamma}_2 &= \{\operatorname{Re} u = K, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \end{aligned}$$

(см. рис. 1) матричные функции $F_{\pm}(u)$ связаны условием (2.15):

$$F_+(u) = F_-(u)(I - G(u)), \quad G(u) = \Psi_0(u) \begin{pmatrix} 0 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u). \quad (4.3)$$

Покажем, что решение регулярной задачи Римана (4.3) сводится к решению линейных интегральных уравнений. Определим кусочно-аналитическую функцию $\tilde{F}(u) = F_{\pm}(u)$ при $u \in D_{\pm}$ и введем контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Здесь Γ_i – контуры, ограничивающие области D_+ и D_- в элементарной ячейке $(4K, 4iK')$ (см. рис. 2). Мы используем положительные направления обходов, при которых каждая из областей D_+ или D_- остается слева от охватывающего ее контура.

Рис. 2. Контур Γ в комплексной плоскости переменной u .

Поскольку величины $\tilde{F}(u')$, $\zeta(u' + iK')[\tilde{F}(u') - I]$ при $u' \in \Gamma$ являются граничными значениями функций, аналитических внутри контура Γ , справедливы тождества

$$\oint_{\Gamma} du' \tilde{F}(u') = 0, \quad \oint_{\Gamma} du' \zeta(u' + iK')[\tilde{F}(u') - I] = 0, \quad (4.4)$$

где периоды функций Вейерштрасса равны $(4K, 4iK')$.

Трудность решения регулярной задачи Римана на римановой поверхности связана с выбором аналога ядра Коши [20], [21]. В рассматриваемой задаче подходящее ядро Коши на торе имеет вид

$$Y(u', u) = \zeta(u' - u) - \zeta(u' + iK').$$

Оно двоякопериодично по переменной u' с периодами $(4K, 4iK')$, но квазипериодично по переменной u [16], [18]:

$$\zeta(u \pm 2K) = \zeta(u) \pm 2\eta_1, \quad \zeta(u \pm 4iK') = \zeta(u) \pm 2\eta_3.$$

Тем не менее вследствие тождеств (4.4) преобразование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} du' Y(u', u) [\tilde{F}(u') - I] \quad (4.5)$$

определяет двоякопериодическую функцию спектрального параметра u . Вычисление интеграла (4.5) с помощью теоремы Коши дает интегральное представление

$$\tilde{F}(u) = I + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} du' Y(u', u) [\tilde{F}(u') - I]. \quad (4.6)$$

Горизонтальные участки контура Γ при интегрировании в (4.6) проходятся в противоположных направлениях, а подынтегральная функция принимает на них одинаковое значение, поэтому в (4.6) остаются лишь интегралы вдоль вертикальных

участков контура Γ , которые с помощью (4.3) можно выразить в терминах скачков функции $\tilde{F}(u')$ на γ :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) [F_-(u') - F_+(u')] = \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) F_-(u') G(u').\end{aligned}\quad (4.7)$$

Здесь отрезки контура γ проходятся в направлении обхода области D_- .

Пусть u стремится к точке $\nu \in \gamma$ из области D_- , тогда в силу формулы Племелья соотношение (4.7) приводит к сингулярному интегральному уравнению для расчета функции $F_-(\nu)$:

$$F_-(\nu) \left(I - \frac{G(\nu)}{2} \right) = I + \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\gamma} du' Y(u', \nu) F_-(u') G(u'), \quad (4.8)$$

где “v.p.” перед интегралом означает, что он вычисляется в смысле главного значения Коши. Решение уравнения (4.8) достаточно найти при $\nu = iv$, где $|v| \leq K'$, так как на остальных участках контура γ оно восстанавливается с помощью редукций (4.2). Используя редукции и соотношения типа

$$\begin{aligned}\int_{-2K'i}^{2K'i} du' Y(u', \nu) F_-(u') G(u') = \\ = i \int_{-K'}^{K'} dv (Y(iv, \nu) F_-(iv) G(iv) + Y(-2K'i - iv, \nu) \sigma_1 [F_-(iv) G(iv)]^* \sigma_1)\end{aligned}$$

и $G^*(iv) = -\sigma_2 G(iv) \sigma_2$, получаем

$$\begin{aligned}F_-(\nu) \left(I - \frac{G(\nu)}{2} \right) &= I + \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-K'}^{K'} dv [M(iv, \nu) - M(iv - K, \nu)], \\ M(iv) &= [Y(iv, \nu) F_-(iv) - Y(2K - 2K'i - iv, \nu) \sigma_2 F_-^*(iv) \sigma_2] G(iv) + \\ &+ [Y(2K + iv, \nu) \sigma_3 F_-(iv) \sigma_3 - Y(-2K'i - iv, \nu) \sigma_1 F_-^*(iv) \sigma_1] \sigma_3 G(iv) \sigma_3.\end{aligned}\quad (4.9)$$

По известным значениям функции $F_-(u')$ на контуре γ с помощью формулы Коши (4.7) можно найти значения $F_+(u)$ и $F_-(u)$ в областях D_+ и D_- . После того как функции $F_{\pm}(u)$ найдены, последняя из формул (4.1) дает решение модели синус-Гордон, описывающее спиновые волны в геликоидальной структуре с преобладанием эффектов дисперсии над эффектами нелинейности.

Обсудим простой пример. Пусть $|b(u)| \ll 1$, $u \in \gamma$, тогда решение уравнения (4.9) можно найти методом последовательных приближений: $F_-(\nu) = I + O(b)$. В линейном по $|b|$ приближении имеем

$$\tilde{F}(u) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) G(u') + O(b^2).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}Y(iv, iK') - Y(2K - 2K'i - iv, iK') &= i \operatorname{dn}(iv, k), \\ G_{11}(iv) &= \frac{\operatorname{dn}(iv) - 1}{\operatorname{dn}(iv)} \operatorname{Re}[(\Psi_0(iv))_{11} (\Psi_0(iv))_{21} b^*(iv)],\end{aligned}$$

из (4.1) находим

$$\begin{aligned} \Phi - \varphi_0 \approx & \frac{4}{\pi} \int_{-K'}^{K'} dv \{ (\operatorname{Re}[(\Psi_0(iv))_{11}(\Psi_0(iv))_{21}b^*(iv)](\operatorname{dn}(iv) - 1) - \\ & - \operatorname{Re}[(\Psi_0(iv - K))_{11}(\Psi_0(iv - K))_{21}b^*(iv - K)](\operatorname{dn}(iv - K) - 1) \}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Интересно, что

$$(\operatorname{dn} u - 1)(\Psi_0(u))_{11}(\Psi_0(u))_{21} = \Lambda(\chi, u)e^{it \operatorname{dn}(u, k)/k},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi, u) = & \frac{i}{2} \frac{|\sigma(iK')|^2 \sigma(K) \sigma(K + 2iK')}{\sigma^2(K + iK') \sigma(u - iK') \sigma(u + iK')} \frac{\sigma(\chi + u) \sigma(\chi + 2iK' + u)}{\sigma(\chi - iK') \sigma(\chi + iK')} \times \\ & \times e^{-\eta_3(\chi + iK' + u) - \chi(\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK'))} \end{aligned}$$

– решение уравнения Ламе [18], записанное в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $(2K, 4iK')$. Уравнение Ламе возникает при линеаризации уравнения синус-Гордон относительно фоновой структуры $\varphi_0(\chi, k)$:

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{k^2} (\partial_\chi^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2) \right) (\Phi - \varphi_0) = 0, \quad (\partial_\chi^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2) \Lambda = -\varepsilon \Lambda.$$

Два слагаемых в правой части (4.10) соответствуют квазиакустической (“внутригра-ничной”) и квазиоптической (“внутридоменной”) модам спиновых волн в спиральной (полосовой доменной) структуре [22]. Наличие только двух полос в спектре линейных спиновых волн связано с конкретной формой периодического потенциала структуры. Квазиимпульс $p_\Lambda(u)$ функции Ламе отличается от квазиимпульса $p(u)$ решений Йоста: $p_\Lambda(u) = 2p(u) - \pi/2K$. Частота ω спин-волновых мод соотносится со спектром ε уравнения Ламе следующим образом: $\omega = \sqrt{\varepsilon}/k$. В книге [3] в последнем соотношении утерян множитель k^{-1} . Для квазиоптической ветви мы имеем $\sqrt{\varepsilon_{\text{opt}}} = \operatorname{dn}(iv, k) = \operatorname{sn}^{-1}(v + K', k')$, для квазиакустической ветви мы имеем $\sqrt{\varepsilon_a} = \operatorname{dn}(iv - K, k)$.

Рассмотренные задачи в принципе позволяют исследовать эволюцию любого начального распределения намагниченности в геликоидальной структуре с заданными граничными условиями. При этом схема интегрирования модели синус-Гордон состоит в следующем.

1. По заданному начальному распределению намагниченности находим коэффициенты $a(u)$ и $b(u)$ матрицы перехода.
2. Выделяем из функции $a(u)$ ее солитонную часть:

$$a(u) = a_{\text{sol}}(u)a_0(u). \quad (4.11)$$

Используя $a_{\text{sol}}(u)$ (3.1), с помощью задачи Римана с нулями строим солитонные решения $\Psi_{\pm}^{(\text{sol})}(u, \chi, t)$ и $\Phi^{(\text{sol})}(z, t)$ системы (2.3) и модели синус-Гордон.

3. Как и в книге [6], полное решение системы (2.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_+(u) &= \exp\left(-\frac{i}{4}(\Phi - \Phi^{(\text{sol})})\sigma_3\right) F_+(u) \Psi_+^{(\text{sol})}(u), \\ \Psi_-(u) &= \exp\left(-\frac{i}{4}(\Phi - \Phi^{(\text{sol})})\sigma_3\right) F_-(u) \Psi_-^{(\text{sol})}(u) a_0(u). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Тогда $F_{\pm}(u)$ – двоякопериодические функции с периодами $(4K, 4iK')$, аналитические в областях $D_{\pm}$ и непрерывные в этих областях вплоть до границы. Функции $F_{\pm}(u)$ не содержат особенностей, связанных с солитонами или с геликоидальной структурой:

$$\det F_+(u) = a_0^*(-u^*), \quad \det F_-(u) = \frac{1}{a_0(u)}.$$

Они удовлетворяют нормировочным условиям

$$\begin{aligned} F_{\pm}(-iK') &= F_{\pm}(-iK' + 2K) = I, \\ F_{\pm}(iK') &= F_{\pm}(iK' + 2K) = \exp\left[\frac{i}{2}(\Phi - \Phi^{(\text{sol})})\sigma_3\right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В силу соотношений

$$(\Psi_+^{(\text{sol})}(u))^{-1} = -\frac{(\Psi_-^{(\text{sol})}(-u^*))^{\dagger}}{a^{(\text{sol})*}(-u^*) \det M}, \quad a^{(\text{sol})*}(-u^*)a^{(\text{sol})}(u) = 1$$

расчет функций $F_{\pm}(u)$ сводится к решению регулярной задачи Римана:

$$F_+(u) = F_-(u)[I - G(u)], \quad u \in \gamma,$$

где

$$G(u) = \Psi_-^{(\text{sol})}(u) \begin{pmatrix} 0 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} (\Psi_-^{(\text{sol})}(-u^*))^{\dagger} \frac{dn u - 1}{dn u}.$$

Решение данной задачи найдено выше. Используя второе из соотношений (4.13), с помощью функций $F_{\pm}(u)$ находим решения задачи Коши для исходной модели синус-Гордон.

5. СПЕКТР ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Элемент $a(u)$ матрицы перехода не зависит от времени, и потому может быть использован в качестве производящего функционала интегралов движения для нелинейных возмущений на фоне сверхструктуры. Наиболее информативное представление интегралов движения следует из дисперсионных соотношений для функции $a(u)$.

Функция $a(u)$ аналитична в области D_- . Выделим из $a(u)$ ее солитонную часть в соответствии с (4.11). Множитель $a_{\text{sol}}(u)$ зависит от граничных условий (2.1) или (2.2) для модели синус-Гордон. В обоих случаях функция $a_0(u)$ в (4.11) не только будет аналитической в области D_- , но и не будет обращаться в ноль ни в одной точке этой области. Ее трансформационные свойства следуют из аналогичных свойств функций $a(u)$ и $a_{\text{sol}}(u)$:

$$a_0(u \pm 2K) = a_0(u), \quad a_0^*((u \pm 2iK')^*) = a_0(u), \quad a_0(\pm iK') = 1. \quad (5.1)$$

В рассматриваемой задаче ядро Коши, подходящее для построения дисперсионных соотношений, имеет вид дзета-функции Вейерштрасса $\zeta(u' - u)$ с периодами $(2K, 4iK')$. Поясним это утверждение.

Рис. 3. Область D_- и контур C в комплексной плоскости переменной u .

Рассмотрим преобразование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) \ln a_0(u'). \quad (5.2)$$

Здесь мы выбрали положительное направление обхода контура C , при котором охватываемая им область D_- остается слева от него (см. рис. 3). Подынтегральное выражение в (5.2) аналитично всюду в области D_- , за исключением простого полюса в точке $u' = u$. Это позволяет вычислить интеграл (5.2) с помощью теоремы Коши о вычетах:

$$\ln a_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) \ln a_0(u'). \quad (5.3)$$

Функция $\ln a_0(u)$ является аналитической двоякопериодической функцией в области D_- , поэтому

$$\oint_C du \ln a_0(u) = \int_{-K'}^{K'} dv \ln \left(\frac{|a_0(iv)|^2}{|a_0(-K + iv)|^2} \right) = 0, \quad (5.4)$$

где равенство нулю получено с использованием соотношений (5.1).

Хотя ядро в представлении (5.3) является квазипериодическим по u , свойство (5.4) приводит к тому, что преобразование (5.3), как и положено, определяет двоякопериодическую функцию $\ln a_0(u)$. Кроме того, $\ln a_0(\pm iK') = 0$, таким образом, функция $\zeta(u' \mp iK') \ln a_0(u')$ аналитична в области D_- и непрерывна вплоть до границы C . Потому в силу теоремы Коши интегральное представление (5.3) не нарушает нормировки: $\ln a_0(\pm iK') = 0$.

Пусть u стремится из области D_- к точке $\nu \in C$, тогда согласно формуле Племеля имеем

$$\ln a_0(\nu) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \oint_C du' \zeta(u' - \nu) \ln a_0(u').$$

Отсюда следует дисперсионное соотношение

$$\arg a_0(\nu) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \oint_C du' \zeta(u' - \nu) \ln |a_0(u')|,$$

которое, в частности, позволяет выразить граничное значение функции $\ln a_0(u)$ через значение ее модуля на контуре C :

$$\ln a_0(\nu) = \ln |a_0(\nu)| + i \arg a_0(\nu) = \ln |a_0(\nu)| + \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \oint_C du' \zeta(u' - \nu) \ln |a_0(u')|.$$

Повторное применение формулы Племелья позволяет аналитически продолжить последнее равенство с контура C в область D_- :

$$\ln a_0(u) = \frac{1}{\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) \ln |a_0(u')|, \quad u \in D_-.$$

В результате для функции $a(u)$ получаем интегральное представление

$$a(u) = a_{\text{sol}}(u) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) |\ln a_0(u')|^2 \right). \quad (5.5)$$

Из плотности лагранжиана (1.2) с помощью стандартной процедуры [23] находим выражения для плотностей полевого импульса p и энергии w системы:

$$p = \partial_t \Phi \partial_z \Phi, \quad w = \frac{(\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2}{2} + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi).$$

При записи интегралов движения для нелинейных возбуждений в спиральной структуре следует выделить вклад неоднородного основного состояния среды (для безграничного образца он бесконечен). При обсуждении условий устойчивости основного состояния среды обычно вычисляют усредненную по периоду структуры энергию единицы длины структуры [1]–[4]. Но в возбужденных состояниях геликоидальная структура теряет свойство периодичности, поэтому возникает проблема корректного определения интегралов движения для возбуждений на фоне структуры.

Покажем, что использование функции $a(u)$ в качестве производящего функционала интегралов движения позволяет преодолеть эту трудность. Наиболее интересные интегралы движения получаются из разложений $\ln a(u)$ вблизи особых точек $u = \pm iK'$ системы (2.3). Согласно представлению (2.13) ряды для функции $a(u)$ можно найти с помощью асимптотических разложений решения Йоста $\Psi_1(u)$ вблизи указанных точек. Получим сначала асимптотический ряд для $\Psi_1(u)$ при $u = iK' + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, в задаче с граничными условиями (2.2), когда

$$\Psi_1 \rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta(u, \chi, t), \quad z \rightarrow -\infty.$$

Из определения $\varphi_0(\chi)$ и тождества (3.9) следует соотношение

$$\exp \left(\frac{i\sigma_3}{4} (\pi + \varphi_0(\chi)) \right) = \text{diag} \left(\sqrt{\frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi - iK')}} e^{-\eta_3 \chi/2}, \sqrt{\frac{\sigma(\chi - iK')}{\sigma(\chi + iK')}} e^{\eta_3 \chi/2} \right).$$

С его помощью придадим функции Ψ_δ вид, удобный для дальнейших расчетов:

$$\begin{aligned} \Psi_\delta = & \exp\left(\frac{i}{4}(\varphi_0(\chi + \delta) + \pi)\sigma_3\right) \times \\ & \times \left(\frac{\sigma(\chi + \delta + u)}{\sigma(\chi + \delta + iK')} \frac{i\frac{\sigma(\chi + \delta + 2iK' - u)}{\sigma(\chi + \delta + iK')} e^{\eta_3(u - iK')}}{\frac{\sigma(\chi + \delta + u - 2iK')}{\sigma(\chi + \delta - iK')} e^{\eta_3(u - iK')}} \right) \times \\ & \times \frac{|\sigma(iK')|}{\sqrt{2}\sigma(u)} \exp\left(-\frac{\chi\sigma_3}{2}[\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK') - \eta_3] + \frac{\eta_3\delta}{2}\sigma_3 + \frac{it\,du}{2k}\sigma_3\right). \end{aligned}$$

Функция Ψ_δ (функция $\varphi_0(\chi + \delta)$) совпадает с функцией $\Psi_1^{(0)}$ (функцией $\varphi_1^{(0)}$) при $\delta = \Delta$ и с функцией $\Psi_2^{(0)}$ (функцией $\varphi_2^{(0)}$) при $\delta = 0$. Запишем асимптотическое разложение $\Psi_1(u)$ так, чтобы при построении рядов по степеням ε для $a(u)$ сокращались лишние множители в представлении (2.13). Для этого будем искать Ψ_1 в виде

$$\Psi_1 = e^{i\Phi\sigma_3/4} g \tilde{\Psi}_1^{(0)}, \quad \tilde{\Psi}_1^{(0)} \equiv e^{-i\varphi_1^{(0)}\sigma_3/4} \Psi_1^{(0)}.$$

Тогда из (2.3) следует уравнение для расчета g :

$$\partial_z g = Lg - gL_0. \quad (5.6)$$

Здесь L_0 получается из L заменой $\Phi \rightarrow \varphi_1^{(0)}$ (где $\partial_t \varphi_1^{(0)} = 0$),

$$L = \frac{i}{4} [(\partial_t \Phi - \partial_z \Phi)\sigma_3 + (w_2 - w_1)\sigma_1 + (w_1 + w_2)(\cos \Phi \sigma_1 + \sin \Phi \sigma_2)].$$

Матричная функция g должна удовлетворять условию $g \rightarrow I$ при $z \rightarrow -\infty$. Решение уравнения (5.6) будем искать в виде ряда по степеням $\varepsilon = u - iK'$:

$$g = I + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varepsilon^n,$$

где $g_n \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Используя разложение g_n по матрицам Паули, находим

$$\Psi_1 = e^{i\Phi\sigma_3/4} [I + \varepsilon(b_1\sigma_1 + c_1\sigma_2) + O(\varepsilon^2)] \tilde{\Psi}_1^{(0)},$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{k}{8} \int_{-\infty}^z dz' \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{(\partial_t \Phi - \partial_{z'} \Phi)^2 - (\partial_{z'} \varphi_1^{(0)})^2}{2} \right), \\ c_1 &= \frac{k}{4} [\partial_t \Phi - \partial_z (\Phi - \varphi_1^{(0)})]. \end{aligned}$$

Для получения разложения функции $a(u)$ по степеням ε достаточно разложить предэкспоненциальные множители в выражениях для $(\Psi_2^{(0)})^{-1}$ и $\Psi_1^{(0)}$ (см. (2.13)). Это достигается с помощью равенства $\sigma(\alpha + \varepsilon) = \sigma(\alpha)[1 + \zeta(\alpha)\varepsilon + O(\varepsilon^2)]$. Приведем окончательный результат:

$$a(iK' + \varepsilon) \approx e^{\eta_3\Delta/2} (1 + \varepsilon \lim_{z \rightarrow +\infty} [f(\chi) + b_1(z)]), \quad (5.7)$$

где

$$f(\chi) \equiv \frac{\zeta(\chi + \Delta + iK') + \zeta(\chi + \Delta - iK') - \zeta(\chi + iK') - \zeta(\chi - iK')}{2}.$$

Изложенная процедура обеспечивает сходимость выражения (5.7), поскольку

$$\frac{k}{8} \int_{-\infty}^z dz' \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \varphi_2^{(0)} + \frac{(\partial_{z'} \varphi_2^{(0)})^2 - (\partial_{z'} \varphi_1^{(0)})^2}{2} \right) = -f(\chi) + \text{const.}$$

В дальнейших расчетах мы используем тождество

$$\zeta(u) = \frac{1}{2} Z(u) + \frac{\text{cn } u}{2 \text{sn } u} (1 + \text{dn } u) + \frac{\eta_1 u}{K}, \quad (5.8)$$

которое доказывается разложением по полюсам его правой части. Аддитивная постоянная фиксируется условием $\zeta(K) = \eta_1$. С учетом (5.8) получаем

$$f(\chi) = \frac{1}{2} \left(Z(\chi + \Delta) - Z(\chi) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right).$$

Пусть длина магнитной спирали равна $2R$, $|z| \leq R$, $R = 2kKn$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 1$. Тогда (5.7) принимает вид

$$\begin{aligned} a(iK' + \varepsilon) = & \exp \left(\frac{\eta_3 \Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{k\varepsilon}{8} \int_{-R}^R dz \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{(\partial_t \Phi - \partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2}{2} \right) + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

В окрестности точки $u = -iK'$ асимптотическое разложение функции Ψ_1 следует искать в виде

$$\Psi_1 = e^{-i\Phi\sigma_3/4} g e^{i\varphi_1^{(0)}\sigma_3/4} \Psi_1^{(0)}.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} a(-iK' + \varepsilon) = & \exp \left(-\frac{\eta_3 \Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{k\varepsilon}{8} \int_{-R}^R dz \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{(\partial_t \Phi + \partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2}{2} \right) + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

Под энергией локализованных нелинейных возбуждений будем понимать разность полной энергии системы и энергии фоновой структуры:

$$\begin{aligned} H = & \frac{4}{k} \left(Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right) + \\ & + \int_{-R}^R dz \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{(\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2}{2} + q(\partial_z \Phi - \partial_z \varphi_1^{(0)}) \right) = \\ = & \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln [a(iK' + \varepsilon)a(-iK' + \varepsilon)] \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{8E}{\pi k} \text{am}(\Delta, k). \end{aligned} \quad (5.9)$$

При записи последнего слагаемого мы учли явный вид функций $\varphi_{1,2}^{(0)}$ и соотношение $q = 4E/\pi k$.

При дифференцировании по ε в (5.9) мы используем представление (5.5) функции $a(u)$ и соотношения (5.4), (5.8). На горизонтальных участках контура C подынтегральная функция в (5.5) принимает одинаковые значения. Поскольку эти участки при вычислении интеграла по параметру u проходятся в противоположных направлениях, их вклады в интеграл компенсируются. Поэтому в (5.5) остается интегрирование только по вертикальным участкам

$$C_1 = \{u' = iv, -2K' \leq v \leq 2K'\}, \quad C_2 = \{u' = iv - K, -2K' \leq v \leq 2K'\}$$

контура C . На отрезках C_1 и C_2 с учетом редукций условие унимодулярности матрицы перехода (2.8) приобретает вид $|a_0(u)|^2 = 1 - b(u)b^*(-u^*)$, где

$$b(u)b^*(-u^*) = \begin{cases} |b(u)|^2, & u \in C_1, \\ -|b(u)|^2 e^{2\eta_1 \Delta}, & u \in C_2. \end{cases}$$

В конечном счете получаем

$$\begin{aligned} \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln[a(iK' + \varepsilon)a(-iK' + \varepsilon)] &= \int_{-K'}^{K'} dv [\varepsilon_a(v)n_a(v) + \varepsilon_{\text{opt}}(v)n_{\text{opt}}(v)] - \\ &- \frac{8}{k} \left(\sum_{p=1}^{2M} \text{Re} \left[Z(\nu_p) + \frac{2\eta_1 \nu_p}{K} \right] + 2 \sum_{s=1}^N \text{Re} \left[Z(\mu_s) + \frac{2\eta_1 \mu_s}{K} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Величины ε_a и ε_{opt} (величины n_a и n_{opt}) определяют спектр (плотность) квазиакустических и квазиоптических спин-волновых мод в спиральной структуре:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(v) &= k'^2 \text{sn}^2(v + K', k'), & n_a(v) &= \frac{4}{\pi k} \ln(1 + |b(-K + iv)|^2 e^{2\eta_1 \Delta}) > 0, \\ \varepsilon_{\text{opt}}(v) &= \frac{1}{\text{sn}^2(v + K', k')}, & n_{\text{opt}}(v) &= -\frac{4}{\pi k} \ln(1 - |b(iv)|^2) > 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из-за образования солитонов сверхструктура сжимается вдоль оси Oz на величину $k\Delta$. Это обстоятельство проявляется в изменении плотности квазиакустических мод, а также в изменении энергии сверхструктуры, которое учитывается последним слагаемым в (5.9). Дискретные слагаемые в (5.10) соответствуют энергиям кинков и бризеров в спиральной структуре.

Полевой импульс солитонов и спин-волновых мод в задаче с граничными условиями (2.2) определяется выражением

$$P = \int_{-R}^R dz \partial_t \Phi \partial_z \Phi = \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln \frac{a(-iK' + \varepsilon)}{a(iK' + \varepsilon)} \bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Отсюда, учитывая (5.8) и тождество $\zeta(\mu - iK') - \zeta(\mu + iK') + \eta_3 = i \text{dn } \mu$, находим

$$\begin{aligned} P &= \int_{-K'}^{K'} dv [p_a(v)n_a(v) + p_{\text{opt}}(v)n_{\text{opt}}(v)] - \\ &- \frac{8}{k} \left(\sum_{p=1}^{2M} \text{Im}(\text{dn } \nu_p) + 2 \sum_{s=1}^N \text{Im}(\text{dn } \mu_s) \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где p_a и p_{opt} – полевые импульсы квазиакустических и квазиоптических спин-волновых мод,

$$p_a(v) = k' \operatorname{dn}(v + K', k') \operatorname{cn}(v + K', k'), \quad p_{\text{opt}}(v) = -\frac{\operatorname{dn}(v + K', k') \operatorname{cn}(v + K', k')}{\operatorname{sn}^2(v + K', k')}.$$

Отметим, что в спектральных разложениях интегралов движения удалось полностью разделить вклады двух независимых типов коллективных возбуждений на фоне геликоидальной структуры: солитонов и спиновых волн.

Законы дисперсии спиновых волн в геликоидальных структурах обычно записывают в терминах блоховского квазиимпульса функций Ламе [3]. Соответствующие зависимости оказываются трансцендентными. Полученные нами результаты показывают, что квазиимпульс решений уравнения Ламе отличается от полевого импульса спин-волновых мод. В терминах полевого импульса законы дисперсии спиновых волн приобретают простой вид и становятся алгебраическими:

$$\varepsilon_a(p_a) = \frac{1}{2} \left(1 + k'^2 - \sqrt{k^4 + 4p_a^2} \right), \quad -k' \leq p_a \leq k',$$

$$\varepsilon_{\text{opt}}(p_{\text{opt}}) = \frac{1}{2} \left(1 + k'^2 + \sqrt{k^4 + 4p_{\text{opt}}^2} \right), \quad -\infty \leq p_{\text{opt}} \leq +\infty.$$

Вычисление интегралов движения в задаче с граничными условиями (2.1) мало отличается от приведенных расчетов. В этом случае геликоидальная структура содержит нечетное число кинков, поэтому окончательные формулы для энергии и импульса коллективных возбуждений получаются из соотношений (5.9), (5.10) и (5.12) после замен $2M \rightarrow 2M + 1$ и $\operatorname{am}(\Delta) \rightarrow \operatorname{am}(\Delta) - \pi\sigma$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Фонда “Династия” в рамках программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] И. Ф. Люксютов, А. Г. Наумов, В. Л. Покровский, *Двумерные кристаллы*, Научовадумка, Киев, 1988.
- [2] V. L. Pokrovsky, A. L. Talapov, *Theory of Incommensurate Crystals*, Hardwood Acad. Publ., London, Paris, New York, 1984.
- [3] Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, Энергоатомиздат, М., 1987.
- [4] A. B. Borisov, V. V. Kiselev, *Physica D*, **31**:1 (1988), 49–64.
- [5] A. B. Borisov, J. Kishine, Y. G. Bostrem, A. S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B.*, **79**:13 (2009), 134436–134446, arXiv: 0901.1423.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [8] Б. А. Дубровин, *Римановы поверхности и нелинейные уравнения*, РХД, Ижевск, 2001.
- [9] A. B. Borisov, V. V. Kiselev, *Physica D*, **111**:1–4 (1998), 96–128.
- [10] V. V. Kiselev, *Phys. Met. Metallogr.*, **95**:suppl. 1 (2003), 28–34.
- [11] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 2: *Топологические солитоны, двумерные и трехмерные “узоры”*, Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2011.

- [12] Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **67**:5 (1975), 1717–1727.
- [13] A. V. Mikhailov, *Phys. Lett. A.*, **92**:2 (1982), 51–55.
- [14] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *ТМФ*, **54**:2 (1983), 246–257.
- [15] Yu. L. Rodin, *Physica D*, **11**:1–2 (1984), 90–108.
- [16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3: *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье*, Наука, М., 1967.
- [17] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **67**, Springer, 1971.
- [18] А. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [19] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 94–113.
- [20] W. Koppelman, *J. Math. Mech.*, **10**:2 (1961), 247–277.
- [21] Э. И. Зверович, *УМН*, **26**:1(157) (1971), 113–179.
- [22] Б. Н. Филиппов, А. П. Танкеев, *Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой*, Наука, М., 1987.
- [23] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 2006.

Поступила в редакцию 15.11.2011,
после доработки 11.03.2012