Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Хабибуллин, Уравнение sin-Гордон на полуоси, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 115–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:36:56

© 1998 г.

И. Т. Хабибуллин*

УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОН НА ПОЛУОСИ

Исследуется уравнение sin-Гордон $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ на полуоси $x > 0$. Показано, что граничные условия вида $u_x(0, t) = c_1 \cos(u(0, t)/2) + c_2 \sin(u(0, t)/2)$ и вида $u(0, t) = c$ совместимы с преобразованием Бэклунда. Построены многосолитонные решения, удовлетворяющие этим граничным условиям.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется граничная задача на полуоси $x > 0$ для уравнения sin-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (1)$$

с условиями в точке $x = 0$ вида

$$u(x, t)|_{x=0} = c, \quad (2)$$

а также вида

$$u_x - c_1 \cos \frac{u}{2} - c_2 \sin \frac{u}{2} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где c , c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Граничные условия (2) и (3) тесно связаны друг с другом: если применить преобразование Бэклунда к решению $u = u(x, t)$ задачи (1), (2), то полученное решение (1) будет удовлетворять граничному условию (3) (см. ниже следствие предложения 3.1). И, наоборот, устремляя $c_1^2 + c_2^2$ к бесконечности, можно из (3) получить в пределе (2).

Задачи (1), (2) и (1), (3) замечательны как примеры интегрируемых граничных задач, в частности, они проходят симметричный тест на интегрируемость [1, 2]. С точки зрения приложений в физике эти задачи обсуждались, например, в работах [3–5]. В частном случае, когда хотя бы одно из чисел c_1 , c_2 равно нулю, задача (1), (3) с убывающими начальными условиями решена в работах [6–8]. Граничное условие (2), по-видимому, впервые появилось в [9].

В данной работе показано, что композиция двух преобразований Бэклунда уравнения sin-Гордон при подходящем подборе параметров преобразований переводит решение граничной задачи (1), (2) снова в решение. Следовательно, к граничной задаче можно

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

применить известную в теории солитонов хорошо разработанную методику одевания по Захарову–Шабату. В качестве приложения в работе методом одевания построены солитонные решения обеих задач, точнее говоря, явно указаны редукции (см. ниже теоремы 4.1 и 5.1), выделяющие из общего класса многосолитонных решений те, которые удовлетворяют граничным условиям (2) или (3). Альтернативный способ построения частных решений граничной задачи был предложен в [10].

Приводимый ниже вывод формулы (32) представляет интерес не только как иллюстрация предлагаемой здесь методики. Хотя сама формула и была получена ранее в [9], ее доказательство содержало логический пробел: функция (4.32) из статьи [9, с. 90] не является гладкой на всей оси, как утверждают авторы, а имеет особенность в точке $x = 0$.

Отметим, что конечномерные замыкания одевающей цепочки преобразований Бэклунда [11] также можно совместить с граничными условиями и тем самым строить другие классы решений граничной задачи. Однако этот вопрос в статье обсуждается лишь в общих чертах.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00128 и 96-15-96093.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ (1), (2)

Как известно [12], уравнение $\sin$ -Гордон является условием совместности системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_x = \frac{1}{4i} \left(u_t \sigma_3 + k_0 \sigma_1 \sin \frac{u}{2} + k_1 \sigma_2 \cos \frac{u}{2} \right) y, \quad (4)$$

$$y_t = \frac{1}{4i} \left(u_x \sigma_3 + k_1 \sigma_1 \sin \frac{u}{2} + k_0 \sigma_2 \cos \frac{u}{2} \right) y, \quad (5)$$

где $k_0 = \lambda + \lambda^{-1}$, $k_1 = \lambda - \lambda^{-1}$, λ – спектральный параметр, σ_i – i -я матрица Паули.

Полагая в уравнении (5) $x = 0$, $u = c$, приходим к следующей “граничной” спектральной задаче:

$$y_t = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} u_x & \lambda \exp(-ip) - \lambda^{-1} \exp(ip) \\ \lambda \exp(ip) - \lambda^{-1} \exp(-ip) & -u_x \end{pmatrix} y, \quad (6)$$

где $p = (\pi - c)/2$.

При помощи калибровочного преобразования $y = T\phi$, где

$$T = \begin{pmatrix} R & R \\ -S & S \end{pmatrix},$$

$$R = \sqrt{\lambda \exp(-ip) - \lambda^{-1} \exp(ip)}, \quad S = \sqrt{\lambda \exp(ip) - \lambda^{-1} \exp(-ip)},$$

систему уравнений (6) можно привести к известной системе Захарова–Шабата

$$\phi_t = \begin{pmatrix} -\xi & -\frac{i}{4}u_x \\ -\frac{i}{4}u_x & \xi \end{pmatrix} \phi, \quad (7)$$

где $\xi = \sqrt{\lambda^2 + 2 \cos c + \lambda^{-2}}/4i$.

Для описания солитонных и конечнозонных решений граничной задачи (1), (2) можно в принципе воспользоваться идеей работы [10]: задать конечнозонные анзацы $y = y(x, t, \lambda)$ и $\phi = \phi(\xi, t)$ для уравнений (4), (5) и (6), а затем из сравнения аналитических по λ свойств функций $y(0, t, \lambda)$ и $\phi = \phi(\xi, t)$ получить дополнительные ограничения на функцию $y(x, t, \lambda)$, обеспечивающие выполнение граничного условия. Однако ниже в данной работе при построении частных решений мы используем другие соображения.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В терминах преобразования Бэклунда совместимость граничного условия с высшими симметриями [2] означает, по-видимому, следующее. Существует некоторая композиция нескольких преобразований Бэклунда, переводящая решение граничной задачи в решение. Ниже мы проиллюстрируем этот факт на примере уравнения sin-Гордон, а затем используем его при построении солитонных решений граничных задач (1), (2) и (1), (3). Напомним, что преобразование Бэклунда, переводящее решение $u(x, t)$ уравнения sin-Гордон в некоторое другое решение $\bar{u}(x, t)$ этого же уравнения, определяется при помощи дифференциальных соотношений вида

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= u_t + a \sin \frac{\bar{u} + u}{2} + a^{-1} \sin \frac{\bar{u} - u}{2}, \\ \bar{u}_t &= u_x + a \sin \frac{\bar{u} + u}{2} - a^{-1} \sin \frac{\bar{u} - u}{2}.\end{aligned}\tag{8}$$

Решения $y(x, t)$ и $\bar{y}(x, t)$ линейной задачи (4), (5), соответствующие потенциалам $u(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$, удовлетворяют линейному условию связи

$$\bar{y}(x, t) = F(x, t, \lambda, a)y(x, t),\tag{9}$$

где

$$F(x, t, \lambda, a) = \exp\left(\frac{-i\sigma_3 u}{4}\right) \begin{pmatrix} \lambda & a \\ -a & \lambda \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\sigma_3 \bar{u}}{4}\right).\tag{10}$$

Взяв тривиальное решение и последовательно применяя к нему преобразование Бэклунда, можно получить широкий класс явных решений уравнения (1). В дальнейших рассуждениях ключевую роль будет играть следующее свойство этого преобразования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть решения v, u, w уравнения sin-Гордон связаны друг с другом преобразованием Бэклунда вида (8) так, что

$$u_x = v_t + a \sin \frac{u + v}{2} + a^{-1} \sin \frac{u - v}{2},\tag{11}$$

$$u_t = v_x + a \sin \frac{u + v}{2} - a^{-1} \sin \frac{u - v}{2},\tag{12}$$

$$w_x = u_t + b \sin \frac{w + u}{2} + b^{-1} \sin \frac{w - u}{2},\tag{13}$$

$$w_t = u_x + b \sin \frac{w + u}{2} - b^{-1} \sin \frac{w - u}{2},\tag{14}$$

где $b = -a^{-1}$, и пусть функция v удовлетворяет условию $v|_{x=0} = c$. Тогда из условия $w|_{x=0, t=0} = -c$ следует, что $w|_{x=0} = -c$ при всех t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если считать функцию $v(x, t)$ известной, то задача (11)–(14) вдоль прямой $x = 0$ представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с динамическими переменными u, w . Для построения $u(0, t)$ решаем уравнение (12). Затем, решая (14), из которого исключено u_x в силу (11), находим $w(0, t)$. Перепишем уравнения (12), (14) в виде

$$\begin{aligned} u_t &= v_x + 2 \operatorname{sh} \gamma \cos \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} + 2 \operatorname{ch} \gamma \sin \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}, \\ w_t &= v_t + 2 \operatorname{ch} \gamma \left(\cos \frac{v}{2} - \cos \frac{w}{2} \right) \sin \frac{u}{2} + 2 \operatorname{sh} \gamma \left(\sin \frac{v}{2} + \sin \frac{w}{2} \right) \cos \frac{u}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $2 \operatorname{sh} \gamma = a - a^{-1}$, $2 \operatorname{ch} \gamma = a + a^{-1}$. Ясно, что существует частное решение системы (11)–(14), удовлетворяющее условиям $w = -v$, $v_t = w_t = 0$ при $x = 0$. Заметим, что при наложении редукции $w = -v$, $v_t = w_t = 0$, $x = 0$ преобразование Бэклунда (11)–(14) сводится к преобразованию Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. Действительно, исключая u из равенств

$$\begin{aligned} (w_x - v_x)_t &= (v_x + w_x) \left(\operatorname{sh} \gamma \cos \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} - \operatorname{ch} \gamma \sin \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right), \\ w_x - v_x &= 4 \left(\operatorname{ch} \gamma \sin \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} + \operatorname{sh} \gamma \cos \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right), \end{aligned}$$

являющихся непосредственными следствиями равенств (11)–(14), находим

$$w_{xt} - v_{xt} = (v_x + w_x) \sqrt{D^2 - (w_x - v_x)^2 / 16}, \quad (16)$$

где $D^2 = \operatorname{sh}^2 \gamma + \sin^2(c/2)$. Этот факт вполне согласуется с формулами (22), (23) статьи [2].

СЛЕДСТВИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Решение $u = u(x, t)$ уравнения sin-Гордон из предложения 3.1 удовлетворяет при $x = 0$ следующему граничному условию:

$$u_x = c_1 \cos \frac{u}{2} + c_2 \sin \frac{u}{2}, \quad (17)$$

где $c_1 = (a - a^{-1}) \sin(c/2)$, $c_2 = (a + a^{-1}) \cos(c/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в уравнении (11) $v_t = 0$, $v = c$, находим

$$u_x = a \sin \frac{1}{2}(u + c) + a^{-1} \sin \frac{1}{2}(u - c).$$

Элементарными преобразованиями последнее равенство приводится к виду (17).

Из предложения 3.1 вытекает эффективный алгоритм построения частных решений граничной задачи (1), (2). Взяв в качестве исходного затравочного решения граничной задачи простейшее решение

$$v(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(e^x \operatorname{tg} \frac{c}{4} \right)$$

и применив к нему композицию преобразований Бэклунда вида (11)–(14), получим новое решение $w(x, t)$ уравнения sin-Гордон с граничным условием $w(0, t) = -c$. Повторяя этот прием многократно, находим многосолитонное решение граничной задачи.

4. ОДЕВАНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДУ ЗАХАРОВА–ШАБАТА

Отметим, что в предыдущем разделе речь шла об обычных солитонных решениях, удовлетворяющих дополнительным условиям связи, которые описаны в предложении 3.1 в терминах параметров преобразования Бэклунда. Введем эти дополнительные связи в виде условий на параметры солитонов или, точнее, в виде условий на спектр вспомогательной линейной задачи.

Напомним некоторые основные понятия метода обратной задачи рассеяния [12]. Считая, что функции $u(x, t)$, $u_t(x, t)$ являются гладкими и достаточно быстро выходят на свои предельные значения на бесконечности по x ($u_t(\infty, t) = 0$, $u(\infty, t)$ кратно 2π), определим матричные решения линейной задачи (4), предписывая им асимптотические условия следующего вида:

$$\begin{aligned} y_+(x, \lambda) &\rightarrow \exp(i\pi\sigma_3 m) E(x, \lambda), & x \rightarrow +\infty, \\ y_-(x, \lambda) &\rightarrow E(x, \lambda), & x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$E(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda - \lambda^{-1}}{4i} x \sigma_3\right)$$

для всех действительных λ ; здесь предполагается, что $u(-\infty) = 0$, а через m обозначено число $u(+\infty)/2\pi$. Отношение этих двух решений задачи (4) определяет матрицу рассеяния $s(\lambda) = y_+^{-1} y_-$. Элементы матрицы рассеяния удовлетворяют инволюциям

$$s_{22}(\lambda) = \bar{s}_{11}(\lambda) = s_{11}(-\lambda), \quad s_{12}(\lambda) = -\bar{s}_{21}(\lambda) = -s_{21}(-\lambda).$$

Функция s_{11} , так же как и столбцы y_-^1 , y_+^2 матриц y_- , y_+ , допускает аналитическое продолжение по λ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости. Соответственно функция s_{22} и остальные столбцы этих же матриц аналитически продолжаются в нижнюю полуплоскость $\text{Im } \lambda < 0$. В нулях η_j функции s_{11} , находящихся в области $\text{Im } \lambda > 0$, выполняются условия

$$y_-^1(x, \lambda_j) = \gamma_j y_+^2(x, \lambda_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

где $\gamma_j \neq 0$ – некоторые константы. Пусть $s_{11}(\lambda)$ не имеет нулей на прямой $\text{Im } \lambda = 0$ и имеет лишь простые нули в верхней полуплоскости. Тогда матрица рассеяния $s(\lambda)$ и полный набор коэффициентов γ_j однозначно определяют потенциал $u(x)$ уравнения (4) [12].

Системе линейных дифференциальных уравнений (4), (5) можно поставить в соответствие задачу Римана

$$\phi(x, t, \lambda) r(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda) \quad (19)$$

о сопряжении приведенной матрицы рассеяния

$$r(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & s_{12}(\lambda) \exp(-ik_1 x/2 - ik_0 t/2) \\ -s_{21}(\lambda) \exp(ik_1 x/2 + ik_0 t/2) & 1 \end{pmatrix},$$

где сопрягающие функции ϕ, ψ (решение задачи Римана) скомпонованы из столбцов матриц $y_{\pm}$:

$$\begin{aligned}\phi(x, t, \lambda) &= (y_{-}^1, y_{+}^2) e^{\frac{i}{4}(k_1 x + k_0 t) \sigma_3} \frac{1}{s_{11}(\lambda)}, \\ \psi(x, t, \lambda) &= (y_{+}^1, y_{-}^2) e^{\frac{i}{4}(k_1 x + k_0 t) \sigma_3},\end{aligned}$$

и мероморфны в областях $\text{Im } \lambda > 0$, $\text{Im } \lambda < 0$, соответственно. Условие сопряжения (19) предполагается выполненным на прямой $\text{Im } \lambda = 0$. Например, простейшему решению

$$v(x, t) = 4 \arctg \left(e^x \text{tg} \frac{c}{4} \right)$$

соответствует функция

$$\psi_0(x, t, \lambda) = \phi_0(x, t, \lambda) = e^{\frac{i}{4} v \sigma_3} E \left(1 + \frac{2i}{\lambda - i} P \right), \quad (20)$$

где матрица P является проектором, E — постоянная матрица,

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{1 + \gamma(x, t)^2} \begin{pmatrix} \gamma(x, t)^2 & \gamma(x, t) \\ \gamma(x, t) & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \\ \gamma(x, t) &= e^{-x} \gamma(0, 0), \quad \gamma(0, t) = \gamma(0, 0) = -\text{ctg} \frac{c}{4}.\end{aligned}$$

Сквозному отображению $v \rightarrow u \rightarrow w$ из предложения 3.1 соответствует, очевидно, произведение двух множителей вида (10)

$$F_1(x, t, \lambda) = e^{-\frac{i}{4} \sigma_3 u} \begin{pmatrix} \lambda & b \\ -b & \lambda \end{pmatrix} e^{\frac{i}{4} \sigma_3 (w-v)} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ -a & \lambda \end{pmatrix} e^{\frac{i}{4} \sigma_3 v} \quad (21)$$

такое, что выполнены равенства $v(x=0) = -w(x=0) = c$. Предположим, что при преобразовании Бэклунда (11)–(14) в дискретный спектр линейной задачи (4) добавляются два новых собственных значения, точнее говоря, если $s(\lambda), \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_N$ — данные рассеяния исходного потенциала $v(x, t)$, то

$$\tilde{s}(\lambda) = \text{diag} \left(\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)}, 1 \right) s(\lambda) \text{diag} \left(1, \frac{(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \right),$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_N$ — данные рассеяния нового потенциала $\omega(x, t)$. Здесь $\text{diag}(X, Y)$ обозначает диагональную матрицу с диагональю X, Y . Выясним, как связаны между собой параметры $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1$ и γ_2 . Очевидно, что числа λ_1, λ_2 должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия $\text{Im } \lambda_1 > 0$, $\text{Im } \lambda_2 > 0$, $\lambda_1^2 = -a^2$, $\lambda_2^2 = -b^2$. Имея в виду, что $b = -1/a$, находим $\lambda_2^2 = 1/\lambda_1^2$. Поэтому $\lambda_1 = ia \text{sign}(\text{Re } a)$, $\lambda_2 = (i/a) \text{sign}(\text{Re } a)$,

где sign обозначает функцию знака. Остается найти связь между параметрами γ_1 и γ_2 . Представим сначала полином (21) при $x = 0$ в виде

$$F_1(0, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & b_- \\ -b_+ & \lambda \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 c} \begin{pmatrix} \lambda & a_- \\ -a_+ & \lambda \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $b_{\pm} = e^{\pm(i/2)u}b$, $a_{\pm} = e^{\pm(i/2)u}a$. Затем легко можно убедиться, что матрица $F_1(0, t, \lambda)$ отличается от матрицы

$$\tilde{F}_1 = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 c} \left(1 + \frac{\lambda_2 - \bar{\lambda}_2}{\lambda - \lambda_2} P_2 \right) \left(1 + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda - \lambda_1} P_1 \right) \quad (23)$$

с $P_2 = e^{(i/2)\sigma_3 c} \sigma_3 P_1 \sigma_3 e^{-(i/2)\sigma_3 c}$,

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & e^{-\frac{i}{2}u} \frac{a}{2\lambda_1} \\ -e^{\frac{i}{2}u} \frac{\bar{a}}{2\lambda_1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

лишь скалярным множителем $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.

Преобразование

$$\tilde{y}(x, t, \lambda) = \tilde{F}_1 y(x, t, \lambda) \quad (24)$$

предпочтительнее, чем (9), оно не просто переводит решение одной линейной системы (4), (5) в решение другой линейной системы, оно также переводит решение задачи Римана вида (19) в решение той же задачи Римана:

$$\tilde{\phi}(x, t, \lambda) = \tilde{F}_1 \phi(x, t, \lambda), \quad \tilde{\psi}(x, t, \lambda) = \tilde{F}_1 \psi(x, t, \lambda) \quad (25)$$

но с бóльшим числом нулей.

Из формулы (23) следует, что элементы p_{12} и p'_{12} матриц P_1 и P_2 связаны равенством $p'_{12} = -p_{12}e^{ic}$. Выразим p_{12} и p'_{12} через коэффициенты пропорциональности γ_1 и γ_2 , а затем исключим из полученных равенств p_{12} и p'_{12} . Из условий $\tilde{y}^1_-(\lambda_1) = \gamma_1 \tilde{y}^2_+(\lambda_1)$ и $\tilde{\phi} = \tilde{F}_1 \phi$ легко получить, что при $x = 0$ параметры γ_1 и p_{12} связаны дробно-линейным преобразованием

$$\gamma_1 = \frac{\phi_{11}(\lambda_1) + 2p_{12}\phi_{21}(\lambda_1)}{\phi_{12}(\lambda_1) + 2p_{12}\phi_{22}(\lambda_1)}, \quad (26)$$

где $\phi_{ij}(\lambda)$ – элементы матрицы $\phi(\lambda)$. Аналогичная формула для точки $\lambda = \lambda_2$ имеет вид

$$\gamma_2 = \frac{\phi'_{11}(\lambda_2) + 2p'_{12}\phi'_{21}(\lambda_2)}{\phi'_{12}(\lambda_2) + 2p'_{12}\phi'_{22}(\lambda_2)} \quad (27)$$

и задается через элементы $\phi'_{ij}(\lambda)$ матрицы

$$\left(1 + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda - \lambda_1} P_1 \right) \phi(\lambda).$$

Если теперь выразить числа $\phi'_{ij}(\lambda_2)$ явно в терминах P_1 и $\phi(\lambda_2)$, то с учетом равенства $p'_{12} = -p_{12}e^{ic}$ формула (27) преобразуется к виду

$$\gamma_2 = \frac{\varepsilon_1(\lambda_1)\phi_{11}(\lambda_2) + p_{12}\varepsilon_2(\lambda_1)\phi_{21}(\lambda_2)}{\varepsilon_1(\lambda_1)\phi_{12}(\lambda_2) + p_{12}\varepsilon_2(\lambda_1)\phi_{22}(\lambda_2)}, \quad (28)$$

где $\varepsilon_1(\lambda_1) = -\lambda_1 e^{ic} - \lambda_1^{-1}$, $\varepsilon_2(\lambda_1) = \lambda_1 + \lambda_1^{-1}e^{ic}$. Исключив переменную p_{12} из двух дробно-линейных выражений (26) и (28), находим связь между γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_2(0, t) = \frac{g_{21} - \gamma_1(0, t)g_{22}}{-g_{11} + \gamma_1(0, t)g_{12}}, \quad (29)$$

где g_{ij} — элементы матрицы

$$G(\lambda_1) = \phi^{-1}(\lambda_2)\varepsilon(\lambda_1)\phi(\lambda_1), \quad \varepsilon(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \varepsilon_2(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon_1(\lambda_1) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

В наиболее простом случае, когда $v(x, t) = 4 \arctg(e^x \operatorname{tg}(c/4))$, а функция $\phi(\lambda) = \phi_0(\lambda)$ определена равенством (20), коэффициенты дробно-линейного преобразования (29) легко вычисляются явно:

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_1^{-1} - 2i \cos \frac{c}{2}}{(\lambda_1 - \lambda_1^{-1} + 2i \cos \frac{c}{2})\gamma_1}. \quad (31)$$

В нижеследующей теореме мы покажем, что и в общем случае между соответствующими значениями параметра γ имеет место точно такая же формула (см. также [9]).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $w(x, t)$ — многосолитонное решение уравнения $\sin$ -Гордона со спектром, состоящим из нечетного числа несовпадающих собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2N}$, где $\lambda_0 = i$, $\lambda_2 = -\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{2N} = -\lambda_{2N-1}^{-1}$. Пусть коэффициенты пропорциональности γ_j удовлетворяют условиям $\gamma_0 = -\operatorname{ctg}(c/4)$,

$$\gamma_{2j} = \frac{\lambda_{2j} - \lambda_{2j}^{-1} - 2i \cos \frac{c}{2}}{(\lambda_{2j} - \lambda_{2j}^{-1} + 2i \cos \frac{c}{2})\gamma_{2j-1}}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Тогда вдоль прямой $x = 0$ выполняется граничное условие $w(0, t) = (-1)^N c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию $w(x, t)$ будем строить путем одевания по методу Захарова–Шабата. В качестве затравочного решения возьмем простейшее решение $u_0(x, t) = 4 \arctg(e^x \operatorname{tg}(c/4))$ и применим к нему последовательно N раз двойное одевальное преобразование (24):

$$\phi_{k+1}(x, t, \lambda) = \tilde{F}_k \phi_k(x, t, \lambda). \quad (33)$$

Здесь при переходе от линейной задачи с номером k к линейной задаче с номером $k+1$ в дискретный спектр добавляется пара собственных значений λ_{2k-1} и $\lambda_{2k} = -\lambda_{2k-1}^{-1}$. На каждом шаге итерации вычисляется своя матрица G (см. (30)):

$$G_k(\lambda_{2k-1}) = \phi_k^{-1}(\lambda_{2k})\varepsilon(\lambda_{2k-1})\phi_k(\lambda_{2k-1}). \quad (34)$$

Поскольку формула (29) верна в общем случае, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что вид функции $G(\lambda)$ не зависит от номера итерации. Найдем связь между G_k и G_{k-1} . Очевидно, что в силу (33) имеем

$$G_k(\lambda_{2k-1}) = \phi_{k-1}^{-1}(\lambda_{2k})\tilde{\varepsilon}(\lambda_{2k-1})\phi_k(\lambda_{2k-1}),$$

где $\tilde{\varepsilon}(\lambda_{2k-1}) = \tilde{F}_{k-1}^{-1}(\lambda_{2k})\varepsilon(\lambda_{2k-1})\tilde{F}_{k-1}(\lambda_{2k-1})$. Перемножением матриц нетрудно проверить, что $\tilde{\varepsilon}(\lambda_{2k-1})$ совпадает с $\varepsilon(\lambda_{2k-1})$ с точностью до скалярного множителя. Отсюда ясно, что матрицы $G_k(\lambda_{2k-1})$ и $G_{k-1}(\lambda_{2k-1})$, а следовательно, и матрицы $G_k(\lambda_{2k-1})$ и $G_0(\lambda_{2k-1})$ могут отличаться лишь скалярным множителем, иначе говоря, они определяют одно и то же дробно-линейное преобразование вида (32).

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ 4.1. Напомним, что дискретный спектр солитонного решения уравнения sin-Гордон всегда таков, что для каждого собственного числа λ_k число $\lambda_j = -\bar{\lambda}_k$ также является собственным [12]. Причем коэффициенты пропорциональности γ_k и γ_j , соответствующие этим собственным значениям, должны быть взаимно сопряжены: $\gamma_j = \bar{\gamma}_k$. Если при этом $\lambda_j = -\bar{\lambda}_j$, то $\gamma_j = \bar{\gamma}_j$.

Кроме построения многосолитонных решений, есть и другие приложения одевающих цепочек. Например, периодически замкнутая цепочка описывает конечнозонные и изомонодромные решения соответствующего нелинейного уравнения [11]. Рассмотрим одевающую цепочку, порожденную преобразованием Бэклунда (8):

$$\begin{aligned} u_{k+1,x} &= u_{k,t} + a_k \sin \frac{u_{k+1} + u_k}{2} + a_k^{-1} \sin \frac{u_{k+1} - u_k}{2}, \\ u_{k+1,t} &= u_{k,t} + a_k \sin \frac{u_{k+1} + u_k}{2} - a_k^{-1} \sin \frac{u_{k+1} - u_k}{2}, \end{aligned} \quad (35)$$

здесь $u_k = u_k(x, t)$ – решения уравнения sin-Гордон. Возьмем произвольное звено цепочки $u_k \rightarrow u_{k+1} \rightarrow u_{k+2}$ и применим к этому звену предложение 3.1, полагая $v = u_k$, $u = u_{k+1}$, $w = u_{k+2}$, $a = a_k$, $b = a_{k+1}$. В результате формула (15) примет вид

$$\begin{aligned} u_{k+1,t} &= u_{k,x} + (a_k - a_k^{-1}) \cos \frac{u_k}{2} \sin \frac{u_{k+1}}{2} + (a_k + a_k^{-1}) \sin \frac{u_k}{2} \cos \frac{u_{k+1}}{2}, \\ u_{k+2,t} &= u_{k,t} + (a_k - a_k^{-1}) \left(\cos \frac{u_k}{2} - \cos \frac{u_{k+2}}{2} \right) \sin \frac{u_{k+1}}{2} + \\ &+ (a_k - a_k^{-1}) \left(\sin \frac{u_k}{2} + \sin \frac{u_{k+2}}{2} \right) \cos \frac{u_{k+1}}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда ясно, что вдоль прямой $x = 0$ цепочка (35) допускает редукцию: для любого четного $k = 2m$ имеем

$$u_{k+2} = -u_k, \quad u_{k,t} = 0, \quad a_{2k+1} = -a_{2k}^{-1}. \quad (37)$$

При этом $u_{2m} = (-1)^m \text{const}$, когда $x = 0$. Сама цепочка (35) сводится к одевающей цепочке для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_{k+2,xt} - u_{k,xt} = (u_{k,x} + u_{k,x}) \sqrt{D_k^2 - (u_{k+2,x} - u_{k,x})^2 / 16}, \quad (38)$$

где

$$D_k^2 = \left(\frac{a_{2k} - a_{2k}^{-1}}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{c}{2}.$$

Наложим на одевающую цепочку (35) квазипериодическое условие замыкания $u_k(x, t) = \delta u_{k+N}(x, t)$, где $\delta = \pm 1$. Требуя, чтобы полученная конечномерная цепочка также допускала редукцию (37), находим, что $N = 2M$ и $\delta = (-1)^M$. Однако для того чтобы получившаяся система уравнений была разрешима относительно производных, необходимо и достаточно, чтобы число M было нечетным. Поэтому $\delta = -1$, $N = 4K + 2$.

Нетрудно проверить, что наиболее простое замыкающее условие $u_k = u_{k+2}$ приводит к стационарному решению задачи (1), (2) $u_{xx} = \sin u$, $u|_{x=0} = c$. Следующее допустимое значение M равно 3: $u_k = -u_{k+6}$. Это замыкание сводит цепочку к переопределенной системе, состоящей из двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с шестью неизвестными, интегрирование которой выходит за рамки данной статьи.

5. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ (1), (3)

Выше мы доказали (см. следствие предложения 3.1), что преобразование Бэклунда переводит решение граничной задачи (1), (2) в решение граничной задачи (1), (3). Поэтому решения с нечетными номерами в цепочке (36), (37) удовлетворяют граничному условию вида (3). Соединяя теорему 4.1 и следствие предложения 3.1, получаем описание класса солитонных решений граничной задачи (1), (3).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $u(x, t)$ – многосолитонное решение уравнения $\sin$ -Гордона со спектром, состоящим из четного числа несовпадающих собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2N+1}$, где $\lambda_0 = i$, $\lambda_2 = -\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{2N} = -\lambda_{2N-1}^{-1}$, а последнее собственное число является чисто мнимым: $\lambda_{2N+1} = -\bar{\lambda}_{2N+1}$. Пусть также коэффициенты пропорциональности γ_j удовлетворяют условиям $\gamma_0 = -\operatorname{ctg}(c/4)$ и

$$\gamma_{2j} = \frac{\lambda_{2j} - \lambda_{2j}^{-1} - 2i \cos \frac{c}{2}}{(\lambda_{2j} - \lambda_{2j}^{-1} + 2i \cos \frac{c}{2}) \gamma_{2j-1}}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Тогда вдоль прямой $x = 0$ решение $u(x, t)$ удовлетворяет граничному условию (17), где параметр a и собственное число λ_{2N+1} связаны равенством $\lambda_{2N+1} = i|a|$.

Список литературы

- [1] *I. T. Habibullin*. Nonlinear Math. Phys. 1996. V. 3. № 1–2. P. 147–151.
- [2] *V. Adler, B. Gürel, V. Gürses, I. Habibullin*. J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 3505–3513.
- [3] *S. Ghoshal, A. B. Zamolodchikov*. Boundary state and boundary S -matrix two-dimensional integrable field theory. RU-93-20, hep-th/9306002.
- [4] *E. Corrigan, P. E. Dorey, R. H. Rietdijk, R. Sasaki*. Affine Toda field theory on a half-line. Hep-th/9404108.
- [5] *H. Saleur, S. Skorik, N. P. Warner*. The boundary sine-Gordon theory. USC-94-013, hep-th/9408004.
- [6] *Е. К. Склянин*. Функци. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 2. С. 86–87.
- [7] *И. Т. Хабибуллин*. ТМФ. 1991. Т. 86. № 1. С. 43–52.
- [8] *V. O. Tarasov*. Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 435–449.
- [9] *Р. Ф. Бикбаев, В. О. Тарасов*. Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 4. С. 78–92.
- [10] *В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат*. ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 98–113.
- [11] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат*. Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [12] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 11.VIII.1997 г.