Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Картак, Решение проблемы эквивалентности
для уравнения Пенлеве IV, *ТМФ*, 2012, том 173, но-
мер 2, 245–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 09:45:09

© 2012 г.

В. В. Картак^{*†}

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ IV

Решена проблема эквивалентности для уравнения Пенлеве IV. В терминах инвариантов точечных преобразований сформулированы необходимые и достаточные условия эквивалентности произвольного дифференциального уравнения второго порядка уравнению Пенлеве IV. Раздельно рассмотрены три неэквивалентных друг другу случая: когда равны нулю оба параметра уравнения, $a = b = 0$; равен нулю только один параметр, $b = 0$; параметр $b \neq 0$. Во всех случаях приведена явная точечная замена, переводящая уравнение, удовлетворяющее приведенному тесту, в уравнение Пенлеве IV, а также выражения для параметров уравнения через инварианты.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, точечное преобразование, проблема эквивалентности, инвариант.

1. ВВЕДЕНИЕ

В начале XX в. Пенлеве и другие исследовали обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида

$$y'' = R(y'; x, y),$$

где функция R – рациональная по y' и аналитическая от x . Их целью было найти все уравнения, решения которых не имеют критических подвижных особых точек, т. е. обладают *свойством Пенлеве*. Им удалось полностью решить поставленную задачу и найти 50 уравнений, шесть из которых являлись принципиально новыми (они не допускали понижения порядка, и их решения определяли новые специальные функции). Эти уравнения в настоящее время носят название *уравнений Пенлеве* (уравнений PI–PVI) [1], [2]:

$$\text{PI} : y'' = 6y^2 + x;$$

$$\text{PII}(a) : y'' = 2y^3 + xy + a;$$

$$\text{PIII}(a, b, c, d) : y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(ay^2 + b) + cy^3 + \frac{d}{y};$$

---

^{*}Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: kvera@mail.ru

[†]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

$$\text{PIV}(a, b) : \quad y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y};$$

$$\begin{aligned} \text{PV}(a, b, c, d) : \quad y'' = & \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{1}{x}y' + \\ & + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(ay + \frac{b}{y} \right) + \frac{c}{x}y + d \frac{y(y+1)}{y-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PVI}(a, b, c, d) : \quad y'' = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \\ & + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right). \end{aligned}$$

Уравнения PIII, PV и PVI зависят от четырех комплексных параметров a , b , c и d , уравнение PIV – от двух параметров a и b , уравнение PII зависит от параметра a , а PI от параметров не зависит.

В конце XX в. выяснилось, что уравнения Пенлеве возникают при сведении к обыкновенным дифференциальным уравнениям некоторых нелинейных уравнений математической физики, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [3], [4]. В частности, уравнение PIV возникает при редукции нелинейного уравнения Шредингера.

Все шесть уравнений Пенлеве принадлежат к классу уравнений

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3, \quad (1)$$

замкнутому относительно точечных преобразований общего вида

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y). \quad (2)$$

Это означает, что для любого уравнения из класса (1) преобразованное уравнение также будет принадлежать классу (1).

Если два уравнения вида (1) переводятся друг в друга точечной заменой переменных (2), то говорят, что они *эквивалентны относительно точечной замены переменных*. Решить *проблему эквивалентности* для некоторого заданного уравнения значит описать класс всех эквивалентных ему уравнений.

Исследованию проблемы эквивалентности для уравнений Пенлеве посвящены статьи [5], [6]. В работе [7] она была решена для всех уравнений Пенлеве, однако не в эффективной форме: для проверки эквивалентности заданное уравнение вида (1) должно предварительно быть записано в изначальном виде

$$y'' = P(x, y).$$

Хорошо известно, что все шесть уравнений Пенлеве допускают такое представление.

В более удобной для проверки форме проблема эквивалентности была до сих пор решена только для уравнений PI, PII, которые имеют наиболее простой вид [8]–[10]. В работах [8] и [10] представлена явная точечная замена. В работе [10] найдено также выражение параметра a уравнения PII через инварианты. В работе [11] проблема эквивалентности решена для частного случая уравнения PIII (когда три из четырех параметров нулевые).

Основным подходом к решению проблемы эквивалентности является метод построения инвариантов Картана (см. серию работ [12]–[22]).

В следующем разделе приведена процедура предварительной классификации уравнений (1) и построение инвариантов согласно работам [20]–[22].

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ (1) И ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ

Замена переменных (2) есть переход от одних криволинейных координат на плоскости к другим, тогда прямая и обратная матрицы перехода имеют вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Псевдотензорным полем веса m типа (r, s) называется поле, компоненты которого при замене переменных (2) преобразуются следующим образом:

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (\det T)^m \sum_{p_1, \dots, p_r} \sum_{q_1, \dots, q_s} S_{p_1}^{i_1} \dots S_{p_r}^{i_r} T_{j_1}^{q_1} \dots T_{j_s}^{q_s} \tilde{F}_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r},$$

где S_p^i и T_j^q – компоненты прямой и обратной матриц перехода. От определения классического тензорного поля псевдотензорное отличается только весовым множителем $(\det T)^m$ [20].

ШАГ 1. Из функций P , Q , R и S , находящихся в правой части уравнения (1), организуем трехиндексный массив по правилу

$$\begin{aligned} \Theta_{111} &= P, & \Theta_{121} &= \Theta_{211} = \Theta_{112} = Q, \\ \Theta_{222} &= S, & \Theta_{122} &= \Theta_{212} = \Theta_{221} = R. \end{aligned}$$

Для подъема и опускания индексов возьмем следующую пару матриц:

$$d^{ij} = d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что d^{ij} суть компоненты псевдотензорного поля веса 1, а d_{ij} – компоненты псевдотензорного поля веса -1 .

Для этого обозначим $x_{i,j} = \partial^{i+j} x / \partial \tilde{x}^i \partial \tilde{y}^j$, $y_{i,j} = \partial^{i+j} y / \partial \tilde{x}^i \partial \tilde{y}^j$. Тогда в новых обозначениях прямая и обратная матрицы перехода выглядят как

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{0,1} \\ y_{1,0} & y_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} y_{0,1} & -x_{0,1} \\ -y_{1,0} & x_{1,0} \end{pmatrix}, \quad \det T = \frac{1}{\det S}.$$

Правило преобразования для $\tilde{d}^{kq}$ таково: $\tilde{d}^{kq} = (\det T)^{-m} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 T_i^k T_j^q d^{ij}$, или

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{d}^{11} & \tilde{d}^{12} \\ \tilde{d}^{21} & \tilde{d}^{22} \end{pmatrix} &= (\det T)^{2-m} \begin{pmatrix} y_{0,1} & -x_{0,1} \\ -y_{1,0} & x_{1,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{0,1} & -x_{0,1} \\ -y_{1,0} & x_{1,0} \end{pmatrix}^T = \\ &= (\det T)^{2-m} \begin{pmatrix} 0 & \det S \\ -\det S & 0 \end{pmatrix} = (\det T)^{1-m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значит, определение корректно при $m = 1$.

Для $\tilde{d}_{kq}$ аналогично: $\tilde{d}_{kq} = (\det T)^{-m} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 S_k^i S_q^j d_{ij}$, или

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} \end{pmatrix} = (\det T)^{-m} \begin{pmatrix} x_{1.0} & x_{0.1} \\ y_{1.0} & y_{0.1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1.0} & x_{0.1} \\ y_{1.0} & y_{0.1} \end{pmatrix}^T = \\ = \det T^{-m} \begin{pmatrix} 0 & \det S \\ -\det S & 0 \end{pmatrix} = (\det T)^{-1-m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, определение корректно при $m = -1$.

ШАГ 2. Для Θ_{rij} поднимем первый индекс, используя матрицу d^{kr} :

$$\Theta_{ij}^k = \sum_{r=1}^2 d^{kr} \Theta_{rij}. \quad (3)$$

Под действием замены переменных (2) набор Θ_{ij}^k преобразуется “почти” как компоненты аффинной связности (подробнее см. работу [20]):

$$\Theta_{ij}^k = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Theta}_{pq}^m + \sum_{m=1}^2 S_m^k \frac{\partial T_i^m}{\partial x^j} - \frac{\tilde{\sigma}_i \delta_j^k + \tilde{\sigma}_j \delta_i^k}{3}, \quad (4)$$

где $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\tilde{x}^1 = \tilde{x}$, $\tilde{x}^2 = \tilde{y}$, а новые величины $\tilde{\sigma}_i$ равны

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\partial \ln \det T}{\partial x^i}, \quad \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Доказательство последней формулы производится непосредственными вычислениями. При замене переменных (2) функции P , Q , R , S уравнения (1) преобразуются по правилам

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{-3Qy_{0.1}x_{0.1}^2 - 3Ry_{0.1}^2x_{0.1} + y_{0.2}x_{0.1} - y_{0.1}x_{0.2} - Sy_{0.1}^3 - Px_{0.1}^3}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}}, \\ \tilde{R} &= \frac{1}{3} \frac{-3Ry_{0.1}^2x_{1.0} - 3Qy_{1.0}x_{0.1}^2 + 2y_{1.1}x_{0.1} - 3Px_{1.0}x_{0.1}^2 - 2y_{0.1}x_{1.1}}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}} - \\ &\quad - \frac{6Qy_{0.1}x_{1.0}x_{0.1} - 3Sy_{1.0}y_{0.1}^2 - y_{1.0}x_{0.2} + y_{0.2}x_{1.0} - 6Ry_{1.0}y_{0.1}x_{0.1}}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}}, \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{3} \frac{2y_{1.1}x_{1.0} - 3Ry_{1.0}^2x_{0.1} + y_{2.0}x_{0.1} - 2y_{1.0}x_{1.1} - 3Qy_{0.1}x_{1.0}^2 - y_{0.1}x_{2.0}}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}} - \\ &\quad - \frac{3Sy_{1.0}^2y_{0.1} - 6Ry_{1.0}y_{0.1}x_{1.0} - 3Px_{1.0}^2x_{0.1} - 6Qy_{1.0}x_{1.0}x_{0.1}}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}}, \\ \tilde{P} &= \frac{y_{2.0}x_{1.0} - Sy_{1.0}^3 - 3Ry_{1.0}^2x_{1.0} - y_{1.0}x_{2.0} - Px_{1.0}^3 - 3Qy_{1.0}x_{1.0}^2}{-y_{0.1}x_{1.0} + x_{0.1}y_{1.0}}. \end{aligned}$$

Тогда мы легко можем получить правила преобразования величин Θ_{pq}^m , где

$$\begin{aligned} \Theta_{11}^1 &= Q, & \Theta_{12}^1 &= \Theta_{21}^1 = R, & \Theta_{22}^1 &= S, \\ \Theta_{11}^2 &= -P, & \Theta_{12}^2 &= \Theta_{21}^2 = -Q, & \Theta_{22}^2 &= -R. \end{aligned}$$

Остается только заметить, что они удовлетворяют формуле (4).

ШАГ 3. Используя Θ_{ij}^k в качестве аффинной связности, образуем при помощи нее “формальный тензор кривизны”:

$$\Omega_{rij}^k = \frac{\partial \Theta_{jr}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Theta_{ir}^k}{\partial x^j} + \sum_{q=1}^2 \Theta_{iq}^k \Theta_{jr}^q - \sum_{q=1}^2 \Theta_{jq}^k \Theta_{ir}^q, \quad (5)$$

где $x^1 = x$, $x^2 = y$. Этот объект не является тензором [20]. Формула для преобразования его компонент, полученная с использованием выражения (4), выглядит так:

$$\Omega_{rij}^k = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 S_m^k T_r^n T_i^p T_j^q \tilde{\Omega}_{npq}^m - \frac{\tilde{\sigma}_{ir} \delta_j^k - \tilde{\sigma}_{jr} \delta_i^k}{3}, \quad (6)$$

где новые величины $\tilde{\sigma}_{ij}$ равны

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_j}{\partial x^i} - \sum_{q=1}^2 \Theta_{ij}^q \tilde{\sigma}_q - \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j. \quad (7)$$

Сверткой получим “формальный тензор Риччи” $\Omega_{rj} = \sum_{k=1}^2 \Omega_{rkj}^k$. Это тоже не тензор, правило преобразования для его компонент выглядит следующим образом:

$$\Omega_{rj} = \sum_{n=1}^2 \sum_{q=1}^2 T_r^n T_j^q \tilde{\Omega}_{nq} + \frac{\tilde{\sigma}_{jr}}{3}. \quad (8)$$

Заметим, что верны равенства

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= Q_{1.0} - P_{0.1} + 2PR - 2Q^2, \\ \Omega_{12} &= \Omega_{21} = R_{1.0} - Q_{0.1} + PS - QR, \\ \Omega_{22} &= S_{1.0} - R_{0.1} + 2SQ - 2R^2. \end{aligned}$$

В силу двумерности рассматриваемых объектов [23] верна формула

$$\Omega_{rij}^k = \Omega_{rj} \delta_i^k - \Omega_{ri} \delta_j^k. \quad (9)$$

ШАГ 4. Следующий объект является тензором:

$$W_{ijk} = \nabla_i \Omega_{jk} - \nabla_j \Omega_{ik}.$$

Здесь для вычисления ковариантной производной вместо аффинной связности формально использованы компоненты Θ_{ij}^k . Действительно, используем формулу для “формальной ковариантной производной”:

$$\nabla_i \Omega_{jk} = \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x^i} - \sum_{r=1}^2 \Theta_{ij}^r \Omega_{rk} - \sum_{r=1}^2 \Theta_{ik}^r \Omega_{jr}.$$

Подставив в тензор W_{ijk} правила преобразования величин Ω_{jk} (6) и Θ_{jk}^r (4), получим:

$$\begin{aligned} W_{ijk} &= \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x^j} - \Theta_{ik}^r \Omega_{jr} + \Theta_{jk}^r \Omega_{ir} = \\ &= T_k^n T_j^q T_i^a \tilde{W}_{nqa} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x^j} \right) - \Theta_{ik}^r \frac{\tilde{\sigma}_{jr}}{3} + \Theta_{jk}^r \frac{\tilde{\sigma}_{ir}}{3} + \\ &+ \Omega_{jr} \frac{\tilde{\sigma}_i \delta_k^r + \tilde{\sigma}_k \delta_i^r}{3} - \Omega_{ir} \frac{\tilde{\sigma}_j \delta_k^r + \tilde{\sigma}_k \delta_j^r}{3} + \tilde{\sigma}_{jr} \frac{\tilde{\sigma}_i \delta_k^r + \tilde{\sigma}_k \delta_i^r}{9} - \tilde{\sigma}_{ir} \frac{\tilde{\sigma}_j \delta_k^r + \tilde{\sigma}_k \delta_j^r}{9}. \quad (10) \end{aligned}$$

В силу формул (5), (7) верно следующее соотношение:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x^j} = -\tilde{\sigma}_r \Omega_{kij}^r - \Theta_{jk}^q \tilde{\sigma}_{qi} + \Theta_{ik}^q \tilde{\sigma}_{qj} + \frac{\tilde{\sigma}_{jk} \tilde{\sigma}_i - \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{\sigma}_j}{3}.$$

Подстановка его вместе с формулой (9) в равенство (10) завершает доказательство. Таким образом, W_{ijk} преобразуются как компоненты тензора.

ШАГ 5. При помощи тензора W_{ijk} построим следующие поля:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_{ijk} d^{ij} \quad - \text{ псевдоковекторное поле веса 1,}$$

$$\beta_i = 3 \nabla_i \alpha_k d^{kr} \alpha_r + \nabla_r \alpha_k d^{kr} \alpha_i \quad - \text{ псевдоковекторное поле веса 3.}$$

Поле α представляет собой свертку тензора и псевдотензора, значит, оно является псевдотензором. Псевдотензорность поля β проверяется непосредственным преобразованием его координат.

Соответствующие им псевдовекторные поля получаются сверткой с матрицей d^{jk} : $\alpha^j = d^{jk} \alpha_k$ веса 2, $\beta^j = d^{ji} \beta_i$ веса 4.

Возможны три случая:

1) псевдовекторное поле $\alpha = 0$, *случай максимального вырождения*, все такие уравнения эквивалентны $y'' = 0$;

2) поля α и β коллинеарны, тогда их скалярное произведение равно нулю: $3F^5 = \alpha^i \beta_i = 0$, *случай промежуточного вырождения*;

3) поля α и β не коллинеарны, тогда их скалярное произведение не равно нулю: $3F^5 = \alpha^i \beta_i \neq 0$, *случай общего положения*.

Все уравнения Пенлеве относятся к случаю промежуточного вырождения.

ШАГ 6. В случае промежуточного вырождения определим вспомогательные величины φ_1 и φ_2 (формулы для их вычисления (30), (31) приведены в приложении А) такие, что с их помощью можно построить аффинную связность Γ_{ij}^k и псевдоинвариант Ω веса 1:

$$\Gamma_{ij}^k = \Theta_{ij}^k - \frac{\varphi_k \delta_j^k + \varphi_k \delta_i^k}{3}, \quad \Omega = \frac{5}{3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right).$$

Доказательство проводится непосредственными вычислениями. Величины φ_1 и φ_2 определены через функции P, Q, R, S уравнения (1) и компоненты поля α : $B = \alpha^1$, $A = -\alpha^2$. Зная законы их преобразования при замене переменных (2), убедимся, что Γ_{ij}^k преобразуются по закону преобразования компонент аффинной связности, а Ω просто приобретает множитель $\det T$.

Правило ковариантного дифференцирования псевдовекторных полей было определено в работе [20]:

$$\begin{aligned} \nabla_k F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^k} + \sum_{n=1}^r \sum_{v_n=1}^2 \Gamma_{kv_n}^{i_n} F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots v_n \dots i_r} - \\ &- \sum_{n=1}^s \sum_{w_n=1}^2 \Gamma_{kj_n}^{w_n} F_{j_1 \dots w_n \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + m \varphi_k F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Если псевдотензорное поле F имеет тип (r, s) и вес m , то псевдотензорное поле ∇F будет иметь тип $(r, s + 1)$ и вес m .

ШАГ 7. Псевдовекторные поля $\alpha = (B, -A)^T$ и $\beta = (G, H)^T$ коллинеарны, следовательно, существует коэффициент пропорциональности N , $\beta = 3N\alpha$, который является псевдоинвариантом веса 2. Тогда определим величины

$$\xi^i = d^{ij} \nabla_j N, \quad M = -\alpha_i \xi^i, \quad \gamma = -\xi - 2\Omega\alpha, \quad \Gamma = -\frac{d_{ij} \nabla_\xi \xi^i \xi^j}{M},$$

где ξ – псевдовекторное поле веса 3, M – псевдоинвариант веса 4, γ – псевдовекторное поле веса 3, Γ – псевдоинвариант веса 4 (подробнее см. работу [20]).

2.1. Инварианты. Для уравнений PII–PIV выполнено условие $M \neq 0$. Уравнения такого типа относятся к *первому случаю промежуточного вырождения* по терминологии работ [20]–[22]. Автоматически это условие означает, что $N \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Тогда основные инварианты вычисляются по формулам

$$I_1 = \frac{M}{N^2}, \quad I_2 = \frac{\Omega^2}{N}, \quad I_3 = \frac{\Gamma}{M}. \quad (11)$$

Дифференцируя их вдоль псевдовекторных полей α и γ , получим дополнительные инварианты:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\nabla_\alpha I_1}{N}, & I_5 &= \frac{\nabla_\alpha I_2}{N}, & I_6 &= \frac{\nabla_\alpha I_3}{N}, \\ I_7 &= \frac{(\nabla_\gamma I_1)^2}{N^3}, & I_8 &= \frac{(\nabla_\gamma I_2)^2}{N^3}, & I_9 &= \frac{(\nabla_\gamma I_3)^2}{N^3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Повторяя эту процедуру, получаем бесконечную последовательность инвариантов, добавляя шесть инвариантов на каждом этапе.

Таким образом, для вычисления инвариантов уравнения (1), относящегося к первому случаю промежуточного вырождения, необходимо знать следующие величины (формулы для их вычисления содержатся в приложении А):

- 1) псевдовекторное поле $\alpha = (B, -A)^T$ веса 2 (формула (28)),
- 2) псевдовекторное поле γ веса 3 (формулы (37), (38)),
- 3) псевдоинвариант F веса 1 (формула (29)),
- 4) псевдоинвариант M веса 4 (формулы (33), (34)),
- 5) псевдоинвариант N веса 2 (формула (32)),
- 6) псевдоинвариант Ω веса 1 (формулы (35), (36)),
- 7) псевдоинвариант Γ веса 4 (формула (39)).

2.2. Связь с известными ранее псевдоинвариантами. Основная часть псевдоинвариантов была известна ранее.

Картан в работе [15] использовал другие обозначения для коэффициентов уравнения, а также получил величины L_1 и L_2 как компоненты тензора проективной кривизны. С точностью до знака они совпадают с компонентами псевдовекторного поля α :

$$P = -a_4, \quad Q = -a_3, \quad R = -a_2, \quad S = -a_1, \quad A = -L_1, \quad B = -L_2.$$

Лиувиль в работе [14] построил полуинварианты ν_5 , w_1 , i_2 , а также величину R_1 (более подробный обзор его результатов содержится в работе [24]). Здесь мы приводим связь между ними и псевдоинвариантами F , Ω , N , а также величиной H – второй компонентой псевдовекторного поля β :

$$F^5 = \nu_5, \quad H = L_1(L_2)_x - L_2(L_1)_x + 3R_1, \quad \Omega = -w_1 - \frac{\nu_5 a_4}{L_1^3} - 4 \frac{(L_1)_x R_1}{L_1^3}, \quad N = \frac{i_2}{3}.$$

Заметим, что псевдовекторное поле γ , псевдоинвариант M и псевдоинвариант Γ впервые были получены в работах [20]–[22].

3. УРАВНЕНИЕ PIV

Уравнение PIV зависит от двух комплексных параметров a и b , обозначим его $\text{PIV}(a, b)$. Оно имеет следующий вид:

$$z'' = \frac{1}{2z}(z')^2 + \frac{3}{2}z^3 + 4tz^2 + 2(t^2 - a)z + \frac{b}{z}. \quad (13)$$

Далее раздельно будем исследовать не сводящиеся друг к другу случаи, когда параметр b уравнения $\text{PIV}(a, b)$ либо равен нулю, либо нет: $b = 0$ и $b \neq 0$.

4. УРАВНЕНИЕ PIV С ПАРАМЕТРОМ $b = 0$

Заменой переменных $t = \sqrt{x}$, $z = y\sqrt{x}$ приведем уравнение (13) к виду

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'}{x} + \frac{3}{8}y^3 + y^2 + \frac{(4x^2 - 4xa + 1)y}{8x^2} + \frac{b}{4x^2y}. \quad (14)$$

Для уравнения $\text{PIV}(a, 0)$ в виде (14) определим основные классификационные параметры (явные формулы для их вычисления содержатся в приложении А):

$$\begin{aligned} A &= \frac{15y + 12}{8}, & B &= 0, & F &= 0, \\ N &= \frac{15y + 4}{16y}, & \Omega &= 0, & M &= \frac{9(25y^2 + 5y + 4)}{160y^2}. \end{aligned}$$

Сосчитаем инварианты, которые определяются через I_1 , I_3 , I_4 и I_6 (11), (12):

$$J_1 = \frac{5I_1}{72}, \quad J_3 = -\frac{135I_3}{2}, \quad J_4 = \frac{I_4}{2160}, \quad J_6 = -\frac{45I_6}{4}.$$

Первые два инварианта равны

$$J_1 = \frac{25y^2 + 5y + 4}{(15y + 4)^2}, \quad J_4 = -\frac{(5y - 4)y(5y + 4)}{(15y + 4)^4}.$$

Заметим, что инварианты J_1 и J_4 зависят только от переменной y . Примем их за параметры и образуем два полинома степеней 2 и 4 по y :

$$\begin{aligned} P_1 &= 25y^2 + 5y + 4 - J_1(15y + 4)^2, \\ P_2 &= (5y - 4)y(5y + 4) + J_4(15y + 4)^4. \end{aligned}$$

Редуцируем их, используя алгоритм Бухбергера [25], и получим новый инвариант, равный нулю, для уравнения PIV с параметром $b = 0$:

$$K = 4608J_1^4 - 3248J_1^3 + 808J_1^2 + 48000J_4J_1^2 - \\ - 16500J_4J_1 - 83J_1 + 1125J_4 + 125000J_4^2 + 3 = 0. \quad (15)$$

Условие $K = 0$ дает необходимое условие эквивалентности некоторого уравнения (1) уравнению PIV($a, 0$).

Из предпоследнего шага алгоритма выразим y через инварианты:

$$y = \frac{4K_1}{5K_2},$$

где

$$K_1 = 864J_1^3 - 348J_1^2 + 37J_1 + 625J_4 - 1, \\ K_2 = 7776J_1^3 - 3492J_1^2 + 54000J_1J_4 + 463J_1 - 4125J_4 - 19. \quad (16)$$

Вычислим теперь вторую пару инвариантов J_3 и J_6 :

$$J_3 = \frac{E_1x^2 + E_2ax + E_3}{E_4x^2}, \quad J_6 = \frac{F_1x^2 + F_2ax + F_3}{F_4x^2},$$

где коэффициенты суть новые инварианты, не зависящие от параметра a :

$$E_1 = -36(2K_1 + 5K_2)(6K_1 + 5K_2)(4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^3, \\ E_2 = 900K_2^2(4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^3, \\ E_3 = -25K_2^4(-213K_2^3K_1 - 639K_2K_1^3 - 729K_2^2K_1^2 - 7K_2^4 + 460K_1^4), \\ E_4 = 320K_1(K_1 + K_2)^3(4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^2, \\ F_1 = -36K_2(25K_2^4 + 100K_2^3K_1 + 43K_2^2K_1^2 - 40K_2K_1^3 + 28K_1^4) \times \\ \times (4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^3, \\ F_2 = 900K_2^2(K_2^3 + 4K_2^2K_1 - K_2K_1^2 + 8K_1^3)(4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^3, \\ F_3 = -25K_2^4(7360K_1^7 - 10020K_1^6K_2 - 49K_1K_2^6 - 7K_2^7 - 24985K_1^5K_2^2 - \\ - 518K_1^2K_2^5 - 19647K_1^4K_2^3 - 5606K_1^3K_2^4), \\ F_4 = 320K_1(3K_1 + K_2)(4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^3(K_1 + K_2)^3. \quad (17)$$

Аналогично составим два полинома, зависящие только от x и параметра a :

$$P_3 = E_1x^2 + E_2ax + E_3 - J_3E_4x^2, \\ P_4 = F_1x^2 + F_2ax + F_3 - J_6F_4x^2.$$

Редуцируя их, получим инвариант, содержащий только параметр a . Выразим его через инварианты:

$$a^2 = \frac{A_2^2}{180^2A_1},$$

где

$$A_1 = (115K_1^5 - 254K_2K_1^4 - 422K_2^2K_1^3 - 96K_2^3K_1^2 + 27K_2^4K_1 + 6K_2^5) \times \\ \times (4K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)^4(432K_1^5 - 120J_6K_1^5 + 80J_3K_1^5 - 310K_1^4J_6K_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 150K_1^4 J_3 K_2 + 936K_2 K_1^4 + 603K_2^2 K_1^3 - 300K_1^3 J_6 K_2^2 + 100K_1^3 J_3 K_2^2 - \\
& - 160K_1^2 J_6 K_2^3 + 80K_1^2 J_3 K_2^3 + 459K_2^3 K_1^2 + 117K_2^4 K_1 - 60K_1 J_6 K_2^4 + \\
& + 60K_1 J_3 K_2^4 - 10J_6 K_2^5 + 10J_3 K_2^5 + 45K_2^5), \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & 47000K_2 K_1^8 J_3 - 376650K_2^2 K_1^7 J_3 - 796370K_2^3 K_1^6 J_3 - 70K_2^9 J_3 - \\
& - 698850K_2^4 K_1^5 J_3 - 313770K_2^5 K_1^4 J_3 - 66910K_2^6 K_1^3 J_3 + 70K_2^9 J_6 - \\
& - 6230K_2^7 K_1^2 J_3 - 630K_2^8 K_1 J_3 - 55200J_6 K_1^9 + 5085K_2^9 + \\
& + 427680K_2 K_1^8 - 2308356K_2^2 K_1^7 - 4848237K_2^3 K_1^6 - 51327K_2^7 K_1^2 - \\
& - 4229280K_2^4 K_1^5 - 2087505K_2^5 K_1^4 - 635580K_2^6 K_1^3 + 27936K_2^8 K_1 + \\
& + 369650K_2^3 K_1^6 J_6 + 147570K_2^2 K_1^7 J_6 + 21190K_2^7 K_1^2 J_6 + \\
& + 360210K_2^4 K_1^5 J_6 - 65920K_2 K_1^8 J_6 + 86310K_2^6 K_1^3 J_6 + \\
& + 216450K_2^5 K_1^4 J_6 + 2550K_2^8 K_1 J_6 + 73600J_3 K_1^9 + 397440K_1^9. \tag{19}
\end{aligned}$$

Аналогично найдем x из предпоследнего шага алгоритма. Пусть $a \neq 0$, тогда

$$x = \frac{K_2^2 A_2}{a L_2},$$

где

$$\begin{aligned}
L_2 = & 36(4K_1^2 + K_1 K_2 + K_2^2)^3 (-120K_1^5 J_6 + 80K_1^5 J_3 - 310K_1^4 J_6 K_2 + \\
& + 150K_1^4 J_3 K_2 + 936K_1^4 K_2 + 603K_1^3 K_2^2 + 100K_1^3 J_3 K_2^2 - \\
& - 300K_1^3 J_6 K_2^2 - 160K_1^2 J_6 K_2^3 + 80K_1^2 J_3 K_2^3 + 459K_2^3 K_1^2 + 432K_1^5 - \\
& - 60K_1 J_6 K_2^4 + 60K_1 J_3 K_2^4 + 117K_2^4 K_1 + 45K_2^5 + 10J_3 K_2^5 - 10J_6 K_2^5). \tag{20}
\end{aligned}$$

Существование замены переменных, приводящей некоторое уравнение (1) к виду (14), и составляет достаточное условие эквивалентности этих уравнений.

ТЕОРЕМА 1. *Необходимые и достаточные условия того, что уравнение (1) эквивалентно уравнению PIV с параметрами $b = 0$ и $a \neq 0$ следующие:*

- 1) *уравнение относится к первому случаю промежуточного вырождения, т. е. $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (см. формулы (28) ниже), $F = 0$ (см. (29)), $\Omega = 0$ (см. (35) (36)), $M \neq 0$ (см. (33), (34));*
- 2) *выполнено необходимое условие эквивалентности $K = 0$;*
- 3) *выражение*

$$\tilde{a} = \pm \frac{A_2}{180\sqrt{A_1}},$$

где инварианты $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ (см. (18), (19)), является ненулевой константой;

- 4) *существует невырожденная инвариантная замена переменных*

$$\tilde{x} = \frac{180\sqrt{A_1} K_2^2}{L_2}, \quad \tilde{y} = \frac{4K_1}{5K_2},$$

где инварианты $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ (см. (16), (20)). Инвариантная замена переменных переводит данное уравнение (1), заданное в переменных (x, y) , в уравнение PIV($a, 0$) в форме (14), заданное в переменных $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

В случае $a = 0$ выражение для x^2 находится из формулы для инварианта J_3 :

$$x^2 = \frac{E_3}{J_3 E_4 - E_1}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Необходимые и достаточные условия того, что уравнение (1) эквивалентно уравнению PIV с параметрами $b = 0$ и $a = 0$ следующие:*

1) *уравнение относится к первому случаю промежуточного вырождения, т.е. $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (см. (28)), $F = 0$ (см. (29)), $\Omega = 0$ (см. (35), (36)), $M \neq 0$ (см. (33), (34));*

2) *выполнено необходимое условие эквивалентности $K = 0$;*

3) *$A_2 = 0$ (см. формулу (19));*

4) *существует невырожденная инвариантная замена переменных*

$$\tilde{x}^2 = \frac{E_3}{J_3 E_4 - E_1}, \quad \tilde{y} = \frac{4K_1}{5K_2},$$

где инварианты $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $E_3 \neq 0$, $J_3 E_4 - E_1 \neq 0$ (см. (16), (17)). Инвариантная замена переменных переводит уравнение (1), заданное в переменных (x, y) , в уравнение PIV(0,0) в форме (14), заданное в переменных $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

5. УРАВНЕНИЕ PIV С ПАРАМЕТРОМ $b \neq 0$

В уравнении (13) сделаем замену переменных $y^4 = zb$, $xy^3 = tb$. Она не очевидна, но именно в этих новых переменных формулы для инвариантов становятся проще. Теперь уравнение (13) примет вид (1), где

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{16xb}{y} + \frac{8bx^2}{y^2} - \frac{8a\sqrt{b}}{\sqrt{y}} + 6b + \frac{4b}{y}, \\ Q(x, y) &= -\frac{12bx^2}{y^2} - \frac{6x^3b}{y^3} + \frac{6xa\sqrt{b}}{y^{3/2}} - \frac{9xb}{2y} - \frac{3xb}{y^2}, \\ R(x, y) &= \frac{9bx^4}{2y^4} - \frac{5}{24y} - \frac{9ax^2\sqrt{b}}{2y^{5/2}} + \frac{9bx^2}{4y^3} + \frac{27bx^2}{8y^2} + \frac{9x^3b}{y^3}, \\ S(x, y) &= -\frac{27x^5b}{8y^5} - \frac{81x^3b}{32y^3} - \frac{27bx^4}{4y^4} + \frac{27x^3a\sqrt{b}}{8y^{7/2}} + \frac{21x}{32y^2} - \frac{27x^3b}{16y^4}. \end{aligned} \quad (21)$$

5.1. Формулы для инвариантов. В новых переменных вычислим основные классификационные параметры (формулы содержатся в приложении А):

$$\begin{aligned} A &= \frac{3b(4x + 5y + 2)}{8y^3}, & B &= -\frac{9xb(4x + 5y + 2)}{32y^4}, & F &= 0, & \Omega &= 0, \\ M &= \frac{9b^2(4x^2 + 5xy - 70x + 25y^2 - 150y)}{2560y^8}. \end{aligned}$$

Вычислим инварианты, используя формулы (11), (12) и (40):

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{5I_1}{72} = \frac{4x^2 + 5xy - 70x + 25y^2 - 150y}{(4x - 10 + 15y)^2}; \\
 J_7 &= \frac{I_7}{331776} = \frac{(4x - 210 - 5y)^2 y^4}{b(4x - 10 + 15y)^7}; \\
 J_4 &= \frac{I_4}{2160} = \frac{h(x, y)}{(4x - 10 + 15y)^4}, \\
 J_{10} &= \frac{I_{10}}{12960} = \frac{q(x, y)}{(4x + 15y - 10)^6}, \\
 J_3 &= -\frac{135I_3}{2} = \frac{36\sqrt{y}(4x^2 - 70x + 5xy + 25y^2 - 150y)a -}{\sqrt{b}(4x + 5y + 2)^3} - \\
 &\quad - \frac{9(4x^2 + 2y + 8xy + 3y^2)(4x^2 - 70x + 5xy + 25y^2 - 150y)}{y(4x + 5y + 2)^3} - \\
 &\quad - \frac{y^2 r(x, y)}{b(4x^2 - 70x + 5xy + 25y^2 - 150y)^2(4x + 5y + 2)^3},
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= -1088x^2y - 2350xy^2 - 96x^3 + 16x^3y - 25y^3x - \\
 &\quad - 1868xy - 168x - 384x^2 - 480y - 1760y^2 - 1400y^3; \\
 q(x, y) &= -(10080x + 38400y + 937728x^3y + 459760xy + 78336x^2 + \\
 &\quad + 2880880xy^2 + 4571000y^3x + 73728x^4 + 1268480x^2y + 152064x^3 + \\
 &\quad + 550400y^2 + 1894400y^3 + 3388800x^2y^2 + 72704x^4y + 4608x^5 + \\
 &\quad + 420000y^5 + 1256000y^3x^2 - 4800y^3x^3 + 511360x^3y^2 + 1236750y^4x - \\
 &\quad - 2560y^2x^4 + 2064000y^4 + 1875xy^5 + 256x^5y); \\
 r(x, y) &= 3684750xy^2 - 72900x^2y^2 - 79875y^3x - 448x^4 - \\
 &\quad - 5638500xy + 608400x^2y - 17040x^3y + 3675000y + 71875y^4 + \\
 &\quad + 2401000x - 411600x^2 + 23520x^3 - 7597500y^2 + 4146250y^3.
 \end{aligned}$$

Заметим, что для уравнения PIV в форме (21) инварианты J_1 , J_4 и J_{10} не зависят от параметров a и b , поэтому через них можно выразить переменные x и y . Инвариант J_7 используем для нахождения параметра b , а инвариант J_3 – для нахождения параметра a .

5.2. Редукция. Примем J_1 , J_4 и J_{10} за новые параметры и построим следующие многочлены:

$$\begin{aligned}
 P_1(x, y) &= (4x^2 + 5xy - 70x + 25y^2 - 150y) - J_1(4x - 10 + 15y)^2, \\
 P_2(x, y) &= h(x, y) - J_4(4x - 10 + 15y)^4, \\
 P_3(x, y) &= q(x, y) - J_{10}(4x + 15y - 10)^6.
 \end{aligned}$$

Редуцируя пару многочленов $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ по переменной y с использованием алгоритма Бухбергера [25], получим новый многочлен $Q_1(x)$, который зависит только от переменной x .

Аналогично редуцируем $P_1(x, y)$ и $P_3(x, y)$ по переменной y и получим многочлен $Q_2(x)$.

Теперь редуцируем $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ по переменной x . В итоге получаем соотношение между инвариантами J_1 , J_4 и J_{10} , которое тождественно равно нулю для уравнения PIV. Обозначим его через K .

Условие $K = 0$ является необходимым условием эквивалентности уравнения (1) уравнению PIV с параметром $b \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 K = & 2^{22}3^9J_1^9 - 2^{18}3^47229J_1^8 + 2^{14}3^2(20412 \cdot 10^3J_4 + 795377)J_1^7 + \\
 & + 2^{10} \cdot 3 \cdot 5(11664000J_{11} - 293875200J_4 - 3170041)J_1^6 + \\
 & + 2^9 \cdot 3 \cdot 5(47628 \cdot 10^5J_4^2 + 347502500J_4 - 33816 \cdot 10^3J_{11} + 1574799)J_1^5 + \\
 & + 2^8(550148750J_{10} + 1701 \cdot 10^7J_{10}J_4 - 15275925 \cdot 10^4J_4^2 - 31879206254 - \\
 & - 7217838)J_1^4 + 2^5(5312667 + 437746 \cdot 10^4J_4 + 405 \cdot 10^7J_{11}^2 + 46305 \cdot 10^8J_4^3 + \\
 & + 479194 \cdot 10^6J_4^2 - 1168733750J_{10} - 129705 \cdot 10^6J_{10}J_4)J_1^3 + 2^2(-2157057 - \\
 & - 337746700J_4 + 12948575 \cdot 10^2J_{10} + 6615 \cdot 10^9J_{10}J_4^2 + 33184 \cdot 10^7J_{11}J_4 - \\
 & - 697457 \cdot 10^6J_4^2 - 219765 \cdot 10^8J_4^3 - 23075 \cdot 10^6J_{10}^2)J_1^2 + 2^2 \cdot 5(9675 \cdot 10^5J_{10}^2 - \\
 & - 17852625J_{10} + 33823650J_4 - 847425 \cdot 10^4J_{10}J_4 - 615125 \cdot 10^6J_{10}J_4^2 + \\
 & + 8080625 \cdot 10^5J_4^3 + 11864525 \cdot 10^3J_4^2 + 9261 + 7875 \cdot 10^7J_{10}^2J_4)J_1 + \\
 & + 5^2(15435J_{10} - 21609J_4 - 12027400J_4^2 - 16033 \cdot 10^5J_4^3 + 11606 \cdot 10^3J_{10}J_4 + \\
 & + 5 \cdot 10^7J_{10}^3 + 343 \cdot 10^8J_4^4 + 20875 \cdot 10^5J_{10}J_4^2 - 58 \cdot 10^7J_{10}^2J_4 - 175 \cdot 10^4J_{10}^2).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Из предпоследнего шага редукции многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ найдем x . Выражение имеет вид

$$x = \frac{X_1}{X_2}, \tag{24}$$

где X_1 и X_2 – инварианты. Сами выражения для X_1 и X_2 очень громоздкие, поэтому они вынесены в приложение Б.

Из предпоследнего шага редукции многочленов $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ по переменной y выразим y через инварианты J_1 , J_4 и переменную x . В силу представления (24) получаем выражение для y :

$$y = \frac{2Y_1}{5X_2Y_2}, \tag{25}$$

где Y_1 и Y_2 – инварианты:

$$\begin{aligned}
 Y_1 = & (1728J_1^3 + 1250J_4 + 74J_1 - 696J_1^2 - 2)X_1^4 + \\
 & + (-45792J_1^3X_2 - 12151J_1X_2 + 59124J_1^2X_2 + 683X_2 + 78625J_4X_2 - \\
 & - 702000J_4J_1X_2)X_1^3 + (-12436X_2^2 + 1301184J_1^3X_2^2 + 6156000J_4J_1X_2^2 + \\
 & + 220812J_1X_2^2 - 1407750J_4X_2^2 - 1124568J_1^2X_2^2)X_1^2 + (-7992500J_4X_2^3 - \\
 & - 71540X_2^3 + 9720000J_4J_1X_2^3 - 2803920J_1^2X_2^3 + 938980J_1X_2^3 + \\
 & + 1330560J_1^3X_2^3)X_1 + 1240800J_1^2X_2^4 - 2937600J_1^3X_2^4 - 10800000J_4J_1X_2^4 - \\
 & - 101600J_1X_2^4 - 25000J_4X_2^4, \\
 Y_2 = & (-4125J_4 - 3492J_1^2 + 54000J_4J_1 + 7776J_1^3 + 463J_1 - 19)X_1^3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (35640J_1^2X_2 + 460X_2 - 7140J_1X_2 - 77760J_1^3X_2 + 42750J_4X_2 + \\
& + 324000J_4J_1X_2)X_1^2 + (1407888J_1^2X_2^2 + 1894500J_4X_2^2 - 7128000J_4J_1X_2^2 - \\
& - 286692J_1X_2^2 + 17076X_2^2 - 1897344J_1^3X_2^2)X_1 + 61440X_2^3 - 873760J_1X_2^3 - \\
& - 15120000J_4J_1X_2^3 + 6825000J_4X_2^3 - 3421440J_1^3X_2^3 + 3267360J_1^2X_2^3.
\end{aligned}$$

Из формулы (22) для J_7 , используя формулы (24) и (25), выразим параметр b через инварианты:

$$b = \frac{Y_1^4(2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1)^2X_2Y_2}{1250J_7(2X_1Y_2 - 5X_2Y_2 + 3Y_1)^7}. \quad (26)$$

Из формулы для J_3 выразим квадрат параметра a через инварианты, используя формулы (24)–(26):

$$a^2 = \frac{A_1^2}{A_2}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= 10J_3Y_1^2(2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1)^2(2X_1Y_2 + X_2Y_2 + Y_1)^3 \times \\
&\times (2X_1^2Y_2^2 - 35X_1X_2Y_2^2 + X_1Y_1Y_2 + 2Y_1^2 - 30Y_1X_2Y_2)^2 - \\
&- 500J_7(151950X_2^2Y_1^2Y_2^2 + 1458X_1^2Y_1^2Y_2^2 - 230Y_1^4 - 183750X_2^3Y_1Y_2^3 + \\
&+ 852X_1^3Y_1Y_2^3 - 300125X_1X_2^3Y_2^4 + 51450X_1^2X_2^2Y_2^4 - 2940X_1^3X_2Y_2^4 - \\
&- 33170X_2Y_1^3Y_2 + 639X_1Y_1^3Y_2 + 56X_1^4Y_2^4 - 73695X_1X_2Y_1^2Y_2^2 + \\
&+ 281925X_1X_2^2Y_1Y_2^3 - 30420X_1^2X_2Y_1Y_2^3)(2X_1Y_2 - 5X_2Y_2 + 3Y_1)^7 + \\
&+ 9Y_1(20X_1Y_1Y_2 + 5Y_1X_2Y_2 + 3Y_1^2 + 25X_1^2Y_2^2)(2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1)^2 \times \\
&\times (2X_1^2Y_2^2 - 35X_1X_2Y_2^2 + X_1Y_1Y_2 + 2Y_1^2 - 30Y_1X_2Y_2)^3, \\
A_2 &= 405 \cdot 10^4 J_7Y_1(2X_1Y_2 - 5X_2Y_2 + 3Y_1)^7(2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1)^2 \times \\
&\times (2X_1^2Y_2^2 - 35X_1X_2Y_2^2 + X_1Y_1Y_2 + 2Y_1^2 - 30Y_1X_2Y_2)^6.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Необходимые и достаточные условия того, что уравнение (1) эквивалентно уравнению PIV с параметром $b \neq 0$ следующие:*

1) *уравнение относится к первому случаю промежуточного вырождения, т. е. $A \neq 0$ или $B \neq 0$ (см. (28)), $F = 0$ (см. (29)), $\Omega = 0$ (см. (35), (36)), $M \neq 0$ (см. (33), (34));*

2) *выполнено необходимое условие эквивалентности $K = 0$ (см. формулу (23));*

3) *следующие выражения равны константам:*

$$\tilde{b} = \frac{Y_1^4(2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1)^2X_2Y_2}{1250J_7(2X_1Y_2 - 5X_2Y_2 + 3Y_1)^7} \neq 0, \quad \tilde{a} = \pm \frac{A_1}{\sqrt{A_2}},$$

где инварианты $X_1 \neq 0$ и $X_2 \neq 0$, $Y_1 \neq 0$ и $Y_2 \neq 0$, $2X_1Y_2 - 105X_2Y_2 - Y_1 \neq 0$, $2X_1Y_2 - 5X_2Y_2 + 3Y_1 \neq 0$, $J_7 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ (см. (41), (25), (22), (27));

4) *существует невырожденная инвариантная замена переменных*

$$\tilde{x} = \frac{X_1}{X_2}, \quad \tilde{y} = \frac{2Y_1}{5X_2Y_2}.$$

Инвариантная замена переменных переводит уравнение (1), заданное в переменных (x, y) , в уравнение Пенлеве PIV(a, b) в форме (21) с ненулевым параметром $b = \tilde{b}$ и параметром $a = \pm \tilde{a}$, заданное в переменных $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Заметим, что параметр a определен с точностью до знака. Нетрудно заметить, что уравнение PIV(a, b) в форме (14) заменой переменных $x = -\tilde{x}$, $y = \tilde{y}$ превращается в PIV($-a, b$).

СЛЕДСТВИЕ 1. Два уравнения PIV (13) – PIV(a_1, b) и PIV(a_2, b) – с одинаковым параметром b эквивалентны тогда и только тогда, когда $a_1^2 = a_2^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Два уравнения PIV (13) – PIV(a_1, b_1) и PIV(a_2, b_2) – с параметрами $b_1 \neq b_2$ при любых параметрах a_1 и a_2 не эквивалентны.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проблема эквивалентности относительно точечных замен переменных для уравнения PIV решена полностью. Выявлены три не сводящиеся друг к другу случая уравнений PIV (PIV(0, 0), PIV($a, 0$) и PIV(a, b)). В каждом случае построен тест на эквивалентность, который сводится к формальной проверке условий теорем 1–3. Следовательно, эти тесты можно программно реализовать с помощью специализированных математических сред (например, Maple). Более того, в каждом случае найдены соответствующие инвариантные замены переменных, переводящие уравнение, удовлетворяющее тесту, в уравнение PIV. Найдены также выражения для параметров a и b через инварианты.

Однако следует отметить, что, хотя величины из условий 1 и 2 теорем 1–3 вычисляются сравнительно просто, вычисление инвариантов из условий 3 и 4 требует достаточной вычислительной мощности.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Явные формулы для псевдотензорных полей и инвариантов

Здесь и далее запись $Z_{i,j}$ обозначает частную производную

$$Z_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} Z}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Координаты псевдовекторного поля α следующие: $\alpha^1 = B$, $\alpha^2 = -A$, где

$$\begin{aligned} A &= P_{0,2} - 2Q_{1,1} + R_{2,0} + 2PS_{1,0} + SP_{1,0} - 3PR_{0,1} - 3RP_{0,1} - 3QR_{1,0} + 6QQ_{0,1}, \\ B &= S_{2,0} - 2R_{1,1} + Q_{0,2} - 2SP_{0,1} - PS_{0,1} + 3SQ_{1,0} + 3QS_{1,0} + 3RQ_{0,1} - 6RR_{1,0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Псевдоинвариант F веса 5 имеет вид

$$3F^5 = AG + BH, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} G &= -BB_{1,0} - 3AB_{0,1} + 4BA_{0,1} + 3SA^2 - 6RBA + 3QB^2, \\ H &= -AA_{0,1} - 3BA_{1,0} + 4AB_{1,0} - 3PB^2 + 6QAB - 3RA^2. \end{aligned}$$

Величины φ_i при $A \neq 0$ равны

$$\varphi_1 = -3 \frac{BP + A_{1,0}}{5A} + \frac{3}{5}Q, \quad \varphi_2 = 3B \frac{BP + A_{1,0}}{5A^2} - 3 \frac{B_{1,0} + A_{0,1} + 3BQ}{5A} + \frac{6}{5}R, \quad (30)$$

при $B \neq 0$ –

$$\varphi_1 = -3A \frac{AS - B_{0.1}}{5B^2} - 3 \frac{A_{0.1} + B_{1.0} - 3AR}{5B} - \frac{6}{5}Q, \quad \varphi_2 = 3 \frac{AS - B_{0.1}}{5B} - \frac{3}{5}R. \quad (31)$$

Псевдоинвариант N в случаях $A \neq 0$ и $B \neq 0$ соответственно равен

$$N = -\frac{H}{3A}, \quad N = \frac{G}{3B}. \quad (32)$$

Псевдоинвариант M в случае $A \neq 0$ равен

$$M = -\frac{12BN(BP + A_{1.0})}{5A} + BN_{1.0} + \frac{24}{5}BNQ + \frac{6}{5}NB_{1.0} + \frac{6}{5}NA_{0.1} - AN_{0.1} - \frac{12}{5}ANR, \quad (33)$$

а в случае $B \neq 0$ –

$$M = -\frac{12AN(AS - B_{0.1})}{5B} - AN_{0.1} + \frac{24}{5}ANR - \frac{6}{5}NA_{0.1} - \frac{6}{5}NB_{1.0} + BN_{1.0} - \frac{12}{5}BNQ. \quad (34)$$

Псевдоинвариант Ω в случае $A \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{2BA_{1.0}(BP + A_{1.0})}{A^3} - \frac{(2B_{1.0} + 3BQ)A_{1.0}}{A^2} + \frac{(A_{0.1} - 2B_{1.0})BP}{A^2} - \\ & - \frac{BA_{2.0} + B^2P_{1.0}}{A^2} + \frac{B_{2.0}}{A} + \frac{3B_{1.0}Q + 3BQ_{1.0} - B_{0.1}P - BP_{0.1}}{A} + Q_{0.1} - 2R_{1.0}, \end{aligned} \quad (35)$$

а в случае $B \neq 0$ –

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{2AB_{0.1}(AS - B_{0.1})}{B^3} - \frac{(2A_{0.1} - 3AR)B_{0.1}}{B^2} + \frac{(B_{1.0} - 2A_{0.1})AS}{B^2} + \\ & + \frac{AB_{0.2} - A^2S_{0.1}}{B^2} - \frac{A_{0.2}}{B} + \frac{3A_{0.1}R + 3AR_{0.1} - A_{1.0}S - AS_{1.0}}{B} + R_{1.0} - 2Q_{0.1}. \end{aligned} \quad (36)$$

В случае $A \neq 0$ поле γ равно

$$\begin{aligned} \gamma^1 = & -\frac{6BN(BP + A_{1.0})}{5A^2} + \frac{18NBQ}{5A} + \frac{6N(B_{1.0} + A_{0.1})}{5A} - \\ & - N_{0.1} - \frac{12}{5}NR - 2\Omega B, \\ \gamma^2 = & -\frac{6N(BP + A_{1.0})}{5A} + N_{1.0} + \frac{6}{5}NQ + 2\Omega A, \end{aligned} \quad (37)$$

в случае $B \neq 0$ –

$$\begin{aligned} \gamma^1 = & -\frac{6N(AN - B_{0.1})}{5B} - N_{0.1} + \frac{6}{5}NR - 2\Omega B, \\ \gamma^2 = & -\frac{6AN(AS - B_{0.1})}{5B^2} + \frac{18NAR}{5B} - \frac{6N(A_{0.1} + B_{1.0})}{5B} + N_{1.0} - \frac{12}{5}NQ + 2\Omega A. \end{aligned} \quad (38)$$

Псевдоинвариант Γ равен

$$\Gamma = \frac{\gamma^1 \gamma^2 (\gamma_{1.0}^1 - \gamma_{0.1}^2)}{M} + \frac{(\gamma^2)^2 \gamma_{0.1}^1 - (\gamma^1)^2 \gamma_{1.0}^2}{M} + \frac{P(\gamma^1)^3 + 3Q(\gamma^1)^2 \gamma^2 + 3R\gamma^1 (\gamma^2)^2 + S(\gamma^2)^3}{M}. \quad (39)$$

Формулы для инвариантов I_7 , I_{10} имеют вид

$$I_7 = \frac{((I_1)'_x \gamma^1 + (I_1)'_y \gamma^2)^2}{N^3}, \quad I_{10} = \frac{(I_4)'_x B - (I_4)'_y A}{N}. \quad (40)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы для инвариантов уравнения PIV с ненулевым параметром b

Инварианты X_1 и X_2 представляют собой многочлены, зависящие от инвариантов J_1 , J_4 и J_{10} . Если мы объявим инвариант J_{10} “старшим”, то можно увидеть, что X_1 и X_2 – многочлены степени 4 по J_{10} :

$$\begin{aligned} X_1 &= 10[2^9 \cdot 5^{16} F_4 J_{10}^4 + 2^4 \cdot 5^{12} F_3 J_{10}^3 + 5^8 F_2 J_{10}^2 + \\ &\quad + 625(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)F_1 J_{10} + (9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^2 F_0], \\ X_2 &= 2^9 \cdot 5^{16} Q_4 J_{10}^4 + 2^4 \cdot 5^{12} Q_3 J_{10}^3 + 5^8 Q_2 J_{10}^2 + \\ &\quad + 625(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)Q_1 J_{10} + (9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^2 Q_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь коэффициенты F_4 , F_3 , F_2 , F_1 , F_0 из X_1 и Q_4 , Q_3 , Q_2 , Q_1 , Q_0 из X_2 представляют собой многочлены, зависящие от инвариантов J_1 и J_4 .

Инвариант F_4 есть многочлен степени 4 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 0, 3, 6, 8 и 10 от J_1 :

$$\begin{aligned} F_4 &= 2^7 \cdot 5^{12} J_4^4 + 2^3 \cdot 5^9 (43200 J_1^3 - 8496 J_1^2 + 100 J_1 + 31) J_4^3 + \\ &\quad + 2^5 \cdot 5^6 (9J_1 - 1)(4J_1 - 1)(10368 J_1^4 + 151200 J_1^3 - 35672 J_1^2 + 1614 J_1 + 23) J_4^2 + \\ &\quad + 5^3 (9J_1 - 1)^2 (4J_1 - 1)^2 (55296 J_1^4 + 336960 J_1^3 - 88400 J_1^2 + 5276 J_1 - 75) J_4 + \\ &\quad + 2(9J_1 - 1)^3 (4J_1 - 1)^3 (9216 J_1^4 + 30208 J_1^3 - 8848 J_1^2 + 680 J_1 - 25). \end{aligned}$$

Инвариант F_3 есть многочлен степени 5 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 1, 4, 6, 9, 11 и 13 от J_1 :

$$\begin{aligned} F_3 &= -2^{11} \cdot 5^{15} (84 J_1 + 61) J_4^5 + \\ &\quad + 2^8 \cdot 5^{12} (5515776 J_1^4 - 3105216 J_1^3 + 499784 J_1^2 - 18720 J_1 - 521) J_4^4 + \\ &\quad + 2^5 \cdot 5^9 (4J_1 - 1)(564226560 J_1^5 - 424403712 J_1^4 + 103024224 J_1^3 - \\ &\quad - 10149940 J_1^2 + 370560 J_1 - 1979) J_4^3 - \\ &\quad - 2^5 \cdot 5^6 (9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^2 (47775744 J_1^6 - 185234688 J_1^5 + 171682848 J_1^4 - \\ &\quad - 43831560 J_1^3 + 4304218 J_1^2 - 165353 J_1 + 2114) J_4^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 5^3 (9J_1 - 1)^2 (4J_1 - 1)^3 (1019215872 J_1^6 + 395034624 J_1^5 - 135413760 J_1^4 + \\ &\quad + 28697472 J_1^3 - 4834176 J_1^2 + 302584 J_1 - 681) J_4 - \\ &\quad - (9J_1 - 1)^3 (4J_1 - 1)^4 (679477248 J_1^6 + 401965056 J_1^5 - 355976192 J_1^4 + \\ &\quad + 94782336 J_1^3 - 10531024 J_1^2 + 457444 J_1 - 4421). \end{aligned}$$

Инвариант F_2 есть многочлен степени 6 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 2, 5, 8, 10, 12, 14 и 16 от J_1 :

$$\begin{aligned}
 F_2 = & 2^{14} \cdot 3 \cdot 5^{18} (18816J_1^2 - 2576J_1 + 453)J_4^6 + \\
 & + 2^{10} \cdot 5^{15} (792529920J_1^5 - 520563456J_1^4 + 135118656J_1^3 - 18274896J_1^2 + \\
 & + 1062716J_1 - 17731)J_4^5 - 2^9 \cdot 5^{12} (4J_1 - 1)(5267275776J_1^7 - \\
 & - 6766986240J_1^6 + 81108864J_1^5 + 1261379808J_1^4 - 266435232J_1^3 + \\
 & + 9273612J_1^2 + 1552085J_1 - 102312)J_4^4 - \\
 & - 2^5 \cdot 5^9 (4J_1 - 1)^2 (2022633897984J_1^8 + 1995437555712J_1^7 - \\
 & - 4493124089856J_1^6 + 2511727570944J_1^5 - 639535651776J_1^4 + 84077569600J_1^3 - \\
 & - 5720652364J_1^2 + 178307900J_1 - 1590457)J_4^3 - \\
 & - 2^4 \cdot 5^6 (9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3 (3384815910912J_1^8 + 3360593608704J_1^7 - \\
 & - 8196812734464J_1^6 + 4741560156672J_1^5 - 1241691259392J_1^4 + \\
 & + 168350536944J_1^3 - 12103950488J_1^2 + 431259473J_1 - 5846650)J_4^2 - \\
 & - 1000(9J_1 - 1)^2 (4J_1 - 1)^4 (1834588569600J_1^8 + 1690815430656J_1^7 - \\
 & - 5277841072128J_1^6 + 3299484797952J_1^5 - 896500329088J_1^4 + \\
 & + 123285829168J_1^3 - 8946207152J_1^2 + 327466395J_1 - 4832061)J_4 - \\
 & - (9J_1 - 1)^3 (4J_1 - 1)^5 (97844723712J_1^8 + 1521009819648J_1^7 - \\
 & - 4653823426560J_1^6 + 3169120141312J_1^5 - 896869354496J_1^4 + \\
 & + 123877765888J_1^3 - 8840332768J_1^2 + 316078556J_1 - 4615109).
 \end{aligned}$$

Инвариант F_1 есть многочлен степени 6 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 4, 6, 9, 11, 13, 15 и 17 от J_1 :

$$\begin{aligned}
 F_1 = & 2^{12} \cdot 5^{18} (-14224896J_1^4 - 11966976J_1^3 + 10374616J_1^2 - 2637914J_1 + \\
 & + 224065)J_4^6 + 2^9 \cdot 5^{15} (-164260970496J_1^6 + 167149785600J_1^5 - 65932680576J_1^4 + \\
 & + 12081370816J_1^3 - 884569656J_1^2 - 3888790J_1 + 2118979)J_4^5 + \\
 & + 2^7 \cdot 5^{12} (4J_1 - 1)(1348422598656J_1^8 - 13476784914432J_1^7 + 15702245425152J_1^6 - \\
 & - 7773731935488J_1^5 + 2009453523744J_1^4 - 283267292088J_1^3 + 21000874272J_1^2 - \\
 & - 719412467J_1 + 7606201)J_4^4 + 2^4 \cdot 5^9 (4J_1 - 1)^2 (258897138941952J_1^9 - \\
 & - 1018432859406336J_1^8 + 1171507529613312J_1^7 - 644311542970368J_1^6 + \\
 & + 197624883724032J_1^5 - 35745872567488J_1^4 + 3854967163464J_1^3 - \\
 & - 241804984108J_1^2 + 8129820757J_1 - 114386308)J_4^3 + \\
 & + 2^2 \cdot 5^6 (9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3 (979229994909696J_1^8 - 2413337052708864J_1^7 + \\
 & + 2367756099846144J_1^6 - 1221699758579712J_1^5 + 363923556968448J_1^4 - \\
 & - 64639491619584J_1^3 + 6876671830656J_1^2 - 429418223596J_1 + \\
 & + 14696093308J_1 - 219429367)J_4^2 + 250(9J_1 - 1)^2 (4J_1 - 1)^4 (770233665060864J_1^9 - \\
 & - 1554287897346048J_1^8 + 1308874885300224J_1^7 - 607539217170432J_1^6 + \\
 & + 167900155635712J_1^5 - 28008137938176J_1^4 + 2796232562432J_1^3 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -162959642896J_1^2 + 5208807203J_1 - 74448513)J_4 + \\
& + (9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^5(206648056479744J_1^9 - 403318669049856J_1^8 + \\
& + 310453749153792J_1^7 - 128966479708160J_1^6 + 31781769588736J_1^5 - \\
& - 4695339746816J_1^4 + 403336298624J_1^3 - 18810882088J_1^2 + \\
& + 414891335J_1 - 3272724.
\end{aligned}$$

Инвариант F_0 есть многочлен степени 6 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 6, 8, 10, 12, 14, 16 и 18 от J_1 :

$$\begin{aligned}
F_0 = & 2^{10} \cdot 5^{18}(28677390336J_1^6 - 44893771776J_1^5 + 30537464832J_1^4 - \\
& - 11150711712J_1^3 + 2277657832J_1^2 - 245457176J_1 + 10867711)J_4^6 + \\
& + 2^7 \cdot 5^{15}(33036353667072J_1^8 - 54347361288192J_1^7 + 41165785350144J_1^6 - \\
& - 18688014160896J_1^5 + 5492743436160J_1^4 - 1050925201568J_1^3 + \\
& + 125242737168J_1^2 - 8331782056J_1 + 232198619)J_4^5 + \\
& + 2^5 \cdot 5^{12}(4J_1 - 1)(1895882173710336J_1^9 - 3119642568032256J_1^8 + \\
& + 2297790927470592J_1^7 - 1016927391154176J_1^6 + 303287479131136J_1^5 - \\
& - 63204699532544J_1^4 + 9012738196864J_1^3 - 822086710448J_1^2 + 42308798634J_1 - \\
& - 918491139)J_4^4 + 2^2 \cdot 5^9(4J_1 - 1)^2(110290181189271552J_1^{10} - \\
& - 192126187198218240J_1^9 + 145382716053651456J_1^8 - 64310516089454592J_1^7 + \\
& + 19019342449262592J_1^6 - 4045929062278656J_1^5 + 630041397923840J_1^4 - \\
& - 69185383295584J_1^3 + 4942678966088J_1^2 - 201253024658J_1 + 3478605867)J_4^3 + \\
& + 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3(189245002541432832J_1^{10} - 336345347238395904J_1^9 + \\
& + 251347091318636544J_1^8 - 105415783775207424J_1^7 + 28466821865734144J_1^6 - \\
& - 5447630037155840J_1^5 + 776735087159296J_1^4 - 80349217063456J_1^3 + \\
& + 5459784384176J_1^2 - 207711878006J_1 + 3204061753)J_4^2 + \\
& + 125(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^4(40606343098269696J_1^{10} - 74596360749318144J_1^9 + \\
& + 56251204245651456J_1^8 - 22951175146438656J_1^7 + 5778547426246656J_1^6 - \\
& - 997741639407616J_1^5 + 128416821008896J_1^4 - 12283212381024J_1^3 + \\
& + 772367373004J_1^2 - 25695530449J_1 + 288890028)J_4 + \\
& + 4J_1(9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^5(852423232978944J_1^9 - 1617389590413312J_1^8 + \\
& + 1239788701089792J_1^7 - 497918303535104J_1^6 + 118413628448768J_1^5 - \\
& - 18562257232896J_1^4 + 2151668159168J_1^3 - 190059710528J_1^2 + 10858460481J_1 - \\
& - 275799132).
\end{aligned}$$

Инвариант Q_4 , как и F_4 , является многочленом степени 4 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 0, 3, 6, 8 и 10 от J_1 :

$$\begin{aligned}
Q_4 = & 2^7 \cdot 5^{12}J_4^4 + 2^3 \cdot 5^9(43200J_1^3 - 3312J_1^2 - 204J_1 + 83)J_4^3 + \\
& + 2^2 \cdot 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)(10368J_1^4 + 120096J_1^3 - 11576J_1^2 - 298J_1 + 381)J_4^2 +
\end{aligned}$$

$$+ 375(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^2(18432J_1^4 + 75072J_1^3 - 6832J_1^2 - 1412J_1 + 535)J_4 + \\ + (9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^3(18432J_1^4 + 26624J_1^3 + 4112J_1^2 - 3480J_1 + 625).$$

Инвариант Q_3 , как и F_3 , является многочленом степени 5 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 1, 4, 6, 9, 11 и 13 от J_1 :

$$Q_3 = -2^{11} \cdot 5^{15}(84J_1 + 89)J_4^5 + 2^8 \cdot 5^{12}(5515776J_1^4 - 2500416J_1^3 + \\ + 244232J_1^2 + 10376J_1 - 3773)J_4^4 + 2^5 \cdot 5^9(4J_1 - 1)(438815232J_1^5 - \\ - 247442688J_1^4 + 32516064J_1^3 + 1245820J_1^2 - 909864J_1 + 69425)J_4^3 - \\ - 2^5 \cdot 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^2(47775744J_1^6 - 102995712J_1^5 + 24699168J_1^4 + \\ + 39674904J_1^3 - 12885266J_1^2 + 1737527J_1 - 88177)J_4^2 - \\ - 250(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^3(1019215872J_1^6 + 472006656J_1^5 - 1052534784J_1^4 + \\ + 935238272J_1^3 - 235811200J_1^2 + 24447000J_1 - 938085)J_4 - \\ - (9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^4(679477248J_1^6 - 13860864J_1^5 - 418964480J_1^4 + \\ + 479926912J_1^3 - 132091664J_1^2 + 13528724J_1 - 469207).$$

Инвариант Q_2 , как и F_2 , является многочленом степени 6 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 2, 5, 8, 10, 12, 14 и 16 от J_1 :

$$Q_2 = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5^{18}(18816J_1^2 - 1008J_1 + 901)J_4^6 + 2^{10} \cdot 5^{15}(792529920J_1^5 - \\ - 15073680J_1^2 + 117313344J_1^3 - 467728128J_1^4 - 222004J_1 + 155193)J_4^5 - \\ - 2^9 \cdot 5^{12}(4J_1 - 1)(5267275776J_1^7 - 3913878528J_1^6 - 8590561920J_1^5 + \\ + 5905922400J_1^4 - 1210164480J_1^3 + 114519476J_1^2 - 7953133J_1 + 364770)J_4^4 - \\ - 2^5 \cdot 5^9(4J_1 - 1)^2(2022633897984J_1^8 + 1852468641792J_1^7 - \\ - 5708285208576J_1^6 + 4048881486336J_1^5 - 1276404281280J_1^4 + \\ + 205978638784J_1^3 - 17292583388J_1^2 + 689452444J_1 - 9383509)J_4^3 - \\ - 2^4 \cdot 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3(3384815910912J_1^8 + 2743426547712J_1^7 - \\ - 9871911936000J_1^6 + 8094908136960J_1^5 - 2965279257600J_1^4 + \\ + 545194971952J_1^3 - 50605644528J_1^2 + 2161687825J_1 - 30268960)J_4^2 - \\ - 1000(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^4(1834588569600J_1^8 + 1030745751552J_1^7 - \\ - 6373782134784J_1^6 + 6204262788096J_1^5 - 2604184611200J_1^4 + \\ + 530791229040J_1^3 - 53258467168J_1^2 + 2450496121J_1 - 38526014)J_4 - \\ - (9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^5(97844723712J_1^8 + 2154962092032J_1^7 - \\ - 7222926901248J_1^6 + 7079314259968J_1^5 - 3226777482240J_1^4 + \\ + 710317226752J_1^3 - 75769663168J_1^2 + 3709340092J_1 - 64311337).$$

Инвариант Q_1 , как и F_1 , является многочленом степени 6 от J_4 с коэффициентами – многочленами степеней 4, 6, 9, 11, 13, 15 и 17 от J_1 :

$$Q_1 = -2^{12} \cdot 5^{18}(14224896J_1^4 + 9596160J_1^3 - 13479256J_1^2 + 4720442J_1 - 488413)J_4^6 - \\ - 2^8 \cdot 5^{14}(164260970496J_1^6 - 196176701952J_1^5 + 91734287232J_1^4 -$$

$$\begin{aligned}
& -18211892352J_1^3 + 769580392J_1^2 + 181671254J_1 - 16129295)J_4^5 + \\
& + 2^7 \cdot 5^{12}(4J_1 - 1)(1348422598656J_1^8 - 13459227328512J_1^7 + \\
& + 17883573424128J_1^6 - 11144343962880J_1^5 + 3651337431840J_1^4 - \\
& - 608488826424J_1^3 + 43754514848J_1^2 - 331407547J_1 - 65482335)J_4^4 + \\
& + 2^4 \cdot 5^9(4J_1 - 1)^2(258897138941952J_1^9 - 1062641857462272J_1^8 + \\
& + 142622075550208J_1^7 - 1034981414922240J_1^6 + 434742683950848J_1^5 - \\
& - 104112736409088J_1^4 + 13851972958888J_1^3 - 953497605972J_1^2 + \\
& + 27258350785J_1 - 77175872)J_4^3 + \\
& + 2^2 \cdot 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3(979229994909696J_1^9 - 2658676582121472J_1^8 + \\
& + 3228632454463488J_1^7 - 2332708258406400J_1^6 + 1034183114502144J_1^5 - \\
& - 266629105918464J_1^4 + 38700242385728J_1^3 - 3014945748572J_1^2 + \\
& + 111498056740J_1 - 1342190421)J_4^2 + \\
& + 250(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^4(770233665060864J_1^9 - 1872136482324480J_1^8 + \\
& + 2103129769771008J_1^7 - 1428630758031360J_1^6 + 625251764840448J_1^5 - \\
& - 164587145129216J_1^4 + 24859155950720J_1^3 - 2058036924952J_1^2 + \\
& + 84482571875J_1 - 1282488827)J_4 - \\
& - (9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^5(206648056479744J_1^9 - 525216887341056J_1^8 + \\
& + 583723870322688J_1^7 - 377617704943616J_1^6 + 157874176454656J_1^5 - \\
& - 40776176052736J_1^4 + 6198586862464J_1^3 - 528724713592J_1^2 + \\
& + 23004143919J_1 - 388341779).
\end{aligned}$$

Инвариант Q_0 , как и F_0 , является многочленом степени 6 от J_4 с коэффициентами — многочленами степеней 6, 8, 10, 12, 14, 16 и 18 от J_1 :

$$\begin{aligned}
Q_0 = & 2^{10} \cdot 5^{18}(28677390336J_1^6 - 52063119360J_1^5 + 40907414016J_1^4 - \\
& - 17160899616J_1^3 + 3990852616J_1^2 - 482929040J_1 + 23626891)J_4^6 + \\
& + 2^7 \cdot 5^{15}(33036353667072J_1^8 - 62606449704960J_1^7 + 56227723001856J_1^6 - \\
& - 30605612160000J_1^5 + 10870441946240J_1^4 - 2521634225888J_1^3 + \\
& + 363806668880J_1^2 - 29256272184J_1 + 991162295)J_4^5 + \\
& + 2^5 \cdot 5^{12}(4J_1 - 1)(1895882173710336J_1^9 - \\
& - 3675305047228416J_1^8 + 3462590161354752J_1^7 - 1982797817389056J_1^6 + \\
& + 756309403755520J_1^5 - 199435164557184J_1^4 + 35767287795104J_1^3 - \\
& - 4093450583008J_1^2 + 264710985634J_1 - 7251469115)J_4^4 + \\
& + 2^2 \cdot 5^9(4J_1 - 1)^2(110290181189271552J_1^{10} - 234705520227778560J_1^9 + \\
& + 241969643549097984J_1^8 - 147750862333575168J_1^7 + 58634179733348352J_1^6 - \\
& - 16244319751956992J_1^5 + 3240292137019520J_1^4 - 454383735261696J_1^3 + \\
& + 41655923307512J_1^2 - 2195894457878J_1 + 49765940411)J_4^3 + \\
& + 5^6(9J_1 - 1)(4J_1 - 1)^3(189245002541432832J_1^{10} - 440999672341856256J_1^9 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 487382922679025664J_1^8 - 305035247656894464J_1^7 + 117318060900745216J_1^6 - \\
& - 30327900069421056J_1^5 + 5658097851382784J_1^4 - 769014985525216J_1^3 + \\
& + 70861987533856J_1^2 - 3822074716494J_1 + 88807950537)J_4^2 + \\
& + 125(9J_1 - 1)^2(4J_1 - 1)^4(40606343098269696J_1^{10} - 106698823220330496J_1^9 + \\
& + 129063609710936064J_1^8 - 84851843576365056J_1^7 + 32492454966771712J_1^6 - \\
& - 7942100807649280J_1^5 + 1362715537613824J_1^4 - 173455133315936J_1^3 + \\
& + 15638028228124J_1^2 - 851331376773J_1 + 20168986789)J_4 + \\
& + 4(9J_1 - 1)^3(4J_1 - 1)^5(852423232978944J_1^{10} - 2560775801536512J_1^9 + \\
& + 3427515865497600J_1^8 - 2400638604935168J_1^7 + 936886765920256J_1^6 - \\
& - 222827413108736J_1^5 + 35632163718848J_1^4 - 4180182805360J_1^3 + \\
& + 359176482017J_1^2 - 19403331129J_1 + 465466680).
\end{aligned}$$

Благодарности. Автор выражает признательность Н. Х. Ибрагимову и лаборатории “Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологии” при УГАТУ за поддержку работы в рамках гранта правительства РФ по договору № 11.G34.31.0042. Отдельная благодарность Р. Н. Гарифуллину за помощь в реализации алгоритма Бухбергера и Б. И. Сулейманову за ценные замечания и интерес, проявленный к работе.

Список литературы

- [1] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*, изд-во “Университетское”, Минск, 1990.
- [2] N. A. Kudryashov, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, ИКИ, М., Ижевск, 2004.
- [3] A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1191**, Springer, Berlin, 1986.
- [4] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [5] N. Kamran, K. G. Lamb, W. F. Shadwick, *J. Differ. Geom.*, **22** (1985), 139–150.
- [6] J. Hietarinta, V. Dryuma, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**:supp. 1 (2002), 67–74.
- [7] M. V. Babich, L. A. Bordag, *J. Differ. Equations*, **157**:2 (1999), 452–485.
- [8] A. V. Bocharov, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov, *On Some Equivalence Problem for Differential Equations*, Preprint ESI 54, International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, 1993.
- [9] R. Dridi, *J. Phys. A*, **42**:12 (2009), 1–9, 125201, 9 pp.
- [10] V. V. Kartak, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:3 (2009), 46–56, arXiv:0909.1987.
- [11] V. V. Kartak, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **18**:4 (2011), 613–640, arXiv:1106.6124.
- [12] A. Tresse, *Acta Math.*, **18**:1 (1894), 1–88.
- [13] A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire de second ordre $y'' = w(x, y, y')$* , S. Hirzel, Leipzig, 1896.
- [14] R. Liouville, *J. de L'École Polytechnique*, **59** (1889), 7–76.
- [15] E. Cartan, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 205–241.
- [16] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen III*, Teubner, Leipzig, 1930.
- [17] G. Thomsen, *Abhandlungen Hamburg*, **7** (1930), 301–328.
- [18] C. Grissom, G. Thompson, G. Wilkens, *J. Differ. Equations*, **77**:1 (1989), 1–15.

- [19] L. A. Bordag, V. S. Dryuma, *Investigation of dynamical systems using tools of the theory of invariants and projective geometry*, NTZ-Preprint 24/95, Zentrum für Höhere Studien, Univ. Leipzig, Leipzig, 1995, arXiv: [solv-int/9705006](#).
- [20] V. V. Dmitrieva, R. A. Sharipov, *On the point transformations for the second order differential equations I*, arXiv: [solv-int/9703003](#).
- [21] R. A. Sharipov, *On the point transformations for the equation $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$* , arXiv: [solv-int/9706003](#).
- [22] R. A. Sharipov, *Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$* , arXiv: [math/9802027](#).
- [23] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Физматлит, М., 1986.
- [24] C. Bandle, L. A. Bordag, *Nonlinear Anal., Ser. A*, **50**:4 (2002), 523–540.
- [25] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, New York, 1997.

Поступила в редакцию 29.12.2011,
после доработки 13.06.2012