Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Магазев, Интегрирование уравнения Клейна–Гордона–Фока во внешнем электромагнитном поле на группах Ли, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 3, 375–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:32:00

© 2012 г.

А. А. Магазев*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ГРУППАХ ЛИ

Исследуется структура алгебры операторов симметрии уравнения Клейна–Гордона–Фока на псевдоримановых многообразиях с движениями в присутствии внешнего электромагнитного поля. Показано, что в случае инвариантного тензора электромагнитного поля указанная алгебра представляет собой одномерное центральное расширение алгебры Ли группы движений. Предлагается метод интегрирования уравнения Клейна–Гордона–Фока во внешнем поле на многообразиях с просто транзитивным действием групп, основанный на методе орбит коприсоединенного представления и гармоническом анализе на группах Ли. Подробно рассмотрен нетривиальный пример на четырехмерной группе $E(2) \times \mathbb{R}$.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона–Фока, оператор симметрии, группа Ли, алгебра Ли, λ -представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Клейна–Гордона–Фока (КГФ) представляет собой простейшее релятивистское уравнение, описывающее динамику массивных бесспиновых частиц, взаимодействующих с полями калибровочной природы. Несмотря на свой модельный характер, указанное уравнение довольно часто используется с целью первоначального исследования различных квантово-полевых эффектов: рождения частиц во внешних электромагнитных и гравитационных полях, поляризации вакуума и т. д. [1]–[3]. При этом первостепенной представляется проблема построения соответствующих точных решений во внешних интенсивных полях, когда стандартные подходы, принятые в рамках теории возмущений, ограничены либо вовсе неприменимы.

К настоящему моменту накопилось значительное число работ, посвященных нахождению точных решений уравнения КГФ (см., например, работы [4], [5] и цитированную в них литературу). Отметим, что в большинстве из них рассматриваются классы полей, допускающих реализацию схемы разделения переменных, в рамках

*Омский государственный технический университет, Омск, Россия.
E-mail: magazev@mail.ru

которой уравнение КГФ, как минимум, обладает коммутативной алгеброй операторов симметрии не выше второго порядка.

В работе [6] был предложен метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных, использующий некоммутативные алгебры операторов симметрии. Данный метод позволил значительно расширить классификацию внешних полей и псевдоримановых многообразий, допускающих существование точных решений уравнения КГФ, а также послужил фундаментом для развития оригинальных подходов к исследованию квантовых эффектов на однородных пространствах [7]. В частности, в рамках метода некоммутативного интегрирования была получена классификация всех точно решаемых случаев для свободного уравнения КГФ на четырехмерных группах Ли, т. е. на четырехмерных псевдоримановых многообразиях, допускающих просто транзитивное действие группы движений [8].

Статья организована следующим образом. Сначала исследуется структура алгебры симметрии уравнения КГФ во внешнем электромагнитном поле для произвольного псевдориманова многообразия. Показано, что если 2-форма электромагнитного поля является инвариантной относительно действия группы движений, то операторы симметрии свободного уравнения КГФ, ассоциируемые с векторными полями Киллинга, могут быть продолжены до соответствующих операторов симметрии при наличии поля. Доказана теорема, утверждающая, что указанные операторы образуют одномерное центральное расширение алгебры Ли группы движений. Этот результат в некотором смысле обобщает предложенную в работе [9] конструкцию калибровочных полей на однородных пространствах, в рамках которой алгебра операторов симметрии при добавлении поля не деформируется. Отметим также, что определяющие уравнения для операторов симметрии во внешних калибровочных полях исследовались рядом авторов [10], [11], однако соответствующая алгебра симметрии при этом практически не изучалась.

Далее мы подробно рассматриваем ситуацию, когда группа движений действует на многообразии просто транзитивно. В этом случае электромагнитное поле фактически отождествляется с некоторым 2-коциклом алгебры Ли группы движений. Для интегрирования соответствующего уравнения КГФ во внешнем электромагнитном поле используется гармонический анализ на группах Ли, включающий в себя построение специального неприводимого представления центрального расширения алгебры Ли группы движений (λ -представление) [6]. С помощью λ -представления обобщается стандартная техника разложения общего решения в ряд Фурье, которая сводит исходную задачу к решению редуцированного уравнения с меньшим числом независимых переменных. Отметим, что решение в этом случае строится глобально, т. е. проблемы “сшивки” решений в различных координатных картах атласа исходного многообразия не возникает. Используемый подход позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие интегрируемости, выраженное через так называемый когомологический индекс, обобщающий понятие обычного индекса алгебры Ли.

В заключение в работе подробно рассматривается пример интегрирования уравнения КГФ в инвариантном электромагнитном поле на четырехмерной группе Ли, являющейся прямым произведением группы движений евклидовой плоскости и одномерной абелевой группы $\mathbb{R}$.

2. АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КГФ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Пусть (M, g) – гладкое связное многообразие с метрикой g . Обычно в физических приложениях сигнатуру метрики предполагают лоренцевой, но в нашем случае это несущественно, поэтому будем полагать метрику псевдоримановой. Рассмотрим в области действия некоторой координатной карты $\{x^i\}$ многообразия M уравнение КГФ

$$\hat{H}\varphi(x) = -m^2\varphi(x). \quad (1)$$

Здесь $\hat{H} \equiv g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ – оператор Лапласа–Бельтрами, соответствующий метрике g_{ij} , ∇_i – ковариантные производные, отвечающие координатным векторным полям $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ (связность полагаем согласованной с метрикой), m – положительный вещественный параметр, который интерпретируется как масса частиц скалярного поля $\varphi(x)$. Здесь и далее предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование.

Предположим, что псевдориманово многообразие M допускает действие связной группы движений G , которая определяется векторными полями Киллинга $\xi_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\partial_i$, $\alpha = 1, \dots, \dim G$. Известно, что в этом случае $\hat{\xi}_\alpha \equiv \xi_\alpha^i\nabla_i$ представляют собой операторы симметрии уравнения (1) и являются образующими алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G :

$$[\hat{\xi}_\alpha, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{\xi}_\gamma, \quad (2)$$

где $C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma$ – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе, заданном векторными полями ξ_α .

Пусть на многообразии M дополнительно задана замкнутая дифференциальная 2-форма $F = (1/2)F_{ij}dx^i \wedge dx^j$. Как следует из леммы Пуанкаре, замкнутость этой формы приводит к равенству $F = dA$, где $A = A_i dx^i$ – дифференциальная 1-форма, определенная на M по крайней мере локально. Далее будем интерпретировать форму F как *внешнее* электромагнитное поле с тензором напряженности F_{ij} и векторным потенциалом, задаваемым 1-формой A .

Известно, что учет взаимодействия заряженного скалярного поля с электромагнитным осуществляется с помощью сдвига ковариантных производных в операторе $\hat{H}$ на соответствующие компоненты векторного потенциала (см., например, [1]): $\nabla_i \rightarrow \nabla_i^{(\epsilon)} \equiv \nabla_i - i\epsilon A_i$, где ϵ – электрический заряд частиц скалярного поля, $i = \sqrt{-1}$. Уравнение (1) после такого преобразования принимает вид *уравнения КГФ во внешнем электромагнитном поле*:

$$\hat{H}^{(\epsilon)}\varphi(x) = -m^2\varphi(x), \quad (3)$$

где $\hat{H}^{(\epsilon)} \equiv g^{ij}\nabla_i^{(\epsilon)}\nabla_j^{(\epsilon)} = g^{ij}(\nabla_i - i\epsilon A_i)(\nabla_j - i\epsilon A_j)$.

Исследуем вопрос о симметриях уравнения (3). Сопоставим каждому векторному полю Киллинга ξ_α неоднородный дифференциальный оператор $\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)} = \xi_\alpha^i\nabla_i^{(\epsilon)} + i\epsilon\chi_\alpha$, где функции $\chi_\alpha \in C^\infty(M)$ определим условием

$$[\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)}, \hat{H}^{(\epsilon)}] = 0.$$

Подставляя сюда явный вид операторов $\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)}$ и $\hat{H}^{(\epsilon)}$ и учитывая киллинговость векторных полей ξ_α , с помощью прямых вычислений получаем

$$2i\epsilon g^{ij}(\partial_i\chi_\alpha + \xi_\alpha^k F_{ki})\nabla_j^{(\epsilon)} + i\epsilon g^{ij}\nabla_i(\partial_j\chi_\alpha + \xi_\alpha^k F_{kj}) = 0.$$

Легко видеть, что полученное равенство эквивалентно условию

$$\partial_j \chi_\alpha + \xi_\alpha^k F_{kj} = 0, \quad (4)$$

которое на языке дифференциальных форм можно представить в инвариантном виде как

$$d\chi_\alpha = -i_{\xi_\alpha} F. \quad (5)$$

Здесь $i_\xi F \equiv F_{ij} \xi^i dx^j$ – внутреннее произведение 2-формы F на векторное поле ξ .

Мы будем рассматривать (5) как систему уравнений на неизвестные функции χ_α . Данная система получена нами для произвольной замкнутой 2-формы F и в общем случае является неинтегрируемой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Равенство (5) равносильно требованию инвариантности 2-формы F относительно действия группы G . В этом случае функции χ_α существуют по крайней мере локально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, воспользовавшись известной формулой дифференциальной геометрии $\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + di_\xi$, для 0-формы χ_α получаем

$$d^2 \chi_\alpha = -di_{\xi_\alpha} F = i_{\xi_\alpha} dF - \mathcal{L}_{\xi_\alpha} F = -\mathcal{L}_{\xi_\alpha} F,$$

где $\mathcal{L}_\xi$ – производная Ли вдоль векторного поля ξ . Очевидно, что правая часть полученного равенства равна нулю тогда и только тогда, когда действие группы G сохраняет 2-форму F .

Для G -инвариантной 2-формы F правая часть равенства (5) является замкнутой 1-формой, следовательно, 0-формы χ_α существуют по крайней мере локально.

Далее 2-форму F мы будем считать G -инвариантной. Функции χ_α в этом случае определены с точностью до аддитивных постоянных и могут быть выражены в квадратурах:

$$\chi_\alpha = - \int i_{\xi_\alpha} F = - \int F_{ij} \xi_\alpha^i dx^j. \quad (6)$$

Используя равенства (2), запишем коммутационные соотношения, которым удовлетворяют неоднородные операторы $\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)}$:

$$[\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)}, \hat{\xi}_\beta^{(\epsilon)}] = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{\xi}_\gamma^{(\epsilon)} + i\epsilon (\hat{\xi}_\alpha \chi_\beta - \hat{\xi}_\beta \chi_\alpha - C_{\alpha\beta}^\gamma \chi_\gamma - F(\xi_\alpha, \xi_\beta)).$$

Из условия (5) следует, что $\hat{\xi}_\alpha \chi_\beta = F(\xi_\alpha, \xi_\beta)$, откуда получаем

$$[\hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)}, \hat{\xi}_\beta^{(\epsilon)}] = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{\xi}_\gamma^{(\epsilon)} + i\epsilon \Omega_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где нами введено обозначение

$$\Omega_{\alpha\beta} \equiv F(\xi_\alpha, \xi_\beta) - C_{\alpha\beta}^\gamma \chi_\gamma. \quad (8)$$

Легко видеть, что в отсутствие электромагнитного поля или при $\epsilon = 0$ (случай незаряженного поля) равенства (7) переходят в коммутационные соотношения (2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Функции $\Omega_{\alpha\beta} \in C^\infty(M)$, определяемые формулой (8), являются постоянными на многообразии M и обладают следующими свойствами:

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}, \quad (9)$$

$$C_{\alpha\beta}^\delta \Omega_{\delta\gamma} + C_{\beta\gamma}^\delta \Omega_{\delta\alpha} + C_{\gamma\alpha}^\delta \Omega_{\delta\beta} = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду определение (8) и условие (5), для внешнего дифференциала 0-формы $\Omega_{\alpha\beta}$ получаем

$$\begin{aligned} d\Omega_{\alpha\beta} &= di_{\xi_\beta} i_{\xi_\alpha} F - C_{\alpha\beta}^\gamma d\chi_\gamma = \mathcal{L}_{\xi_\beta}(i_{\xi_\alpha} F) - i_{\xi_\beta} d(i_{\xi_\alpha} F) + C_{\alpha\beta}^\gamma i_{\xi_\gamma} F = \\ &= -i_{[\xi_\alpha, \xi_\beta]} F - i_{\xi_\beta} (\mathcal{L}_{\xi_\alpha} F - i_{\xi_\alpha} dF) + C_{\alpha\beta}^\gamma i_{\xi_\gamma} F = -i_{[\xi_\alpha, \xi_\beta]} F + C_{\alpha\beta}^\gamma i_{\xi_\gamma} F = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу $\mathcal{L}_\xi i_\eta = -i_{[\xi, \eta]}$, а также условия замкнутости и G -инвариантности 2-формы F .

Свойства (9) и (10) проверяются простыми вычислениями. В частности, равенство (10) является прямым следствием замкнутости формы F и тождества Якоби для структурных констант $C_{\alpha\beta}^\gamma$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Напомним, что билинейная кососимметрическая функция $\Omega: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (10), называется 2-коциклом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначим множество всех 2-коциклов алгебры $\mathfrak{g}$ через $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Каждому $\Omega \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ можно сопоставить одномерное центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_\Omega \mathbb{R}$, полученное добавлением к алгебре $\mathfrak{g}$ одномерного центра $\mathbb{R}$ [12]. Правило коммутации в линейном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}$ задается следующим образом:

$$[e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma + \Omega_{\alpha\beta} e_0, \quad (11)$$

где $\{e_\alpha\}$ – базис в алгебре $\mathfrak{g}$, $e_0 \in \mathbb{R}$. Из сравнения коммутационных соотношений (7) и (11) можно сделать следующий вывод: линейная оболочка набора $\hat{\xi}_0^{(\epsilon)} \equiv i\epsilon, \hat{\xi}_1^{(\epsilon)}, \dots, \hat{\xi}_{\dim \mathfrak{g}}^{(\epsilon)}$ представляет собой одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее 2-коциклу (8).

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие, на котором действует группа движений G , определяемая векторными полями Киллинга $\xi_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i$, и пусть F – инвариантная замкнутая 2-форма на M . Тогда уравнение КГФ во внешнем электромагнитном поле допускает алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ операторов симметрии, базисные элементы которой могут быть выбраны в виде

$$\hat{\xi}_0^{(\epsilon)} = i\epsilon, \quad \hat{\xi}_\alpha^{(\epsilon)} = \xi_\alpha^i \nabla_i^{(\epsilon)} + i\epsilon \chi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{g},$$

где функции $\chi_\alpha \in C^\infty(M)$ определяются формулой (6). Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ является одномерным центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы движений G , заданным с помощью 2-коцикла (8).

Отметим, что равенствам (9) и (10) удовлетворяют, например, билинейные функции $\Omega_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_\gamma$, где λ_γ – константа. Подобные 2-коциклы называются тривиальными или 2-кограницами. Множество всех 2-кограниц алгебры Ли $\mathfrak{g}$ далее будем обозначать через $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

Нетрудно видеть, что центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}}$, соответствующее тривиальному коциклу, можно разложить в прямую сумму $\tilde{\mathfrak{g}} = s(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{R}$, где отображение s является изоморфизмом алгебр Ли. Действительно, если $\Omega_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \lambda_{\gamma}$, то коммутационные соотношения (7) можно представить как

$$[\hat{\xi}_{\alpha}^{(\epsilon)}, \hat{\xi}_{\beta}^{(\epsilon)}] = C_{\alpha\beta}^{\gamma} (\hat{\xi}_{\gamma}^{(\epsilon)} + i\epsilon \lambda_{\gamma}).$$

Так как функции χ_{α} задаются с точностью до аддитивных постоянных, изоморфизм s устанавливается заменой $\chi_{\alpha} \rightarrow \chi_{\alpha} + \lambda_{\alpha}$. В подобных случаях говорят также, что центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ является *расщепимым* [13].

Пусть F_1 и F_2 – инвариантные замкнутые 2-формы на M , описывающие две различные конфигурации электромагнитного поля. Обозначим соответствующие им 2-коциклы через Ω_1 и Ω_2 и рассмотрим отвечающие этим коциклам центральные расширения $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_2$. Расширения $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будем называть *эквивалентными*, если $\Omega_1 - \Omega_2 \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, т. е. 2-коциклы Ω_1 и Ω_2 отличаются на 2-кограницу. Нетрудно видеть, что эквивалентные центральные расширения суть изоморфные алгебры Ли, поэтому интерес представляет рассмотрение только неэквивалентных расширений, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами факторпространства $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \equiv \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})/\mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Пространство $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, наделенное естественной структурой абелевой группы, называется *группой 2-когомологий* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [12], [13].

3. УРАВНЕНИЕ КГФ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ГРУППАХ ЛИ

Предположим, что связная группа G действует на псевдоримановом многообразии (M, g) *просто транзитивно*. Это означает, что для любых двух точек $x, x' \in M$ в G найдется в точности один сдвиг, преобразующий x в x' . Таким образом, имеется гладкое взаимно однозначное соответствие между точками многообразия M и элементами группы G . Имея в виду диффеоморфизм $M \simeq G$, далее все необходимые конструкции мы будем строить на самой группе Ли G . Для определенности считаем, что группа действует сама на себе с помощью правых сдвигов.

Известно, что множество правоинвариантных псевдоримановых метрик на G находится во взаимно однозначном соответствии с множеством билинейных симметрических невырожденных форм на алгебре Ли $\mathfrak{g} \simeq T_e G$. Зафиксируем базис $\{e_{\alpha}\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ и выберем базис $\{e^{\alpha}\}$ в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ такой, что $\langle e^{\alpha}, e_{\beta} \rangle = \delta_{\beta}^{\alpha}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$. В этом случае указанное взаимно однозначное соответствие задается с помощью правила

$$g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \mathbf{G}_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha} \otimes \sigma^{\beta}, \quad (12)$$

где $\sigma^{\alpha} \equiv (R_x)^* e^{\alpha}$ – правоинвариантные 1-формы на G , соответствующие базисным элементам $e^{\alpha} \in \mathfrak{g}^*$, $\mathbf{G} \equiv g|_{x=e}$ – невырожденная симметрическая форма на касательном пространстве в единице группы. Нетрудно видеть, что левоинвариантные векторные поля $\xi_{\alpha} \equiv (L_x)_* e_{\alpha}$ – генераторы правого регулярного представления группы G – являются векторными полями Киллинга для метрики (12).

Оператор Лапласа–Бельтрами, построенный с помощью метрики (12), можно представить как операторный полином второго порядка от базисных правоинвариантных векторных полей $\eta_\alpha \equiv (R_x)_* e_\alpha$:

$$\hat{H} = g^{ij} \nabla_i \nabla_j = \mathbf{G}^{\alpha\beta} (\eta_\alpha + C_\alpha) \eta_\beta, \quad (13)$$

где $C_\alpha \equiv C_{\alpha\gamma}^\gamma$, $\mathbf{G}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$. Так как лево- и правоинвариантные векторные поля на группах Ли коммутируют, очевидно, что из (13) следует $[\hat{\xi}_\alpha, \hat{H}] = 0$. Заметим также, что если группа G унимодулярна, то имеет место равенство $C_\alpha = 0$, поэтому выражение (13) для оператора Лапласа–Бельтрами упрощается: $\hat{H} = \mathbf{G}^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta$.

Предположим, что на многообразии группы Ли G задано внешнее электромагнитное поле с помощью замкнутой 2-формы F , инвариантной по отношению к правым сдвигам. Форме F можно взаимно однозначным образом сопоставить билинейную кососимметрическую форму $\mathbf{F} = (1/2) \mathbf{F}_{\alpha\beta} e^\alpha \wedge e^\beta$, заданную на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ так, что

$$F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \mathbf{F}_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что замкнутость 2-формы (14) эквивалентна следующему условию на билинейную форму $\mathbf{F}$:

$$C_{\alpha\beta}^\delta \mathbf{F}_{\delta\gamma} + C_{\beta\gamma}^\delta \mathbf{F}_{\delta\alpha} + C_{\gamma\alpha}^\delta \mathbf{F}_{\delta\beta} = 0. \quad (15)$$

Как было отмечено в предыдущем разделе, условие (15) означает, что форма $\mathbf{F}$ представляет собой 2-коцикл алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Следовательно, множество инвариантных замкнутых 2-форм на группе G находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

Отметим, что формулы (12) и (14) представляют собой *тетрадные разложения* тензоров g_{ij} и F_{ij} по правоинвариантной тетраде 1-форм $\{\sigma^\alpha\}$.

В работе [14] приведена конструкция векторного потенциала, отвечающего тензору напряженности правоинвариантного электромагнитного поля на группе Ли. Для замкнутости изложения мы приведем здесь основные результаты, касающиеся этого вопроса.

Представим 1-форму векторного потенциала $A = A_i dx^i$ в виде разложения по тетрадному базису правоинвариантных 1-форм: $A = \mathbf{A}_\alpha \sigma^\alpha$, где компоненты $\mathbf{A}_\alpha$ являются, вообще говоря, функциями из $C^\infty(G)$. Очевидно, что переход от функций $\mathbf{A}_\alpha$ к тензорным компонентам A_i является взаимно однозначным: $A_i = \sigma_i^\alpha \mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}_\alpha = \eta_\alpha^i A_i$. Легко показать, что решение уравнения $dA = F$ в этом случае сводится к решению эквивалентной задачи

$$\eta_\alpha \mathbf{A}_\beta - \eta_\beta \mathbf{A}_\alpha + C_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{A}_\gamma = \mathbf{F}_{\alpha\beta} \quad (16)$$

относительно неизвестных функций $\mathbf{A}_\alpha$.

Система дифференциальных уравнений (16) (локально) интегрируема, так как постоянные функции $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию (15). Общее решение можно представить в виде $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}'_\alpha + \eta_\alpha(S)$, где $S \in C^\infty(G)$ – произвольная функция, а $\mathbf{A}'_\alpha$ – некоторое частное решение системы (16). Имеющийся произвол в выборе решения фактически является проявлением калибровочной инвариантности уравнения $dA = F$.

Наиболее просто частное решение системы (16) строится для тривиального 2-цикла. Действительно, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\mathbf{F} \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, так что $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_\gamma$ для некоторого дуального вектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Тогда частное решение системы уравнений (16) можно выбрать в виде $\mathbf{A}'_\alpha = \lambda_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$.

В качестве следствия отметим, что приведенное в утверждении 3 частное решение отвечает векторному потенциалу A , инвариантному относительно правых сдвигов на группе G (в общем случае это не так!).

Для того чтобы сформулировать соответствующий результат в общем случае, нам понадобятся некоторые дополнительные построения. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$ – одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающее 2-коциклу $\mathbf{F}$. Обозначим через $\tilde{G}$ связную односвязную группу Ли, алгебра Ли которой изоморфна $\tilde{\mathfrak{g}}$. В этом случае одномерному идеалу $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ отвечает связная одномерная подгруппа Z , лежащая в центре группы $\tilde{G}$. Очевидно, что факторгруппа $G' \simeq \tilde{G}/Z$ локально изоморфна группе G , поэтому $G \simeq G'/\Gamma$, где Γ – дискретная нормальная подгруппа в G' , принадлежащая центру G' . Таким образом, имеем $G \simeq \tilde{G}/(Z \times \Gamma)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. В областях тривиализации $V \subset G$ главного расслоения $G \simeq \tilde{G}/(Z \times \Gamma)$ частное решение системы уравнений (16) может быть найдено по формуле

$$\mathbf{A}'_\alpha = -U^{-1} \tilde{\eta}_\alpha U|_V, \quad \alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}. \quad (17)$$

Здесь $U: Z \rightarrow GL(1; \mathbb{R})$ – одномерное вещественное представление группы Z , $\tilde{\eta}_\alpha$ – правоинвариантное векторное поле на группе Ли $\tilde{G}$, отвечающее базисному элементу $e_\alpha \in \mathfrak{g}$.

Доказательство утверждения приведено в работе [14]. В качестве замечания следует подчеркнуть, что приведенное нами частное решение имеет локальный характер. Действительно, как показывают простейшие примеры, глобальное решение системы (16) может, вообще говоря, не существовать на всем групповом многообразии (препятствием к этому является наличие нетривиальной второй группы когомологий $H^2(G)$). Например, замкнутая 2-форма объема на двумерной группе $S^1 \times S^1$, как известно, не является точной.

Произведем в уравнении КГФ включение правоинвариантного электромагнитного поля, заданного с помощью 2-формы (14). Метрику полагаем правоинвариантной, т. е. соответствующий квадрат элемента длины имеет вид (12). В этом случае операция сдвига ковариантных производных в операторе Лапласа–Бельтрами (13) эквивалентна замене $\eta_\alpha \rightarrow \eta_\alpha^{(\epsilon)} \equiv \eta_\alpha - i\epsilon \mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}'_\alpha + \eta_\alpha(S)$, где $\mathbf{A}'_\alpha$ определяется формулой (17), а $S \in C^\infty(G)$ – произвольная функция на группе:

$$\hat{H}^{(\epsilon)} = \mathbf{G}^{\alpha\beta} (\eta_\alpha^{(\epsilon)} + C_\alpha) \eta_\beta^{(\epsilon)}. \quad (18)$$

Построенный оператор $\hat{H}^{(\epsilon)}$, вообще говоря, не коммутирует с левоинвариантными векторными полями ξ_α . Можно показать, что равенство $[\xi_\alpha, \hat{H}^{(\epsilon)}] = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда соответствующий 2-коцикл $\mathbf{F}$ является тривиальным, т. е. $\mathbf{F} \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ (см. утверждение 3). Из теоремы 1 вытекает, что в общем случае операторы, коммутирующие с (18), имеют вид

$$\xi_\alpha^{(\epsilon)} = \xi_\alpha^i \nabla_i^{(\epsilon)} + i\epsilon \chi_\alpha = \xi_\alpha + i\epsilon (\chi_\alpha - (\text{Ad}_x)_\alpha^\beta \mathbf{A}_\beta), \quad (19)$$

где $\chi_\alpha \in C^\infty(G)$ определяются формулой (6), а $\text{Ad}_x \equiv (R_{x^{-1}})_*(L_x)_*$ – матрица присоединенного представления группы G . Линейная оболочка операторов $\xi_0^{(\epsilon)} \equiv i\epsilon$ и (19) образует алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}'$, являющуюся одномерным центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заданной с помощью 2-коцикла (8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}'$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что два центральных расширения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие 2-коциклы отличаются на тривиальный коцикл, т. е. принадлежат одному классу когомологий [12].

Значение правоинвариантной 2-формы F на левоинвариантных векторных полях $\xi_\alpha = (L_x)_* e_\alpha$ и $\xi_\beta = (L_x)_* e_\beta$ равно

$$F(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \mathbf{F}((R_{x^{-1}})_*(L_x)_* e_\alpha, (R_{x^{-1}})_*(L_x)_* e_\beta) = \mathbf{F}(\text{Ad}_x e_\alpha, \text{Ad}_x e_\beta). \quad (20)$$

Имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{F}(\text{Ad}_x e_\alpha, \text{Ad}_x e_\beta) = \mathbf{F}(e_\alpha, e_\beta) + C_{\alpha\beta}^\gamma \theta_\gamma(x), \quad (21)$$

где $\theta_\alpha \in C^\infty(G)$ – некоторый набор функций на G . Действительно, инфинитезимальный аналог этого соотношения – формула (15), которая в силу связности группы G является также и достаточным условием для выполнения (21) (см. также [15], с. 175). Учитывая (20) и (21) и используя формулу (8), для разности 2-коциклов алгебр Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}'$ получаем

$$\Omega_{\alpha\beta} - \mathbf{F}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^\gamma (\theta_\gamma - \chi_\gamma).$$

Левая часть данного равенства является постоянной величиной, поэтому значение функции в правой части можно выбрать в любой точке, например в единице группы G . Отсюда непосредственно получаем, что $\Omega - \mathbf{F} \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

4. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Далее мы рассмотрим вопрос об интегрируемости уравнения КГФ во внешнем электромагнитном поле на группе G , а также приведем алгоритм построения его общего решения. При этом уравнение (3) мы будем называть *интегрируемым*, если нахождение его решения сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и вычислению квадратур.

Отметим, что оператор (18) по построению обладает алгеброй операторов симметрии вида (19). Вообще говоря, никаких других симметрий указанная задача не имеет, поэтому наиболее эффективным способом построения точных решений уравнения (3) является метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, основанный на методе орбит Кириллова [15], [16] и гармоническом анализе на группах Ли. К сожалению, объем журнальной статьи не позволит нам достаточно доказательно изложить все утверждения и теоремы данного метода, поэтому далее мы лишь напомним необходимые конструкции, адаптируя их к решению нашей задачи (подробности метода см. в работах [6], [7], [17]).

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ – одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построенное с помощью 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, $\tilde{G}$ – соответствующая связная односвязная группа

Ли. Далее мы будем отождествлять дуальное пространство $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ с прямой суммой $\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$.

Группа $\tilde{G}$ действует с помощью коприсоединенного представления в дуальном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, расслаивая последнее на орбиты коприсоединенного представления. На каждой орбите определена замкнутая инвариантная невырожденная 2-форма (форма Кириллова), наделяющая орбиту структурой симплектического многообразия. В частности, все орбиты коприсоединенного представления четномерны.

Обозначим через $\mathcal{O}_{\lambda, \epsilon}$ орбиту, проходящую через линейный функционал $\lambda \oplus \epsilon$, где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, а $\epsilon \in \mathbb{R}$ – заряд частиц скалярного поля. Если указанный элемент находится в общем положении, орбита $\mathcal{O}_{\lambda, \epsilon}$ называется *невырожденной* и ее размерность определяется как

$$\dim \mathcal{O}_{\lambda, \epsilon} = \dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}.$$

Здесь через $\text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}$ мы обозначаем *когомологический индекс алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ класса $[\mathbf{F}] \in \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, введенный в работе [14]:

$$\text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} \equiv \min_{\mathbf{F} \in [\mathbf{F}]} \dim(\ker \mathbf{F}).$$

Отметим, что для целей гармонического анализа следует рассматривать только невырожденные орбиты, поэтому далее мы ограничимся именно этим случаем.

Напомним, что для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется *поляризацией* линейного функционала $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, если она подчинена элементу λ и ее коразмерность равна половине размерности орбиты $\mathcal{O}_{\lambda} \subset \mathfrak{g}^*$:

$$\langle \lambda, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \rangle = 0, \quad \dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\lambda}.$$

В монографии [18] установлено, что для всякого функционала общего положения в пространстве $\mathfrak{g}^*$ поляризация существует.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{p}}$ поляризацию линейного функционала $\lambda \oplus \epsilon \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$. Имеет место включение $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathfrak{p}}$, поэтому произвольная поляризация в $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\epsilon} \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{p}^{\epsilon} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Можно показать, что $\mathfrak{p}^{\epsilon}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, являющаяся поляризацией функционала λ при $\epsilon = 0$.

Из результатов предыдущего раздела следует, что соответствие $e_{\alpha} \rightarrow -\eta_{\alpha}^{(\epsilon)}$ задает представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ в пространстве комплекснозначных функций на группе G . Здесь $\eta_{\alpha}^{(\epsilon)} = \eta_{\alpha} - i\epsilon \mathbf{A}_{\alpha}$, где η_{α} – правоинвариантное векторное поле, соответствующее базисному вектору e_{α} , а функции $\mathbf{A}_{\alpha}$ определяются уравнением (16). Продолжим указанное представление по линейности до представления комплексной оболочки $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ и определим функциональное подпространство $L(G, \mathfrak{p}^{\epsilon})$ решений системы

$$X^{\alpha}(\eta_{\alpha}^{(\epsilon)} - i\lambda_{\alpha})\varphi(g) = 0, \quad X^{\alpha}e_{\alpha} \in \mathfrak{p}^{\epsilon}.$$

Имеется локальный изоморфизм $\iota: L(G, \mathfrak{p}^{\epsilon}) \rightarrow L(Q, \mathfrak{p}^{\epsilon})$ (см. книгу [16], с. 224–226), где $L(Q, \mathfrak{p}^{\epsilon})$ – пространство комплекснозначных функций на смешанном многообразии¹⁾ Q , размерность которого равна половине размерности орбиты $\mathcal{O}_{\lambda, \epsilon}$. Так как

¹⁾ Пространство Q называется *смешанным* многообразием типа (k, l) , если оно локально изоморфно окрестности нуля в пространстве $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{C}^l$, причем соответствующие функции перехода являются бесконечно дифференцируемыми по вещественным координатам в $\mathbb{R}^k$ и голоморфными по комплексным координатам в $\mathbb{C}^l$.

$L(G, \mathfrak{p}^\epsilon)$ инвариантно относительно правых сдвигов, корректно определены линейные операторы ℓ_α , действующие в пространстве $L(Q, \mathfrak{p}^\epsilon)$:

$$\ell_\alpha = \iota \circ \xi_\alpha^{(\epsilon)} \circ \iota^{-1},$$

где $\xi_\alpha^{(\epsilon)}$ задаются равенством (19). Операторы ℓ_α реализуют неприводимое представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ в пространстве $L(Q, \mathfrak{p}^\epsilon)$, которое называется λ -представлением. В локальных координатах многообразия Q операторы λ -представления являются неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, зависящими от $\dim Q = (\dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathfrak{F}]} \mathfrak{g})/2$ независимых переменных.

Для дальнейших целей введем на смешанном многообразии Q меру $d\mu(q)$ и скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2)_Q \equiv \int_Q \overline{\psi_1(q)} \psi_2(q) d\mu(q), \quad (22)$$

относительно которого операторы λ -представления являются антиэрмитовыми²⁾: $\ell_\alpha^+ = -\ell_\alpha$.

Рассмотрим на группе Ли G семейство обобщенных функций $\mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} (\eta_\alpha^{(\epsilon)}(x) - \ell_\alpha(q, \lambda)) \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) &= 0, \\ (\xi_\alpha^{(\epsilon)}(x) + \overline{\ell_\alpha(q', \lambda)}) \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (19) следует равенство $\xi_\alpha^{(\epsilon)}(e) - \eta_\alpha^{(\epsilon)}(e) = i\epsilon\chi_\alpha(e)$. Используем произвол в выборе аддитивной постоянной в выражении (6) так, чтобы выполнялось условие $\chi_\alpha(e) = 0$. Тогда с учетом нормировки

$$\mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(e) = \delta(q, \bar{q}') \quad (24)$$

решение системы (23) находится однозначно. Здесь $\delta(q, \bar{q}')$ – дельта-функция на многообразии Q , определяемая относительно скалярного произведения (22).

Свойства ортогональности и полноты функций $\mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x)$

$$\int \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) \overline{\mathcal{D}_{\bar{q}, q'}^{\lambda, \epsilon}(x)} d\mu(x) = \delta(\lambda, \tilde{\lambda}) \delta(q, \bar{q}) \delta(q', \tilde{q}'), \quad (25)$$

$$\int \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) \overline{\mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(\tilde{x})} d\mu(\lambda) d\mu(q) d\mu(q') = \delta(x, \tilde{x}) \quad (26)$$

позволяют определить прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}') = \int \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) \varphi(x) d\mu(x), \quad (27)$$

$$\varphi(x) = \int \overline{\mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x)} \psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}') d\mu(\lambda) d\mu(q) d\mu(q'). \quad (28)$$

Ключевым для дальнейших рассуждений является тот факт, что после преобразования (27) действие операторов $\eta_\alpha^{(\epsilon)}$ и $\xi_\alpha^{(\epsilon)}$ переходит в действие соответствующих

²⁾Для этого необходимо в ℓ_α ввести соответствующий “квантовый сдвиг”: $\lambda \rightarrow \lambda + i\vartheta$, где $\vartheta \in \mathfrak{g}^*$ выбирается из условия вещественности спектра операторов Казимира в λ -представлении.

операторов λ -представления и наоборот:

$$\begin{aligned} \{\varphi(x) \Leftrightarrow \psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}')\} &\implies \\ &\implies \{\eta_{\alpha}^{(\epsilon)}\varphi(x) \Leftrightarrow \ell_{\alpha}(q, \lambda)\psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}'), \xi_{\alpha}^{(\epsilon)}\varphi(x) \Leftrightarrow \overline{\ell_{\alpha}(\bar{q}', \lambda)}\psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}')\}. \end{aligned}$$

Неоднородные операторы $\eta_{\alpha}^{(\epsilon)}$ и $\xi_{\alpha}^{(\epsilon)}$ зависят от $\dim \mathfrak{g}$ переменных, в то время как число переменных, входящих в операторы $\ell_{\alpha}(q, \lambda)$, равно $(\dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g})/2$. В частности, это позволяет использовать прямое и обратное преобразования Фурье (27) и (28) для редукции дифференциальных операторов, являющихся полиномиальными комбинациями операторов $\eta_{\alpha}^{(\epsilon)}$, к операторам с меньшим числом переменных.

Применим приведенную выше схему редукции к уравнению КГФ во внешнем электромагнитном поле с правоинвариантной 2-формой (14). Оператор $\hat{H}^{(\epsilon)}$ представляется выражением (18), поэтому уравнение (3) после редукции переходит в уравнение на неизвестную функцию $\psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}')$:

$$\mathbf{G}^{\alpha\beta}(\ell_{\alpha}(q, \lambda) + C_{\alpha})\ell_{\beta}(q, \lambda)\psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}') = -m^2\psi_{\lambda,\epsilon}(q, \bar{q}'). \quad (29)$$

Отметим, что переменные q' входят в данное уравнение как параметры.

Если мы сможем построить общее решение уравнения (29), то, используя квадратуру (28), мы получим общее решение уравнения (3). В частности, если $\dim Q = 1$, то (29) является обыкновенным дифференциальным уравнением, следовательно, уравнение (3) в этом случае интегрируемо. Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть электромагнитное поле на группе G задано с помощью правоинвариантной замкнутой 2-формы (14), отвечающей 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(G; \mathbb{R})$. Тогда уравнение (3) относительно произвольной правоинвариантной метрики на G редуцируется к уравнению (29) с $\dim Q = (\dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g})/2$ независимыми переменными. В частности, уравнение (3) интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}) \leq 1.$$

Для полупростых алгебр Ли справедлива вторая лемма Уайтхеда, согласно которой $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = 0$ (см., например, [13]). Это означает, что любой 2-коцикл $\mathbf{F}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является тривиальным. В работе [14] показано, что в этом случае $\text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = \text{ind } \mathfrak{g}$, т. е. кохомологический индекс совпадает с обычным индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда следует, что для полупростых групп Ли свойство интегрируемости свободного уравнения КГФ (1) “сохраняется” и при включении правоинвариантного электромагнитного поля. Очевидно, что данное свойство имеет место и в случае группы Ли с нулевой группой 2-кохомологий $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – полупростая группа Ли. Тогда уравнение (3) относительно произвольной правоинвариантной метрики во внешнем правоинвариантном электромагнитном поле интегрируемо, если интегрируемо свободное уравнение КГФ в отсутствие поля, т. е. в случае, когда

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}) \leq 1.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КГФ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ГРУППЕ $E(2) \times \mathbb{R}$

Проиллюстрируем изложенные выше результаты на конкретном примере. Рассмотрим четырехмерную связную группу Ли $G = E(2) \times \mathbb{R}$, где $E(2)$ – группа движений двумерной евклидовой плоскости. Алгебра Ли $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}(2) \oplus \mathbb{R}$ группы G определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1, \quad [e_\alpha, e_4] = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Здесь $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{e}(2)$ группы $E(2)$, $\{e_4\}$ – базис в одномерном центре $\mathbb{R} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{e}(2)$.

Алгебра $\mathfrak{g}$ допускает четырехмерное пространство 2-коциклов $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, произвольный элемент в котором можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \mu_1 e^1 \wedge e^2 + \mu_2 e^3 \wedge e^4 + \mu_3 e^1 \wedge e^3 + \mu_4 e^2 \wedge e^3, \quad (30)$$

где $\mu_a \in \mathbb{R}$, $\{e^\alpha\}$ – дуальный базис в пространстве $\mathfrak{g}^*$. Вложение подпространства тривиальных 2-коциклов $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ в пространство $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ задается с помощью равенств $\mu_1 = \mu_2 = 0$, следовательно, $\dim \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = 2$.

Введем в некоторой окрестности $V \subset G$ единицы группы локальные координаты 2-го рода: $g(x) = e^{x^1 e_1} e^{x^2 e_2} e^{x^3 e_3} e^{x^4 e_4}$ (за исключением $x^3 \in (-\pi, \pi)$, область действия каждой координаты есть все множество $\mathbb{R}$). В выбранных координатах лево- и правоинвариантные базисные векторные поля на группе G принимают вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos x^3 \partial_1 - \sin x^3 \partial_2, & \xi_2 &= \sin x^3 \partial_1 + \cos x^3 \partial_2, & \xi_3 &= \partial_3, & \xi_4 &= \partial_4, \\ \eta_1 &= \partial_1, & \eta_2 &= \partial_2, & \eta_3 &= x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + \partial_3, & \eta_4 &= \partial_4. \end{aligned} \quad (31)$$

Группа G унимодулярна, причем в качестве инвариантной меры на G можно выбрать меру

$$d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4.$$

Выпишем координатный вид правоинвариантной 2-формы F , отвечающей 2-коциклу (30):

$$F = \mu_1 dx^1 \wedge dx^2 + (\mu_1 x^1 + \mu_3) dx^1 \wedge dx^3 + (\mu_1 x^2 + \mu_4) dx^2 \wedge dx^3 + \mu_2 dx^3 \wedge dx^4. \quad (32)$$

Нетрудно проверить выполнение условий $dF = 0$ и $\mathcal{L}_{\xi_\alpha} F = 0$, где векторные поля ξ_α определены формулой (31).

Найдем векторный потенциал электромагнитного поля с 2-формой (32). Для этого рассмотрим одномерное центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbb{F}} \mathbb{R}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающее 2-коциклу (30). Пусть e_0 – базисный вектор в одномерном идеале $\mathbb{R}$. В этом случае коммутационные соотношения алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ в базисе $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ принимают вид

$$[e_1, e_2] = \mu_1 e_0, \quad [e_1, e_3] = e_2 + \mu_3 e_0, \quad [e_2, e_3] = -e_1 + \mu_4 e_0, \quad [e_3, e_4] = \mu_2 e_0.$$

Соответствующая связная односвязная группа Ли $\tilde{G}$ как топологическое пространство гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^5$, причем нетрудно видеть, что $G \simeq \tilde{G}/(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.

Над областью тривиализации $V \subset G$ расслоения $\tilde{G} \rightarrow G$ введем координаты прямого произведения $\{x^0\} \times \{x^i\}$, где x^0 – координата в одномерной подгруппе, соответствующей идеалу $\mathbb{R}$, а $\{x^i\}$ – координаты 2-го рода на G , заданные в области V . Правоинвариантные векторные поля $\tilde{\eta}_\alpha$ на группе $\tilde{G}$ в рассматриваемой координатной карте имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1 &= \eta_1, & \tilde{\eta}_2 &= \eta_2 - \mu_1 x^1 \partial_0, \\ \tilde{\eta}_3 &= \eta_3 + \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 ((x^1)^2 - (x^2)^2) - \mu_3 x^1 - \mu_4 x^2 \right\} \partial_0, & \tilde{\eta}_4 &= \eta_4 - \mu_2 x^3 \partial_0.\end{aligned}$$

Выбирая в качестве вещественного представления подгруппы $\mathbb{R}$ функцию $U = e^{x^0}$, с помощью формулы (17) немедленно получаем частное решение системы уравнений (16):

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 = \mu_1 x^1, \quad \mathbf{A}_3 = \mu_3 x^1 + \mu_4 x^2 + \frac{\mu_1}{2} ((x^2)^2 - (x^1)^2), \quad \mathbf{A}_4 = \mu_2 x^3. \quad (33)$$

Таким образом, векторный потенциал для электромагнитного поля, задаваемого 2-формой (32), может быть выбран в виде

$$A = \mu_1 x^1 dx^2 + \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 ((x^1)^2 + (x^2)^2) + \mu_3 x^1 + \mu_4 x^2 \right\} dx^3 + \mu_2 x^3 dx^4.$$

Непосредственно проверяется, что dA совпадает с 2-формой (32).

Перейдем к вопросу об интегрируемости уравнения (3) на группе Ли $G = E(2) \times \mathbb{R}$. Для произвольной правоинвариантной метрики дифференциальный оператор $\hat{H}^{(\epsilon)}$ является операторным полиномом второго порядка от $\eta_\alpha^{(\epsilon)}$, где функции $\mathbf{A}_\alpha$ определяются формулами (33). Из теоремы 1 и утверждения 5 следует, что $\hat{H}^{(\epsilon)}$ допускает алгебру операторов симметрии, изоморфную алгебре Ли $\hat{\mathfrak{g}} \simeq (\mathfrak{e}(2) \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$. Явный вид этих операторов легко получить, учитывая координатный вид левоинвариантных векторных полей (31) и формулы (6) и (19):

$$\begin{aligned}\xi_1^{(\epsilon)} &= \xi_1 - ie(\mu_1 x^2 \cos x^3 + \mu_3 \sin x^3 + \mu_4 \cos x^3), \\ \xi_2^{(\epsilon)} &= \xi_2 - ie(\mu_1 x^2 \sin x^3 - \mu_3 \cos x^3 + \mu_4 \sin x^3), \\ \xi_3^{(\epsilon)} &= \xi_3 - ie \mu_2 x^4, & \xi_4^{(\epsilon)} &= \xi_4.\end{aligned}$$

Когомологический индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в нашем случае равен

$$\text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = \begin{cases} 0, & \mu_1 \mu_2 \neq 0, \\ 2, & \mu_1 \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 2 уравнение КГФ в произвольном правоинвариантном электромагнитном поле на группе $E(2) \times \mathbb{R}$ интегрируемо, если параметры 2-коцикла (30) удовлетворяют условию $\mu_1 \mu_2 = 0$. Размерность орбит коприсоединенного представления в $\hat{\mathfrak{g}}^*$ в этом случае равна 2.

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда $\mu_1 \neq 0$. Тогда с точностью до действия автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 2-коцикл (30) можно положить равным

$\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2$, что соответствует равенствам $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Далее мы будем рассматривать именно этот случай.

Орбиты коприсоединенного представления в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ – это двумерные эллиптические параболоиды, являющиеся поверхностями уровня функций Казимира:

$$K_0 = f_0, \quad K_1 = f_1^2 + f_2^2 - 2f_0f_3, \quad K_2 = f_4.$$

Здесь $\{f_{\bar{\alpha}}\}$ – линейные координаты функционала $f \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ в базисе $\{e^{\bar{\alpha}}\}$, $\bar{\alpha} = 0, \dots, 4$. Введем параметризацию невырожденных орбит, считая, что каждая орбита в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ проходит через линейный функционал $\lambda(J) \oplus \epsilon$, где $\lambda(J) = J_1 e^3 + J_2 e^4$, $J \in \mathbb{R}^2$. Поляризация $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^\epsilon \oplus \mathbb{R}$ функционала $\lambda(J)$ является комплексной: $\mathfrak{p}^\epsilon = \{e_1 + ie_2, e_3\}$. Можно показать, что вещественных поляризаций для данного примера не существует (см. [18], с. 83).

Выпишем λ -представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, отвечающее выбранной поляризации:

$$\ell_1 = \partial_q, \quad \ell_2 = i(\partial_q + \epsilon q), \quad \ell_3 = i\left(q\partial_q + \frac{1}{2}\epsilon q^2 + J_1\right), \quad \ell_4 = iJ_2. \quad (34)$$

Вместо комплексной координаты q можно рассмотреть пару вещественных координат (a, b) , так что $q = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Операторы ℓ_α косоэрмитовы относительно меры

$$d\mu(q) = e^{\epsilon(q-\bar{q})^2/4} \frac{d\bar{q} \wedge dq}{2i} = e^{-\epsilon b^2} da db.$$

Дельта-функция на лагранжевом подмногообразии Q определяется выражением

$$\delta(q, \bar{q}') = \frac{\epsilon}{2\pi} e^{-\epsilon(q-\bar{q}')^2/4},$$

откуда, решая систему уравнений (23) с “начальным” условием (24), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q, \bar{q}'}^{\lambda, \epsilon}(x) = \frac{\epsilon}{2\pi} \exp \left[-\frac{\epsilon}{4} (\bar{q}'^2 - 2e^{ix^3} \bar{q}'(x^1 + ix^2 + q) + (x^1 - ix^2 + q)^2 + 2(x^2)^2) + \right. \\ \left. + iJ_1 x^3 + iJ_2 x^4 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что из условия однозначной определенности функции (35) на всем групповом многообразии следует, что вещественный параметр J_1 может принимать только дискретный ряд значений: $J_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (координата x^3 периодическая). Не вдаваясь в подробности, отметим, что данное условие представляет собой ограничение на выбор орбит в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ и называется *условием целочисленности орбит* [19].

Свойства ортогональности и полноты (25) и (26) для функции (35) проверяются непосредственно. Мера $d\mu(\lambda)$ для целочисленных орбит определяется выражением

$$\int (\cdot) d\mu(\lambda) = \frac{\epsilon}{(2\pi)^2} \sum_{J_1=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) dJ_2.$$

Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in L_2(G)$ мы можем согласно формулам (27) и (28) определить прямое и обратное обобщенные преобразования Фурье.

Для определенности рассмотрим на группе Ли правоинвариантную лоренцеву метрику, которая задана в единице группы с помощью диагональной матрицы $\mathbf{G} = \text{diag}(-\varepsilon^2, -1, -1, +1)$, $\varepsilon > 1$. По формуле (18) для оператора $\hat{H}^{(\epsilon)}$ в этом случае получим

$$\hat{H}^{(\epsilon)} = -\varepsilon^2 \partial_1^2 - (\partial_2 - i\epsilon x^1)^2 - \left(x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + \partial_3 - \frac{i\epsilon}{2} ((x^2)^2 - (x^1)^2) \right)^2 + \partial_4^2.$$

В соответствии с формулой (29) выпишем редуцированное уравнение КГФ во внешнем электромагнитном поле, используя явный вид λ -представления (34):

$$(1 - \epsilon + q^2) \frac{\partial^2 \psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}')}{\partial q^2} + q(1 + \epsilon(2 + q^2) + 2J_1) \frac{\partial \psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}')}{\partial q} + \left(\frac{\epsilon^2}{4} q^4 + \epsilon(1 + \epsilon + J_1) q^2 + J_1^2 - J_2^2 + \epsilon \right) \psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}') = -m^2 \psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}'). \quad (36)$$

Будем искать решение уравнения (36) в виде

$$\psi_{\lambda, \epsilon}(q, \bar{q}') = e^{-\epsilon^2 q^2 / 4} \vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}'), \quad (37)$$

где $\vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}')$ – некоторая функция от новой переменной $z = q^2/(\varepsilon^2 - 1)$. Введем ряд вспомогательных обозначений:

$$\gamma = J_1 - \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}(\varepsilon^2 + 1), \quad \delta = -\frac{\epsilon^2}{16}(\varepsilon^2 - 1)^2, \quad \eta = \frac{1}{4} \left(J_1^2 - J_2^2 + m^2 - J_1 + \frac{3}{2} \right). \quad (38)$$

Подставляя (37) в уравнение (36) и используя обозначения (38), получаем следующее уравнение на функцию $\vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}')$:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}')}{\partial z^2} + \frac{(3/2 + \gamma)z - 1/2}{z(z - 1)} \frac{\partial \vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}')}{\partial z} + \frac{\delta z - (\gamma - 1)/4 + \eta}{z(z - 1)} \vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}') = 0. \quad (39)$$

Общее решение уравнения (39) записывается в виде

$$\vartheta_{\lambda, \epsilon}(z; \bar{q}') = C_1(\bar{q}') \text{HeunC}\left(0, -\frac{1}{2}, \gamma, \delta, \eta, z\right) + C_2(\bar{q}') \sqrt{z} \text{HeunC}\left(0, \frac{1}{2}, \gamma, \delta, \eta, z\right),$$

где $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$ – решение *конфлюэнтного уравнения Гойна* [20]. Подставляя найденное выражение в формулу (37), получаем общее решение редуцированного уравнения (36).

В заключение отметим, что решение исходного уравнения КГФ во внешнем электромагнитном поле находится с помощью вычисления интеграла (28).

Список литературы

- [1] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, М., 1980.
- [2] Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, М., 1984.
- [3] Д. В. Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр*, Изд-во МГУ, М., 1986.

- [4] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), **39**, Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [5] V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman, I. V. Shirokov, *J. Math. Phys.*, **43**:5 (2002), 2284–2305, arXiv: hep-th/0110037.
- [6] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 195–213.
- [7] А. И. Бреев, И. В. Широков, А. А. Магазев, *ТМФ*, **167**:1 (2011), 78–95.
- [8] С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков, *Изв. вузов. Физика*, **45**:11 (2002), 3–10.
- [9] О. Л. Курнявко, И. В. Широков, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 237–249.
- [10] J. W. van Holten, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:2 (2007), 025027, 9 pp., arXiv: hep-th/0612216.
- [11] M. Visinescu, *Modern Phys. Lett. A*, **25**:5, 341–350, arXiv: 0910.3474.
- [12] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [13] М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1981.
- [14] А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 189–206.
- [15] А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит*, Научная книга (ИДМИ), Новосибирск, 2002.
- [16] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [17] М. М. Гончаровский, И. В. Широков, *ТМФ*, **161**:3 (2009), 332–345.
- [18] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [19] И. В. Широков, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 407–423.
- [20] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей*, УРСС, М., 2002.

Поступила в редакцию 15.12.2011,
после доработки 22.05.2012