Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, И. Х. Хуснуллин, Возмущение периодического оператора узким потенциалом, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 127–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:28:35

© 2012 г.

Р. Р. Гадыльшин*, И. Х. Хуснуллин*

ВОЗМУЩЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрено возмущение периодического оператора второго порядка на оси, частным случаем которого является оператор Шредингера с периодическим потенциалом. Возмущение осуществляется потенциалом, зависящим от двух малых параметров, один из которых описывает длину носителя потенциала, а обратное значение второго соответствует значению потенциала. Получены достаточные условия на возмущающий потенциал, при которых в лакунах непрерывного спектра возникают собственные значения, и построены их асимптотики. Приведены также достаточные условия на возмущающий потенциал, при которых собственные значения не возникают.

Ключевые слова: периодический оператор, возмущение, собственные значения, асимптотики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$, где $p = p(x)$ – однопериодическая кусочно-непрерывно дифференцируемая вещественная функция, $p(x) > 0$, а $q = q(x)$ – однопериодическая кусочно-непрерывная вещественная функция. Частным случаем такого оператора при $p(x) \equiv 1$ является оператор Хилла, возмущение которого дополнительным потенциалом соответствует оператору энергии одномерной модели кристалла с примесью, а также описывает блоховский электрон во внешнем электрическом поле. Хорошо известно (см., например, монографии [1], [2]), что спектр оператора $\mathcal{H}_0$ непрерывен, состоит из зон, разделенных лакунами, и при возмущении его быстроубывающим вещественным потенциалом непрерывная часть спектра сохраняется. В работе [3] было также показано, что для оператора $\mathcal{H}_0 - hv$, где $0 < h \ll 1$, а $v = v(x)$ – быстроубывающая вещественная функция, в каждой лакуне содержится не более двух собственных значений, и получены необходимые и

---

*Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия. E-mail: gadylshin@yandex.ru, khusnullini@yandex.ru

достаточные условия, определяющие число собственных значений в рассматриваемой лакуне. В работе [4] аналогичные результаты были получены для оператора $\mathcal{H}_0 - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, а $\mathcal{L}_\varepsilon$ – достаточно произвольный линейный локализованный оператор из $W_2^2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$. Также в этой работе были построены асимптотики собственных значений по малому параметру ε (в случае, когда они существуют).

В настоящей работе изучается спектр оператора

$$\mathcal{H}^{\delta,h} := \mathcal{H}_0 - \delta^{-1} V_h, \quad V_h = V\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad 0 < h, \delta \ll 1,$$

где $V(x)$ – комплекснозначная функция из пространства $C_0^\infty(\mathbb{R})$, а малые параметры δ и h удовлетворяют условию

$$\delta^{-1} h^{1/2} = o(1). \quad (1.1)$$

Не ограничивая общности, всюду далее будем считать, что $p(0) = 1$, $x_0 \in [0, 1)$.

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 сформулированы теоремы, которые составляют основной результат работы. В разделе 3 приведены предварительные сведения, а в разделе 4 дано доказательство основных теорем. В заключительном разделе 5 приведены качественные утверждения о структуре спектра оператора $\mathcal{H}^{\delta,h}$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Всюду далее в соответствии с книгой [1] непрерывный спектр определяется в терминах характеристических последовательностей. Известно [2], что спектр $\sigma(\mathcal{H}_0)$ оператора $\mathcal{H}_0$ совпадает с его непрерывным спектром $\sigma_c(\mathcal{H}_0)$ и имеет зонную структуру:

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_c(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n^+, \mu_{n+1}^-],$$

где величины

$$\mu_0^+ < \mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots$$

являются простыми собственными значениями краевых задач

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q\right) \phi_n^\pm &= \mu_n^\pm \phi_n^\pm, \quad x \in (0, 1), \\ \phi_n^\pm(0) + (-1)^{n+1} \phi_n^\pm(1) &= 0, \quad \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(0) + (-1)^{n+1} \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(1) = 0. \end{aligned}$$

Собственные функции этих краевых задач выберем вещественными и продолжим их на всю вещественную ось однопериодически для четных n и антипериодически для нечетных n . Очевидно, что продолженные таким образом функции будут непрерывно дифференцируемыми, а их вторые производные – кусочно-непрерывными.

В случае, когда $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной (т.е. $\mu_n^- \neq \mu_n^+$) лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$, функции $\phi_n^\pm$ нормируем следующим образом:

$$|\phi_n^\pm(0)|^2 + \left| \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(0) \right|^2 = \left| \frac{d\theta_1}{dx}(1, \mu_n^\pm) \right| + |\theta_2(1, \mu_n^\pm)|, \quad (2.1)$$

где $\theta_{1,2}(x, \lambda)$ – решения уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q - \lambda\right)v = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \quad \frac{d\theta_1}{dx}(0, \lambda) = 0, \quad \theta_2(0, \lambda) = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dx}(0, \lambda) = 1.$$

В работе [4] было показано, что правая часть равенства (2.1) не равна нулю, а потому данная нормировка имеет смысл.

Положим

$$D(\lambda) := \theta_1(1, \lambda) + \frac{d\theta_2}{dx}(1, \lambda).$$

Если $\mu_n^\pm$ – один из краев невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$, то $\dot{D}(\mu_n^\pm) \neq 0$ [4], где точкой сверху обозначено дифференцирование по λ .

Всюду далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$\langle g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt, \quad \langle g \rangle_m := \int_{-\infty}^{\infty} t^m g(t) dt.$$

Основным результатом настоящей работы являются следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$ и выполнено условие (1.1). Тогда если

$$\pm \operatorname{Re} \langle V \rangle < 0, \tag{2.2}$$

то оператор $\mathcal{H}^{\delta, h}$ не имеет собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$. Если

$$\pm \operatorname{Re} \langle V \rangle > 0, \tag{2.3}$$

то оператор $\mathcal{H}^{\delta, h}$ имеет единственное, к тому же простое, собственное значение $\lambda_{\delta, h}^{n, \pm}$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$, с асимптотикой

$$\lambda_{\delta, h}^{n, \pm} = \mu_n^\pm \mp \frac{(\delta^{-1}h)^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} ((\phi_n^\pm(x_0))^2 \langle V \rangle)^2 (1 + O(h\delta^{-2})). \tag{2.4}$$

В критических случаях $\langle V \rangle = 0$ и $\phi_n^\pm(x_0) = 0$ равенство (2.4) становится неконструктивным. Для этих случаев справедливы следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$, выполнено условие (1.1) и V – вещественнозначная функция такая, что $\langle V \rangle = 0$. Тогда если

$$\pm \phi_n^\pm(x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \langle V \rangle_1 < 0,$$

то оператор $\mathcal{H}^{\delta, h}$ не имеет собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$. Если

$$\pm \phi_n^\pm(x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \langle V \rangle_1 > 0,$$

то оператор $\mathcal{H}^{\delta,h}$ имеет единственное, к тому же простое, собственное значение $\lambda_{\delta,h}^{n,\pm}$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$, с асимптотикой

$$\lambda_{\delta,h}^{n,\pm} = \mu_n^\pm \mp \frac{(\delta^{-1}h^2)^2}{|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} \left(\phi_n^\pm(x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \langle V \rangle_1 \right)^2 (1 + O(h\delta^{-2})). \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$ и $\phi_n^\pm(x_0) = 0$. Тогда если $\pm \operatorname{Re}\langle V \rangle_2 < 0$, то оператор $\mathcal{H}^{\delta,h}$ не имеет собственных значений, сходящихся к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$. Если $\pm \operatorname{Re}\langle V \rangle_2 > 0$, то оператор $\mathcal{H}^{\delta,h}$ имеет единственное, к тому же простое, собственное значение $\lambda_{\delta,h}^{n,\pm}$, сходящееся к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$, с асимптотикой

$$\lambda_{\delta,h}^{n,\pm} = \mu_n^\pm \mp \frac{(\delta^{-1}h^3)^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} \left(\left(\frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \right)^2 \langle V \rangle_2 \right)^2 (1 + O(h\delta^{-2})). \quad (2.6)$$

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через $\mathcal{G}_{n,0}^\pm$ интегральный оператор на $L_2(x_0 - 1, x_0 + 1)$, определенный следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{n,0}^\pm f)(x) &:= \int_{x_0-1}^{x_0+1} G_{n,0}^\pm(x, t) f(t) dt, \\ G_{n,0}^\pm(x, t) &:= \begin{cases} \frac{\theta_1(t, \mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm) - \theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(t, \mu_n^\pm)}{2}, & t \geq x, \\ \frac{\theta_1(x, \mu_n^\pm) \theta_2(t, \mu_n^\pm) - \theta_1(t, \mu_n^\pm) \theta_2(x, \mu_n^\pm)}{2}, & t \leq x. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

В работе [4] был исследован спектр оператора

$$\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{H}_0 - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon, \quad (3.2)$$

где

$$0 < \varepsilon \ll 1 \quad (3.3)$$

и

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq C \|u\|_{W_2^2(x_0-1, x_0+1)}, \\ (\mathcal{L}_\varepsilon u)(x) &= 0 \quad \text{при } x \notin [x_0 - 1, x_0 + 1] \end{aligned} \quad (3.4)$$

для любого $u \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$. Так как $\mathcal{G}_{n,0}^\pm$ – ограниченный оператор, действующий из $L_2(x_0 - 1, x_0 + 1)$ в $W_2^2(x_0 - 1, x_0 + 1)$, для достаточно малых ε оператор

$$\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm: L_2(x_0 - 1, x_0 + 1) \rightarrow L_2(x_0 - 1, x_0 + 1)$$

ограничен равномерно по ε , а потому при достаточно малых значениях ε в пространстве $L_2(x_0 - 1, x_0 + 1)$ корректно определен ограниченный оператор

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) := (I - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^{-1}, \quad (3.5)$$

где I – единичный оператор, причем

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j (\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^j. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.1 [4]. Пусть $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$ и $p(0) = 1$. Тогда оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет не более одного собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это собственное значение существует, если

$$\pm \operatorname{Re} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)} > 0,$$

и отсутствует, если

$$\pm \operatorname{Re} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)} < 0.$$

Если данное собственное значение существует, то оно является простым и имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_{\varepsilon, n}^\pm = \mu_n^\pm \mp \frac{\varepsilon^2}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} (\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) \mathcal{L}_\varepsilon \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)}^2 (1 + O(\varepsilon^2)).$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

В статье [5] было доказано утверждение (лемма 3.2), частным случаем которого является следующая

ЛЕММА 4.1. Для любой функции $u \in W_{2, \text{loc}}^2(\mathbb{R})$ и достаточно малых h справедлива оценка

$$\|h^{-1/2} V_h u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W_{2, \text{loc}}^2(x_0-1, x_0+1)},$$

где постоянная C не зависит от h .

Положим

$$\varepsilon := \delta^{-1} h^{1/2} \tag{4.1}$$

и обозначим через $\mathcal{L}_\varepsilon$ оператор умножения на $h^{-1/2} V_h$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon u := h^{-1/2} V_h u. \tag{4.2}$$

В обозначениях (4.1), (4.2) и (3.2) имеем

$$\mathcal{H}^{\delta, h} = \mathcal{H}_\varepsilon. \tag{4.3}$$

ЛЕММА 4.2. Если выполнено равенство (1.1), то для ε и $\mathcal{L}_\varepsilon$, определяемых равенствами (4.1) и (4.2), справедливы соотношения (3.3) и (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.3) вытекает из равенств (4.1) и (1.1), а соотношения (3.4) следуют из определения (4.2) и леммы 4.1.

В обозначениях (4.1), (4.2) и (3.5)

$$\mathcal{A}_n^\pm(\varepsilon) = \tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) := (I - \delta^{-1} V_h \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^{-1}, \tag{4.4}$$

причем в силу леммы 4.2 оператор $\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta)$ корректно определен в пространстве $L_2(x_0 - 1, x_0 + 1)$, а в силу (3.6)

$$(\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} ((V_h \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^j V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{4.5}$$

С учетом равенств (4.1)–(4.4) и леммы 4.2 теорема 3.1 приобретает следующий вид.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнено условие (1.1) и $\mu_n^\pm$ – один из краев некоторой невырожденной лакуны в спектре оператора $\mathcal{H}_0$. Тогда оператор $\mathcal{H}^{\delta,h}$ имеет не более одного собственного значения, сходящегося к $\mu_n^\pm$ при $h \rightarrow 0$. Это собственное значение существует, если

$$\pm \operatorname{Re} (\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)} > 0,$$

и отсутствует, если

$$\pm \operatorname{Re} (\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)} < 0.$$

Если данное собственное значение существует, то оно является простым и имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_{\delta,h}^{n,\pm} = \mu_n^\pm \mp \frac{\delta^{-2}}{4|\dot{D}(\mu_n^\pm)|} (\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(x_0-1, x_0+1)}^2 (1 + O(\delta^{-2}h)). \quad (4.6)$$

Всюду далее мы считаем, что равенство (1.1) выполнено.

Из определения (3.1) оператора $\mathcal{G}_{n,0}^\pm$ вытекает

ЛЕММА 4.4. Если $f \in C(\operatorname{supp} V_h)$, то $\mathcal{G}_{n,0}^\pm(f) \in C(\operatorname{supp} V_h)$ и

$$\|\mathcal{G}_{n,0}^\pm(f)\|_{C(\operatorname{supp} V_h)} \leq c \cdot h^2 \|f\|_{C(\operatorname{supp} V_h)},$$

где постоянная c от h не зависит.

ЛЕММА 4.5. Справедливы равенства

$$((V_h \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^j V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = O(h^{2j+1}), \quad j \geq 1, \quad (4.7)$$

$$(V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = h \langle V \rangle (\phi_n^\pm(x_0))^2 + O(h^2). \quad (4.8)$$

Если $\langle V \rangle = 0$ и $\operatorname{Im} V = 0$, то

$$(V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = 2h^2 \phi_n^\pm(x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \langle V \rangle_1 + O(h^3). \quad (4.9)$$

Если $\phi_n^\pm(x_0) = 0$, то

$$((V_h \mathcal{G}_{n,0}^\pm)^j V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = O(h^{2j+2}), \quad j \geq 1, \quad (4.10)$$

$$(V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = h^3 \left(\frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \right)^2 \langle V \rangle_2 + O(h^4). \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4.7) вытекает из леммы 4.4, а равенство (4.10) – из леммы 4.4 и равенства $\phi_n^\pm(x) = O(h)$, верного при $x \in \operatorname{supp} V_h$, если $\phi_n^\pm(x_0) = 0$. Из определения V_h следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} V_h \phi_n^\pm &= \operatorname{supp} V_h, \\ V_h(x) \phi_n^\pm(x) &= V_h(x) \left(\phi_n^\pm(x_0) + (x - x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) + O(h^2) \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения (4.8), (4.9) и (4.11).

Теперь мы можем доказать теоремы 2.1–2.3. Из соотношения (4.5), леммы 4.5 и условия (1.1) следует, что при $\langle V \rangle = 0$ и $\text{Im } V = 0$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} &= h \langle V \rangle (\phi_n^\pm(x_0))^2 + O(\delta^{-1} h^3) = \\ &= 2h^2 \phi_n^\pm(x_0) \frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \langle V \rangle_1 + O(\delta^{-1} h^3). \end{aligned}$$

Кроме того, при $\phi_n^\pm(x_0) = 0$

$$(\tilde{\mathcal{A}}_n^\pm(h, \delta) V_h \phi_n^\pm, \phi_n^\pm)_{L_2(\mathbb{R})} = h^3 \left(\frac{d\phi_n^\pm}{dx}(x_0) \right)^2 \langle V \rangle_2 + O(\delta^{-1} h^4).$$

Из этих равенств и леммы 4.3 вытекает справедливость теорем 2.1–2.3.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Соотношения (4.3) и (3.2)–(3.4) позволяют использовать результаты работы [4] для выяснения качественного характера спектра оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$. В соответствии с книгой [1] определим точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{H}^{\delta, h})$ оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$ как множество всех собственных значений оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$, а остаточный спектр оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$ – как множество

$$\sigma_r(\mathcal{H}^{\delta, h}) := \sigma(\mathcal{H}^{\delta, h}) \setminus (\sigma_c(\mathcal{H}^{\delta, h}) \cup \sigma_p(\mathcal{H}^{\delta, h})).$$

Для $a \in \mathbb{C}$, $\omega > 0$ положим $S_\omega(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \omega\}$. Тогда с учетом соотношений (4.3) и (3.2)–(3.4) теоремы 2.1–2.4, 2.6 из работы [4] влекут справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. *При выполнении равенства (1.1) и достаточно малых h имеют место следующие утверждения.*

1. *Выполнены равенства $\sigma_c(\mathcal{H}^{\delta, h}) = \sigma_c(\mathcal{H}_0)$, $\sigma_r(\mathcal{H}^{\delta, h}) = \emptyset$, а точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{H}^{\delta, h})$ состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности и не имеет конечных точек накопления.*

2. *Существуют положительные $\omega_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, $i = 1, 2$, такие, что верно вложение $\sigma(\mathcal{H}^{\delta, h}) \subset S_{\omega_2(\delta^{-2}h)}(\mu_0^+ - \omega_1(\delta^{-2}h))$.*

Пусть имеет место равенство (1.1), а K – произвольный компакт в комплексной плоскости такой, что $\sigma_c(\mathcal{H}_0) \cap K \neq \emptyset$. Тогда при достаточно малых h множество $\sigma_c(\mathcal{H}^{\delta, h}) \cap K$ не содержит вложенных собственных значений, и каждое из собственных значений оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$, лежащих в K для всех достаточно малых h , при $h \rightarrow 0$ сходится к одному из краев невырожденных лакун в части спектра оператора $\mathcal{H}_0$, лежащей в множестве K .

Полностью аналогично лемме 3.1 из работы [6] легко показать справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 5.1. *Для любой функции $u \in W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{R})$ и достаточно малых h справедлива оценка*

$$\|h^{-1/2} V_h u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_1 \|u\|_{W_2^1(x_0-1, x_0+1)},$$

где постоянная C_1 не зависит от h .

Из теоремы 2.5 в статье [4] с учетом соотношений (4.3), (3.2)–(3.4) и леммы 5.1 настоящей работы вытекает, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. *При достаточно малых h непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}^{\delta, h}$ не содержит вложенных собственных значений.*

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-97007-р_поволжье_а), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6249.2010.1), Программы поддержки молодых ученых – докторов наук (грант МД-453.2010.1) и Федеральной целевой программы № 02.740.110612.

Список литературы

- [1] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1963.
- [2] M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Texts in Mathematics, Scottish Acad. Press, Edinburgh, 1973.
- [3] F. Gesztesy, B. Simon, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335**:1 (1993), 329–340.
- [4] Д. И. Борисов, Р. Р. Гадильшин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 37–66.
- [5] Р. Р. Гадильшин, И. Х. Хуснуллин, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 50–66.
- [6] И. Х. Хуснуллин, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:4 (2010), 679–698.

Поступила в редакцию 27.01.2012