Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Ряды теории возмущений в квантовой механике: фазовые переходы и точные асимптотики для коэффициентов разложения, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 3, 416–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:49:35

© 2013 г.

В. Р. Фаталов*

РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ: ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Рассматривается модель гармонического осциллятора со степенным потенциалом. Получены новые асимптотические формулы для коэффициентов разложения рядов теории возмущений по степеням константы связи в случае возмущения посредством степенного потенциала $|x|^p$, $p > 0$. Доказано существование и вычислено критическое значение p_0 , которое является пороговым в том смысле, что исследуемые коэффициенты имеют качественно разные асимптотики при $0 < p < p_0$ и при $p > p_0$. Указано, что при $p = p_0$ в рассматриваемой физической системе происходит фазовый переход. Исследование проводится с помощью метода Лапласа для функциональных интегралов по гауссовским мерам.

Ключевые слова: фазовые переходы, ряды теории возмущений, формула следа Либа, условные винеровские меры, метод Лапласа в банаховом пространстве.

DOI: 10.4213/tmf8326

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1.1. Типы фазовых переходов в теоретической физике и метод Лапласа для функциональных интегралов. Существует тесная идейная связь между теорией фазовых переходов в математической физике [1], [2] и методом Лапласа в функциональных пространствах [3], [4]. Эта связь основана на вариационном принципе Гиббса, который играет ключевую роль как в теории фазовых переходов, так и в методе Лапласа (см. [1]–[3]). Здесь можно выделить три возможные ситуации для проведения очевидных аналогий.

1. Рассматриваемый гладкий лагранжиан $\mathcal{L}$ в той или иной физической теории (квантовая механика, теория поля и другие) имеет единственное невырожденное основное состояние [1]–[5]. Основное состояние принадлежит множеству стационарных (критических, экстремальных) точек лагранжиана $\mathcal{L}$, невырожденность основного состояния означает невырожденность второй производной $\mathcal{L}''$ лагранжиана,

---

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

сам лагранжиан $\mathcal{L}$ часто называют действием. В различных физических теориях основное состояние носит такие названия, как равновесное состояние, гиббсовская мера, экстремальная мера и т. д. Метод Лапласа в функциональных пространствах, восходящий к Фейнману [6], позволяет выписать в данном случае точную асимптотику функционального интеграла, зависящего от большого параметра.

2. Особый интерес представляет случай, когда лагранжиан зависит от некоторого параметра $p > 0$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p)$. Пусть существует некоторое пороговое значение $p_0 > 0$ такое, что для значений $0 < p \leq p_0$ лагранжиан $\mathcal{L}(p)$ имеет единственное невырожденное основное состояние, а для значений $p > p_0$ лагранжиан $\mathcal{L}(p)$ имеет многообразие невырожденных основных состояний (критических) точек. Тогда мы будем говорить, что при значении параметра $p = p_0$ происходит *фазовый переход первого типа*. В этом случае точная асимптотика упомянутого выше функционального интеграла имеет иной вид по сравнению со случаем 1 (см. теорему 3.3 в [3] и работу [7]).

3. Возможен также случай, когда для некоторого порогового значения $p_0 > 0$ лагранжиан $\mathcal{L}(p)$ имеет единственное невырожденное основное состояние при значениях $0 < p \leq p_0$, а при $p > p_0$ – единственное вырожденное основное состояние. Тогда мы будем говорить, что при значении параметра $p = p_0$ происходит *фазовый переход второго типа*. В этом случае точная асимптотика упомянутого выше функционального интеграла также имеет иной вид по сравнению со случаем 1 (см. теорему 3.2 в [3]).

Из этих рассуждений следует важный вывод. Возможны ситуации, когда исследование точных асимптотик функциональных интегралов типа Лапласа в той или иной параметрической физической модели позволяет сделать вывод о существовании фазового перехода первого или второго типа и найти пороговое значение p_0 .

Один пример такой ситуации рассмотрен и исследован в статье [4]. В настоящей работе мы рассмотрим второй пример такого рода. Отметим, что техника, развитая в работах [3], [4], [7]–[12], позволяет решать многие экстремальные задачи, связанные с методом Лапласа и фазовыми переходами, для (много)параметрических физических моделей, которые основаны на гауссовских мерах, условных винеровских мерах, а также для распределений диффузионных марковских процессов и сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов.

1.2. Формулировка основных результатов. Метод функционального (по-траекторного) интегрирования находит широкое и эффективное применение в таких разделах современной теоретической физики, как квантовая теория поля, статистическая механика и ряде других [1], [13]–[15]. Особый интерес представляет важный и распространенный в теории и приложениях случай, когда исследуемый функциональный (континуальный) интеграл берется по некоторой гауссовской (в частности, условной винеровской) мере в пространстве непрерывных функций. Дело в том что в случае гауссовского функционального интеграла можно провести многие необходимые вычисления, используя хорошо развитые приближенные и асимптотические методы теории гауссовских мер [3], [8], [16]–[18]. В настоящей статье мы исследуем один важный и интересный пример подобного рода, связанный с рядами теории возмущений [13], [19]–[32].

Рассмотрим обобщение задачи теории возмущений, придерживаясь изложения книги [13].

Пусть $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ – обычное гильбертово пространство действительных функций, заданных на оси $\mathbb{R}$, со скалярным произведением $\langle y, z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)z(x) dx$. Пусть

$$L_0 := -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

– линейный дифференциальный оператор в L^2 , заданный на множестве $\mathcal{D}$ дважды дифференцируемых функций $y \in L^2$ таких, что $L_0 y \in L^2$ [13]. Данный оператор является существенно самосопряженным на $C_0^\infty(\mathbb{R})$ [5] и связан очевидным образом с гармоническим осциллятором $-d^2/dx^2 + x^2$. Собственные числа и собственные функции гармонического осциллятора хорошо известны (см., например, дополнение к § V.3 в т. 1 книги [5] и доказательство теоремы 4.6 в [13]). Учитывая этот факт, мы приходим к выводу о положительности оператора L_0 , таким образом, при всех $y \in \mathcal{D}$ выполнено неравенство $\langle L_0 y, y \rangle \geq 0$.

Для фиксированных чисел $p > 0$ и $g \geq 0$ рассмотрим следующее возмущение оператора L_0 посредством степенного потенциала:

$$L_0(g) := L_0 + g|x|^p \equiv -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + g|x|^p, \quad (1.1)$$

параметр g называется *константой связи*.

Пусть $\mathcal{D}_p := \{y(x) \in \mathcal{D} : |x|^p y(x) \in L^2\}$ – всюду плотное множество в L^2 . Как указано в следующем предложении, оператор $L_0(g)$ обладает целым рядом хороших свойств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Оператор $L_0(g)$ типа Шредингера при $g > 0$ является строго положительным существенно самосопряженным оператором, таким образом, при всех $0 \neq y \in \mathcal{D}_p$ выполнено неравенство $\langle L_0(g)y, y \rangle > 0$. Этот оператор имеет чисто дискретный простой спектр, а основная собственная функция (основное состояние) является строго положительной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгая положительность оператора $L_0(g)$, очевидно, следует из положительности оператора L_0 . Утверждения о самосопряженности и спектре оператора $L_0(g)$ следуют из общих известных результатов (см., например, книгу [5], т. 4 и сборник [33]). Строгая положительность основной собственной функции следует из теоремы XIII.47 в т. 4 книги [5].

Обозначим через $E(g) > 0$ энергию основного состояния, т.е. минимальное собственное число оператора $L_0(g)$ при $g > 0$. Во многих физических задачах вычисление энергии основного состояния $E(g)$ – это важная и сложная проблема. Случаи $p = 4$ и $p = 2N$ рассмотрены в [13] и [26] в связи с ϕ^{2N} -моделью теории поля (см. также т. 2 книги [5], § X.7, и [24], [34]). В настоящей статье мы рассмотрим случай общего $p > 0$, используя подход из книги [13].

Применяя методы теории возмущений [5], [35], мы ставим в соответствие собственному числу $E(g)$ формальный ряд теории возмущений:

$$E(g) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n. \quad (1.2)$$

При малых g этот ряд является асимптотическим в смысле Пуанкаре (см. [13], а также книгу [5], т. 4) и оказывается расходящимся (см., например, [31]). Тем не менее

известно, что в различных моделях теории поля и квантовой механики при достаточно малых g вычисления, проведенные с учетом нескольких первых членов ряда (1.2), дают хорошее согласие с экспериментальными данными и данными, полученными иными методами (например, вариационным методом или методом ренормгруппы). Типичной здесь является ситуация, описанная при $p = 4$ в книге [5], т. 4, § XII.3 (см. также пример 3 в § XII.4, т. 4 книги [5] и статью [36]).

Непосредственное вычисление самих коэффициентов a_n ряда (1.2) – непростая задача. Весьма эффективным и полезным средством при ее решении является формула Фейнмана–Каца, позволяющая связать ряд (1.2) с другим формальным асимптотическим рядом (см. формулу (1.7) ниже). Согласно формуле Фейнмана–Каца выполнено следующее соотношение [13]:

$$E(g) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \text{Tr}(e^{-\beta L_0(g)}), \quad g > 0, \quad (1.3)$$

где β – обратная температура [26], $\text{Tr } A$ обозначает след оператора A . Из формулы (1.3) следует, что для вычисления $E(g)$ нужно знать значения $\text{Tr}(e^{-\beta L_0(g)})$ при больших β . Для решения последней задачи часто применяется замечательная формула Либа, связывающая указанный след с функциональным интегралом по условной винеровской мере [13], [26], [37]. Мы запишем эту формулу в нашем случае, придерживаясь общепринятых обозначений теории случайных процессов.

Пусть $[\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}]$ – основное вероятностное пространство, $\mathbf{E}$ – оператор математического ожидания, взятый относительно вероятности $\mathbf{P}$. Везде ниже $w(t)$, $t \geq 0$, обозначает стандартный винеровский процесс, рассматриваемый как марковский процесс [38]–[40]. Ниже термин “распределение” используется как синоним термина “вероятностная мера”.

Пусть $C[0, \beta]$ – банахово пространство непрерывных на $[0, \beta]$ действительных функций $x(t)$ с нормой $\|x\|_\infty := \sup_{t \in [0, \beta]} |x(t)|$ и борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_\beta$. Обозначим через $P_w\{(\cdot) \mid x(0) = y\}$ распределение в пространстве $C[0, \beta]$ винеровского процесса, выходящего из точки $y \in \mathbb{R}$. Таким образом, для любого $C \in \mathcal{B}_\beta$ выполнено равенство

$$P_w\{C \mid x(0) = y\} = \mathbf{P}\{w \in C \mid w(0) = y\}. \quad (1.4)$$

Аналогично для точек $y, z \in \mathbb{R}$ определим условное распределение в пространстве $C[0, \beta]$ винеровского процесса, выходящего в начальный момент из точки y и входящего в момент β в точку z :

$$P_w\{C \mid x(0) = y, x(\beta) = z\} = \mathbf{P}\{w \in C \mid w(0) = y, w(\beta) = z\} \quad (1.5)$$

для любого $C \in \mathcal{B}_\beta$. Отметим, что распределение (1.4) при $y = 0$, т.е. распределение $P_w\{(\cdot) \mid x(0) = 0\}$, общепринято называть *винеровской мерой* в $C[0, \beta]$ (см., например, [41]). Отметим, что в интересной и содержательной книге [13] винеровской мерой назван иной объект, и это надо иметь в виду при чтении книги [13]. Распределение (1.5) часто называют *условной винеровской мерой*, а также распределением броуновского моста из точки y в точку z [39]. Во введенных обозначениях упомянутая формула Либа для следа записывается следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для чисел $p > 0$, $g \geq 0$, $\beta > 0$ и оператора $L_0(g)$, заданного в (1.1), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta L_0(g)}) &= \frac{e^{\beta/2}}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{C[0,\beta]} \exp \left\{ -g \int_0^{\beta} |x(t)|^p dt - \frac{1}{2} \int_0^{\beta} x^2(t) dt \right\} \times \\ &\times P_w\{dx \mid x(0) = x(\beta) = y\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Формула (1.6), отсутствующая в книге [13], получена нами на основе соотношений (9.6), (18.5), (18.6) из [13], при этом мы выразили меры $d\mu_{0,T}$, $d\mu_{0,x,x,t}$ с помощью распределения (1.5). Формулу (1.6) можно проверить при $g = 0$: вычисляя двумя разными способами при $g = 0$ левую и правую части равенства (1.6), мы получаем одно и то же число $e^{\beta}/(e^{\beta} - 1)$. Вычисление левой части равенства (1.6) при $g = 0$ проводится просто, следует рассмотреть известные значения всех собственных чисел оператора L_0 , описанные в книге [5], т. 1. Вычисление правой части равенства (1.6) при $g = 0$ проводится значительно сложнее, оно основано на формуле (3.18) из [13] для гауссовских интегралов типа Лапласа с квадратичной функцией в показателе экспоненты.

Разлагая экспоненту в правой части формулы (1.6) в ряд по степеням константы связи g и формально меняя порядок суммирования и интегрирования, мы получаем следующее формальное равенство:

$$\text{Tr}(e^{-\beta L_0(g)}) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\beta) g^n, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} b_n(\beta) \equiv b_n(\beta, p) &= \frac{(-1)^n e^{\beta/2}}{n! \sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{C[0,\beta]} \left(\int_0^{\beta} |x(t)|^p dt \right)^n \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{\beta} x^2(t) dt \right\} P_w\{dx \mid x(0) = x(\beta) = y\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ряд (1.7) для малых g является асимптотическим в смысле Пуанкаре и также оказывается расходящимся. Как указано в книге [13], связь между двумя рядами (1.2) и (1.7) несложная, следует учесть формулы (1.3), (1.6) и разложение Тейлора для функции $\ln(1+x)$. Информация о коэффициентах $b_n(\beta)$ при больших фиксированных β используется для получения оценок и приближенных значений коэффициентов a_n (см., в частности, формулы (7)–(9) в статье [26]). Большой интерес представляет порядок роста коэффициентов a_n и $b_n(\beta)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. работы [19]–[22], [25]–[28], литературные ссылки в [31], [32], а также теорему 18.3 в [13]).

В настоящей статье на основе метода Лапласа в функциональном пространстве, примененного к интегралу в (1.8), мы получим теорему о точной асимптотике коэффициентов $b_n(\beta, p)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных $p > 0$, $\beta > 0$. Насколько известно автору, в литературе подобная задача не рассматривалась. Особый интерес в физических теориях представляет случай $p = 2N$, где натуральный параметр N – размерность. Оказалось, что в указанной выше задаче существует *пороговое значение*

$$p_0 \equiv p_0(\beta) := 2 + \frac{4\pi^2}{\beta^2} \quad (1.9)$$

в том смысле, что коэффициенты $b_n(\beta, p)$ имеют качественно разные асимптотики при $0 < p < p_0$ и при $p > p_0$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$b_n(\beta, p) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{np}{e} \right)^{np/2} \beta^{n(2-p)/2} \frac{e^{\beta/2} \sqrt{2-p}}{\sqrt{2} \operatorname{sh}((\beta/2)\sqrt{2-p})} (1 + o(1)). \quad (1.10)$$

2. При $p = 2$ и $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое соотношение

$$b_n(\beta, 2) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{2n}{e} \right)^n \frac{\sqrt{2} e^{\beta/2}}{\beta} (1 + o(1)). \quad (1.11)$$

3. Пусть фиксировано число $2 < p < p_0(\beta)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$b_n(\beta, p) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{np}{e} \right)^{np/2} \beta^{n(2-p)/2} \frac{e^{\beta/2} \sqrt{p-2}}{\sqrt{2} \sin((\beta/2)\sqrt{p-2})} (1 + o(1)). \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Возникновение порогового значения p_0 имеет то же объяснение, что и в работе [4]. А именно, можно показать, что при $p > p_0$ соответствующая экстремальная задача для функционала действия в методе Лапласа имеет однопараметрическое многообразие решений (ср. с леммой 10 в работе [4] и с теоремой 1 в статье [17]). Таким образом, в соответствии с п. 1.1 в рассматриваемой физической системе при $p = p_0 = 2 + 4\pi^2/\beta^2$ происходит фазовый переход первого типа. Отсюда следует, что при $p = 2N$ для некоторых значений β можно вычислить критическую размерность $N_0 = p_0/2 = 1 + 2\pi^2/\beta^2$ (ср. с [1]). Отсюда также вытекает, что для фиксированного $p = 2N$ существует критическая температура $\beta_0 = 2\pi/\sqrt{2N-2}$, при которой в рассматриваемой физической системе происходит фазовый переход.

Исследованию точной асимптотики коэффициентов $b_n(\beta, p)$ в случае $p > p_0(\beta)$ при $n \rightarrow \infty$ целесообразно посвятить отдельную работу. Последняя задача имеет важное значение в ϕ^{2N} -теории поля при больших $p = 2N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для порогового числа $p = p_0 = 2 + 4\pi^2/\beta^2$ асимптотическое поведение коэффициентов $b_n(\beta, p)$ нужно исследовать отдельно. Здесь возникает так называемый вырожденный случай (см., в частности, теорему 2.3 в статье [18]). Логарифмическая асимптотика при этом имеет тот же вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n! n^{-np_0/2} (-1)^n b_n(\beta, p_0)) = \frac{p_0}{2} \ln \frac{p_0}{e} + \frac{2-p_0}{2} \ln \beta. \quad (1.13)$$

При $p = 4$ мы получаем из п. 3 теоремы 1.1 следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть фиксировано число $0 < \beta < \pi\sqrt{2}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$b_n(\beta, 4) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{4n}{e} \right)^{2n} \beta^{-n} \frac{e^{\beta/2}}{\sin(\beta/\sqrt{2})} (1 + o(1)). \quad (1.14)$$

В теореме 18.3 из книги [13] была найдена следующая логарифмическая асимптотика при $p = 4$ и $\beta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n! n^{-2n} (-1)^n b_n(\beta, 4)) = -\alpha(\beta), \quad (1.15)$$

при этом значение числа $\alpha(\beta)$ указано не было. Сравнивая формулы (1.14) и (1.15), находим значение постоянной $\alpha(\beta)$:

$$\alpha(\beta) = \ln \frac{e^2 \beta}{16} \quad \text{при} \quad 0 < \beta < \pi\sqrt{2}. \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что $\alpha(\beta)$ – знакопеременная постоянная, а именно, $\alpha(\beta) > 0$ при $16/e^2 < \beta < \pi\sqrt{2}$, $\alpha(\beta) = 0$ при $\beta = 16/e^2$ и $\alpha(\beta) < 0$ при $0 < \beta < 16/e^2$. В силу предложения 1.3 равенство (1.16) выполнено и при $\beta = \pi\sqrt{2}$, т. е. $\alpha(\pi\sqrt{2}) = \ln(e^2 \pi\sqrt{2}/16)$. Можно показать, что при $\beta > \pi\sqrt{2}$ формула (1.16) уже неверна.

2. МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКИХ МЕР В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В настоящем разделе мы изложим два основных результата, при помощи которых доказываются теорема 1.1 и предложение 1.3. Необходимые сведения о гауссовских мерах в банаховых пространствах можно найти в книгах [41]–[44].

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ – действительное сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра в B , B^* – сопряженное к B пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между B и B^* . Пусть P_A – гауссовская мера на $\mathcal{B}$, имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор $A: B^* \rightarrow B$. Напомним, что ковариационный оператор является симметричным, положительным и ядерным [42]. Инъективность оператора A означает, что $\langle Ay, y \rangle > 0$ для всех $0 \neq y \in B^*$.

Обозначим через $S'(x)$ и $S''(x)$ первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S: B \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x . Мы будем предполагать, что производные $S'(x)$ и $S''(x)$ можно рассматривать как ограниченные линейные операторы из B в $\mathbb{R}$ и из B в B^* соответственно, при этом будем употреблять запись

$$S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle, \quad S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle, \quad h, v \in B.$$

Обозначим через $\text{Dom}(S)$ область определения оператора S , а через $\text{Ran}(S)$ – область значений оператора S , введем также I – тождественный оператор в B . Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ – гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A , т. е. пополнение области значений $\text{Ran}(A)$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|y\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in B^*$ [42].

2.1. Точные асимптотики для гауссовских интегралов типа Лапласа. Предположим, что выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Пусть f и F – непрерывные действительные функции, заданные на B , такие, что для некоторых постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$, $0 \leq c_3 < (2\|A\|)^{-1}$ и $c_4 \geq 0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq c_1 e^{c_2 \|x\|^2}, \quad F(x) \geq -c_3 \|x\|^2 - c_4, \quad x \in B.$$

УСЛОВИЕ 2. Функционал $\Lambda(x) := F(x) + \langle x, A^{-1}x \rangle/2$ достигает своего минимума на $\text{Dom}(A^{-1})$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$. Предположим, что

$$\inf_{x \in H_A} \left\{ F(x) + \frac{\|x\|_A^2}{2} \right\}$$

также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

УСЛОВИЕ 3. В пространстве B существуют окрестности U_i точек x^i такие, что функция F трижды дифференцируема по Фреше в точках множеств U_i , причем $f(x^i) \neq 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, m$.

УСЛОВИЕ 4. Для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ конечен и не равен нулю интеграл

$$D_i := \int_B e^{-\langle x, F''(x^i)x \rangle/2} dP_A(x). \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть P_A – гауссовская мера в B , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия 1–4. Тогда $D_i > 0$, для всех $i = 1, 2, \dots, m$ имеют место равенства $x^i = -AF'(x^i)$ и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_B f(x) e^{-u^2 F(x)} dP_A(x) = e^{-u^2 \Lambda(x^1)} \sum_{i=1}^m f(x^i) D_i \cdot (1 + o(1)). \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях теоремы 2.1 часто бывает полезной формула

$$D_i = [\det(I + AF''(x^i))]^{-1/2}, \quad \det(I + AF''(x^i)) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \gamma_{ik}),$$

где γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, – собственные значения ядерного оператора $AF''(x^i): B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots, m$ [4], [8]. Однако в настоящей работе нам будет удобнее вычислять постоянные D_i непосредственно по формуле (2.1).

Теорема 2.1 представляет собой банаховозначный вариант известного результата Эллиса и Розен [18] об асимптотическом разложении гауссовского интеграла типа Лапласа в гильбертовом пространстве (см. также работу [3]).

2.2. Логарифмические асимптотики для гауссовских мер и интегралов.

Принцип больших уклонений. Принцип больших уклонений для вероятностных мер и интегралов по ним (см. [3], [4], [45]–[48]) позволяет вычислить логарифмическую асимптотику интеграла из формулы (2.2) в тех случаях, когда вычисление точной асимптотики затруднено.

ТЕОРЕМА 2.2 (принцип больших уклонений для гауссовских мер). Пусть P_A – гауссовская мера в банаховом пространстве B , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Тогда семейство гауссовских мер

$$\{P_A(uC), u > 0\}, \quad C \in \mathcal{B},$$

удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия I_A , имеющим следующий вид:

$$I_A(x) = \begin{cases} \|x\|_A^2/2, & \text{если } x \in H_A, \\ +\infty, & \text{если } x \in B \setminus H_A. \end{cases}$$

Следовательно, для любой непрерывной функции $F: B \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию 1, справедливо соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \int_B e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) = - \inf_{x \in B} \{F(x) + I_A(x)\}. \quad (2.3)$$

На основе соотношения (2.3) проводится вывод логарифмической асимптотики в формуле (1.13). Нам понадобится также следующий интересный результат, полезный при вычислениях, связанных с гауссовскими мерами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть P_A – гауссовская мера в сепарабельном банаховом пространстве B с нулевым средним и инъективным ковариационным оператором A . Пусть $C: B \rightarrow B^*$ – непрерывный симметричный линейный оператор такой, что оператор $A^{-1} - C$ строго положителен, т.е. $\langle x, (A^{-1} - C)x \rangle > 0$ для всех $x \neq 0$ из $\text{Dom}(A^{-1})$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) имеет место формула

$$M := \int_B e^{\langle x, Cx \rangle/2} P_A(dx) < \infty; \quad (2.4)$$

2) $M = [\det(I - AC)]^{-1/2}$ при условии, что детерминант конечен;

3) вероятностная мера

$$\gamma(dx) := \frac{1}{M} e^{\langle x, Cx \rangle/2} P_A(dx) \quad (2.5)$$

является гауссовской мерой на B с нулевым средним и инъективным ковариационным оператором $A_\gamma := (A^{-1} - C)^{-1} \equiv (I - AC)^{-1}A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения проводится по схеме доказательства известных аналогичных утверждений. В случае гильбертова пространства данное предложение доказано в работе [18] (см. также [13]). В банаховом пространстве можно применить те же рассуждения, если использовать пространство H_A , одно из таких обобщений доказано в работе [49].

3. ВЫБОР БАНАХОВА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Доказательство теоремы 1.1 проводится при помощи теоремы 2.1. Покажем, что достаточно доказать теорему 1.1 в некотором более простом варианте, сформулированном для пространства $C[0, 1]$.

3.1. Переход к пространству $C[0, 1]$. Пусть $w_0(t) := \{w(t) \mid w(0) = 0, w(1) = 0\}$, $t \in [0, 1]$, обозначает стандартный броуновский мост [39]. Как известно, $w_0(t)$ – это гауссовский процесс с почти наверное непрерывными траекториями, нулевым средним и ковариационной функцией $\mathbf{E}w_0(t)w_0(s) = \min(t, s) - ts$, $t, s \in [0, 1]$. Обозначим через P_{w_0} распределение процесса $w_0(t)$ в пространстве $C[0, 1]$. Легко видеть, что мера P_{w_0} сосредоточена на подпространстве $C^0[0, 1] := \{x \in C[0, 1] : x(0) = x(1) = 0\}$ пространства $C[0, 1]$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть фиксированы числа $p > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 1$. Тогда выполнено следующее равенство:

$$b_n(\beta, p) = \frac{(-1)^n e^{\beta/2}}{n! \sqrt{2\pi}} \beta^{n(p+2)/2} K(n, \beta, p), \quad (3.1)$$

где

$$K(n, \beta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{C[0,1]} \left(\int_0^1 |x(s) + v|^p ds \right)^n \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2} \int_0^1 (x(s) + v)^2 ds \right\} P_{w_0}(dx). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (1.8), получаем следующее равенство:

$$b_n(\beta, p) = \frac{(-1)^n e^{\beta/2}}{n! \sqrt{2\pi\beta}} K_1(n, \beta, p), \quad (3.3)$$

где

$$K_1(n, \beta, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{C[0,\beta]} \left(\int_0^\beta |x(t) + y|^p dt \right)^n \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta (x(t) + y)^2 dt \right\} P_w\{dx \mid x(0) = x(\beta) = 0\}. \quad (3.4)$$

В силу автомодельности винеровского процесса, выходящего из нуля [39], для любого фиксированного $\beta > 0$ процессы $\{w(\beta s) \mid w(0) = 0, w(\beta) = 0\}$, $0 \leq s \leq 1$, и $\{\beta^{1/2}w(s) \mid w(0) = 0, w(1) = 0\}$, $0 \leq s \leq 1$, имеют одинаковые распределения. Учитывая этот факт, в результате замены переменной $t = \beta s$ в интеграле из формулы (3.4) получаем равенство

$$K_1(n, \beta, p) = \beta^{n(p+2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{C[0,1]} \left(\int_0^1 \left| x(s) + \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right|^p ds \right)^n \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2} \int_0^1 \left(x(s) + \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right)^2 ds \right\} P_{w_0}(dx).$$

Сделаем замену переменной $v = y/\sqrt{\beta}$, получим $K_1(n, \beta, p) = \beta^{(n(p+2)+1)/2} K(n, \beta, p)$, где $K(n, \beta, p)$ задано в (3.2). Отсюда и из равенства (3.3) вытекает формула (3.1). Лемма доказана.

3.2. Выбор банахова пространства и гауссовской меры. Цель настоящего пункта – преобразовать интеграл (3.2) так, чтобы к преобразованному интегралу была применима теорема 2.1.

Пусть $L^p = L^p[0, 1]$ – множество измеримых функций, интегрируемых в p -й степени на отрезке $[0, 1]$. Положим

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p > 0.$$

Как известно, при $p \geq 1$ пространство $(L^p, \|\cdot\|_p)$ является банаховым. Для фиксированного числа $p > 0$ положим

$$\tilde{p} = \max(p, 2). \quad (3.5)$$

Таким образом, в наших рассуждениях $\tilde{p} \geq 2$. Пусть $\tilde{q}$ обозначает число, сопряженное к $\tilde{p}$, т.е. $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$, очевидно, в нашем случае $2 \geq \tilde{q} > 1$. Напомним, что банахово пространство $L^{\tilde{q}}$ является сопряженным к пространству $L^{\tilde{p}}$. Как известно, каноническая билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между пространствами $L^{\tilde{p}}$ и $L^{\tilde{q}}$ имеет интегральный вид:

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t)g(t) dt, \quad h \in L^{\tilde{p}}, \quad g \in L^{\tilde{q}}. \quad (3.6)$$

Мы будем рассматривать гауссовскую меру P_{w_0} , полагая ее заданной в пространстве $L^{\tilde{p}}$, но имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C[0, 1]$.

Применяя теорему Фубини (см. также монографии [41] и [44]), несложно убедиться, что в нашем случае гауссовская мера P_{w_0} имеет нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор $A_{w_0}: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ интегрального типа:

$$A_{w_0}x(t) = \int_0^1 (\min(t, s) - ts)x(s) ds, \quad x \in L^{\tilde{q}}. \quad (3.7)$$

Отметим, что оператор A_{w_0} зависит от $\tilde{p}$, в частности $\text{Dom}(A_{w_0}) = L^{\tilde{q}}$, однако указывать эту зависимость мы не будем. Обозначим через $C^2[0, 1]$ множество дважды дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций. Утверждения следующих двух лемм хорошо известны [50], мы их приводим для удобства ссылок.

ЛЕММА 3.2. *Область значений ковариационного оператора A_{w_0} , определенного в формуле (3.7), имеет вид*

$$\text{Ran}(A_{w_0}) = \{x \in C^2[0, 1]: x(0) = x(1) = 0\}. \quad (3.8)$$

Обратный оператор задается формулой

$$[A_{w_0}^{-1}y](t) = -y''(t), \quad y \in \text{Ran}(A_{w_0}), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.3. *Собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ ковариационного оператора A_{w_0} имеют следующий вид:*

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

им соответствуют собственные функции

$$\phi_k(t) = \sqrt{2} \sin(\pi kt), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

которые составляют ортонормированный базис в L^2 .

Возьмем в качестве банахова пространства B из теоремы 2.1 прямое произведение

$$B = \mathbb{R} \times L^{\tilde{p}} \quad (3.12)$$

двух банаховых пространств – одномерного пространства $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ и пространства $(L^{\tilde{p}}, \|\cdot\|_{\tilde{p}})$ [51]. Элемент $z \in B$ будем записывать в следующем виде:

$$z = (y, x), \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (3.13)$$

Напомним, что B является банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_B$, заданной равенством

$$\|z\|_B^{\tilde{p}} := |y|^{\tilde{p}} + \|x\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}}, \quad z = (y, x) \in B. \quad (3.14)$$

В качестве гауссовской меры $P_A(dz)$ на пространстве (3.12) возьмем гауссовскую меру-произведение

$$P_A(dz) = \nu_\beta(dz) \equiv \nu_\beta(dy, dx) := \mu_\beta(dy) \times P_{w_0}(dx), \quad z = (y, x), \quad (3.15)$$

где

$$\mu_\beta(dy) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta^2 y^2/2} dy, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

– одномерная гауссовская мера на прямой с нулевым средним и дисперсией $1/\beta^2$, а P_{w_0} – определенная выше гауссовская мера на $L^{\tilde{p}}$. Меры-произведения рассмотрены в книгах [42], [51].

Сопряженным к пространству (3.12) является пространство $B^* = \mathbb{R} \times L^{\tilde{q}}$. Каноническую билинейную форму между пространствами B и B^* обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$. Несложно вывести, используя (3.14), что в гильбертовом случае при $\tilde{p} = 2$ (и, следовательно, $\tilde{q} = 2$) выполнено равенство

$$\langle z_1, z_2 \rangle_B = y_1 y_2 + \langle x_1, x_2 \rangle, \quad z_1 = (y_1, x_1) \in B, \quad z_2 = (y_2, x_2) \in B^*, \quad (3.17)$$

где билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определена в (3.6).

ЛЕММА 3.4. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Мера $\nu_\beta(dy, dx)$, заданная в (3.15), является гауссовской мерой с нулевым средним и ковариационным оператором $A_\nu: B^* \rightarrow B$ следующего вида:

$$A_\nu(y, x) = \left(\frac{y}{\beta^2}, A_{w_0} x \right), \quad (y, x) \in B^*, \quad (3.18)$$

где оператор A_{w_0} задан в формуле (3.7).

2. Область значений ковариационного оператора A_ν есть

$$\text{Ran}(A_\nu) = \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0}), \quad (3.19)$$

где $\text{Ran}(A_{w_0})$ определена в (3.8). Обратный оператор задается формулой

$$A_\nu^{-1}(y, x) = (\beta^2 y, A_{w_0}^{-1} x) = (\beta^2 y, -x''), \quad (y, x) \in \text{Ran}(A_\nu). \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 получаем, используя формулы (3.15)–(3.17) и вид характеристического функционала гауссовской меры (см. предложение 2.8 в книге [42]). Утверждение 2 вытекает непосредственно из первого утверждения и формул (3.8), (3.9).

3.3. Выбор основного функционала. Учитывая формулу (3.2), возьмем в качестве функционала F из теоремы 2.1 следующий функционал:

$$F(z) \equiv F(y, x) := \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 (x(t) + y)^2 dt - \ln \int_0^1 |x(t) + y|^p dt - \frac{\beta^2 y^2}{2}, \quad (3.21)$$

где $z = (y, x) \in B$. Приводя подобные члены, заключаем, что

$$F(y, x) = \frac{\beta^2}{2} \left(\int_0^1 x^2(t) dt + 2y \int_0^1 x(t) dt \right) - \ln \int_0^1 |x(t) + y|^p dt. \quad (3.22)$$

ЛЕММА 3.5. Для фиксированных чисел $p > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 1$ выполнено равенство

$$K(n, \beta, p) = n^{np/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} K_2(n, \beta, p), \quad (3.23)$$

где

$$K_2(n, \beta, p) = \int_B e^{-nF(z)} d\nu_\beta(z\sqrt{n}). \quad (3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив в формуле (3.2) y вместо v и используя соотношения (3.15), (3.16) и (3.22), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} K(n, \beta, p) &= n^{np/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\beta(dy) \int_{L^{\bar{p}}} \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{2} \left(\int_0^1 x^2(t) dt + 2y \int_0^1 x(t) dt \right) + \right. \\ &\quad \left. + n \ln \int_0^1 \left| \frac{x(t) + y}{\sqrt{n}} \right|^p dt \right\} P_{w_0}(dx) = \\ &= n^{np/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \int_{\mathbb{R} \times L^{\bar{p}}} \exp \left\{ -nF \left(\frac{y}{\sqrt{n}}, \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \nu_\beta(dy, dx). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и формул (3.12), (3.13) следует утверждение леммы.

Нам понадобится следующее полезное неравенство для функционала $\|\cdot\|_p$. Напомним, что $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ для $x \in C[0, 1]$.

ЛЕММА 3.6. Пусть фиксированы числа $0 < s < r \leq \infty$. Если $\|x\|_r < \infty$, то справедливо неравенство

$$\|x\|_s \leq \|x\|_r. \quad (3.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы при $r < \infty$ имеется в книге [52]. При $r = \infty$ неравенство (3.25) очевидно.

4. НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.1. РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Мы применим теорему 2.1 к модельному интегралу Лапласа (3.24), полагая в нем $B = \mathbb{R} \times L^{\bar{p}}$, $P_A(dz) = \nu_\beta(dz)$, $f(x) \equiv 1$, при большом параметре $u = \sqrt{n}$. Доказательство всех трех пунктов теоремы 1.1 до определенного момента проводится единым образом, при этом некоторые утверждения ниже мы формулируем и доказываем сразу для общего случая $0 < p < \infty$. Очевидно, что функционал (3.21) и ковариационный оператор (3.18) удовлетворяют условию 1.

Далее мы используем определение производной по Фреше, данное в монографии [53], где допускается, чтобы рассматриваемый оператор был определен всего лишь на некотором всюду плотном подмножестве банахова пространства, при этом возможны значения производных, равные $\pm\infty$ (см. определение 1 в [54]). Функционал $F(y, x)$ согласно (3.21) представляет собой линейную комбинацию квадратичного функционала и логарифма интегрального функционала. Как известно, интегральные функционалы дифференцируемы по Фреше [52]–[54].

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество функций из $C[0, 1]$, имеющих конечное число нулей. Очевидно, множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C[0, 1]$ и, следовательно, в $L^{\tilde{p}}$. Положим $\mathcal{Z} = \mathbb{R} \times \mathcal{X}$.

ЛЕММА 4.1. *Для фиксированных чисел $\beta > 0$ и $p > 0$ функционал $F(z)$, заданный в (3.21), трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $z \in \mathcal{Z}$. При $p \geq 2$ и $z \in \mathcal{Z}$ оператор $F''(z): B \rightarrow B^*$ является ограниченным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы мы получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [54] и известные формулы для первых двух производных функционала $\hat{F}(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$.

Решение экстремальной задачи. Согласно формулам (3.17)–(3.20) основная экстремальная задача из условия 2 имеет вид

$$\Lambda(z) := F(z) + \frac{1}{2} \langle z, A_\nu^{-1} z \rangle_B \equiv F(y, x) + \frac{\beta^2 y^2}{2} + \frac{1}{2} \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \rightarrow \inf_z, \quad (4.1)$$

где $z = (y, x) \in \text{Ran}(A_\nu)$. Учитывая (3.21), заключаем, что эту задачу можно записать в следующей форме:

$$\Lambda(y, x) \equiv \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 (x(t) + y)^2 dt - \ln \int_0^1 |x(t) + y|^p dt + \frac{1}{2} \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \rightarrow \inf_{(x, y)}, \quad (4.2)$$

где $(y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})$.

ЛЕММА 4.2. *Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $0 < p \leq p_0(\beta)$. Тогда минимум в экстремальной задаче (4.2) достигается только в двух точках*

$$z_0 = (y_0, 0) = \left(\frac{\sqrt{p}}{\beta}, 0 \right), \quad -z_0 = -\left(\frac{\sqrt{p}}{\beta}, 0 \right). \quad (4.3)$$

При этом

$$\min_{(y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})} \Lambda(y, x) = \Lambda(z_0) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{\beta^2}. \quad (4.4)$$

Кроме того,

$$\inf_{z \in H_{A_\nu}} \left\{ F(z) + \frac{\|z\|_{A_\nu}^2}{2} \right\}$$

также достигается только в точках $\pm z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы довольно сложное, мы его приведем после того, как докажем несколько вспомогательных утверждений.

Для $1 \leq p \leq \infty$ обозначим через $\|A_{w_0}\|_p$ норму ковариационного оператора $A_{w_0}: (L^p)^* \rightarrow L^p$.

ЛЕММА 4.3. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $p > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Минимум в задаче (4.2) достигается.
2. Выполнено неравенство (оценка сверху)

$$\min_{(y,x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})} \Lambda(y, x) \leq \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{\beta^2}, \quad (4.5)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $(y, x) = \pm(y_0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя доказательство теоремы Ландау–Маркуса–Шеппа–Ферника из статьи [55], убеждаемся, что справедливо неравенство

$$\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \geq \frac{\|x\|_p^2}{\|A_{w_0}\|_{\tilde{p}}}, \quad x \in L^{\tilde{p}}, \quad (4.6)$$

где квадратичную форму $\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle$ мы распространили по непрерывности на все пространство $L^{\tilde{p}}$. Из формул (3.5), (4.6) и первой теоремы Вейерштрасса (см. замечание 9.1 в [53]) следует, что минимум в задаче (4.2) достигается, поскольку в силу (3.25) мы имеем $\|x\|_2 \geq \|x\|_p$ при $0 < p \leq 2$. Первое утверждение леммы доказано.

Завершим доказательство леммы. Учитывая неравенство $\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \geq 0$, заключаем, что справедлива следующая оценка сверху:

$$\min_{(y,x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})} \Lambda(y, x) \leq \min_{y \in \mathbb{R}} \Lambda(y, 0). \quad (4.7)$$

Нетрудно видеть, что функция $\Lambda(y, 0) = \beta^2 y^2 / 2 - p \ln |y|$ достигает своего минимума при $y \in \mathbb{R}$ в двух точках $\pm y_0 = \pm \sqrt{p}/\beta$, при этом

$$\Lambda(y_0, 0) = \Lambda(-y_0, 0) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{\beta^2}.$$

Отсюда и из неравенства (4.7) вытекает оценка (4.5). Знак равенства в (4.5) имеет место тогда и только тогда, когда $(y, x) = \pm(y_0, 0)$, так как $\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle > 0$ при $0 \neq x \in \text{Ran}(A_{w_0})$. Лемма доказана.

Используя методы вариационного исчисления [54] и учитывая лемму 4.1 и п. 2 леммы 4.3, исследуем гладкую экстремальную задачу (4.2). Опишем стационарные точки этой задачи. Частные производные и производная по Фреше функции двух переменных определены в книге [54], напомним также, что $\mathcal{Z} = \mathbb{R} \times \mathcal{X}$.

ЛЕММА 4.4. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $p > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Функция $\Lambda(y, x)$, заданная в (4.2), дважды дифференцируема по Фреше в каждой точке $z = (y, x) \in \mathcal{Z}$. Первая производная имеет вид

$$\Lambda'(y, x)[g, h] = \frac{\partial}{\partial y} \Lambda(y, x)g + \frac{\partial}{\partial x} \Lambda(y, x)[h], \quad g \in \mathbb{R}, \quad h \in \text{Ran}(A_{w_0}),$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Lambda(y, x) &= \beta^2 \int_0^1 x(t) dt + \beta^2 y - \frac{p \int_0^1 |x(t) + y|^{p-1} \operatorname{sgn}(x(t) + y) dt}{\int_0^1 |x(t) + y|^p dt}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\Lambda(y, x) &= \beta^2 x(t) + \beta^2 y + A_{w_0}^{-1}x - \frac{p|x(t) + y|^{p-1} \operatorname{sgn}(x(t) + y)}{\int_0^1 |x(t) + y|^p dt}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

2. Множеству стационарных точек, т.е. множеству решений системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y}\Lambda(y, x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Lambda(y, x) = 0, \quad (4.9)$$

принадлежат точки $\pm z_0 = \pm(y_0, 0)$, заданные в (4.3).

3. Квадратичная форма, построенная по производной $\Lambda''(z_0)$, имеет вид

$$\langle z, \Lambda''(z_0)z \rangle_B = \beta^2(p-2)(\langle x, \mathbf{1} \rangle^2 - \langle x, x \rangle) + \langle x, A_{w_0}^{-1}x \rangle + 2\beta^2(y + \langle x, \mathbf{1} \rangle)^2, \quad (4.10)$$

где $z = (y, x)$ и $\mathbf{1}$ – функция, тождественно равная единице на отрезке $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три утверждения леммы выводятся в результате несложных вычислений при помощи теоремы о суперпозиции дифференцируемых отображений [54] и известных формул для первых двух производных функционала $\hat{F}(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt$. Отметим, что стационарные точки $\pm z_0$ в п. 2 были найдены как решения системы (4.9), являющиеся постоянными функциями. При этом учитывалось, что единственная постоянная функция, принадлежащая множеству $\operatorname{Ran}(A_{w_0})$, – это функция, тождественно равная нулю на отрезке $[0, 1]$. Лемма доказана.

Определим оператор $\Lambda_0 \equiv \Lambda_0(z_0): L^2 \rightarrow L^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 x &= \beta^2(p-2)(\langle x, \mathbf{1} \rangle - x) + A_{w_0}^{-1}x \equiv \\ &\equiv -x''(t) - \beta^2(p-2)x(t) + \beta^2(p-2)\langle x, \mathbf{1} \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Тогда формулу (4.10) можно записать как

$$\langle z, \Lambda''(z_0)z \rangle_B = \langle x, \Lambda_0 x \rangle + 2\beta^2(y + \langle x, \mathbf{1} \rangle)^2, \quad z = (y, x). \quad (4.12)$$

Некоторые полезные свойства оператора (4.11) описаны в следующей лемме.

ЛЕММА 4.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для фиксированных чисел $\beta > 0$ и $0 < p < \infty$ квадратичная форма $\langle x, \Lambda_0 x \rangle$ ограничена снизу. А именно, при $0 < p \leq 2$ имеет место оценка

$$\langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq \pi^2 \langle x, x \rangle \geq 0, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.13)$$

При $2 \leq p < \infty$ выполнено неравенство

$$\langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq (\pi^2 + \beta^2(2-p))\langle x, x \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.14)$$

2. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $2 < p < \infty$. Тогда оператор Λ_0 является симметричным и имеет чисто дискретный простой спектр. Множество собственных чисел оператора Λ_0 есть $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty \cup \{\tilde{\gamma}_k\}_{k=1}^\infty$, где

$$\gamma_k = 4k^2\pi^2 + \beta^2(2-p), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

им соответствуют нормированные в L^2 собственные функции

$$e_k(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (4.16)$$

собственные числа $\tilde{\gamma}_k$ имеют вид

$$\tilde{\gamma}_k = 4\theta_k^2 + \beta^2(2-p), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (4.17)$$

здесь $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < \dots$ – однократные положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{4\theta^3}{\beta^2(2-p)}, \quad \theta > 0. \quad (4.18)$$

Оператор Λ_0 имеет нулевое ядро при $p \neq 2 + 4\pi^2 k^2 / \beta^2$, $k = 1, 2, \dots$.

3. Для фиксированных чисел $\beta > 0$ и $0 < p < p_0(\beta)$, где $p_0(\beta)$ задано в (1.9), имеют место неравенства

$$0 < \theta_1 < \pi, \quad 4\theta_1^2 + \beta^2(2-p) > 0, \quad (4.19)$$

$$\langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq (4\theta_1^2 + \beta^2(2-p)) \langle x, x \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.20)$$

При $p = p_0(\beta)$ выполнены соотношения

$$\theta_1 = \pi, \quad 4\theta_1^2 + \beta^2(2-p_0) = 0, \quad \langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq 0, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Шварца $\langle x, \mathbf{1} \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle$ для всех $x \in L^2$. Отсюда и из (4.11) вытекает следующее неравенство при $0 < p \leq 2$:

$$\langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.22)$$

Согласно лемме 3.2 оператор $A_{w_0}^{-1}$ является симметричным инъективным оператором Штурма–Лиувилля в пространстве L^2 и имеет чисто дискретный простой спектр [56]. В силу леммы 3.3 собственные числа оператора $A_{w_0}^{-1}$ имеют вид $1/\lambda_k = \pi^2 k^2$, $k = 1, 2, \dots$, а соответствующие собственные векторы (3.11) составляют ортонормированный базис в L^2 . Следовательно, выполнено неравенство

$$\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle \geq \pi^2 \langle x, x \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.23)$$

Из формул (4.22) и (4.23) вытекает оценка (4.13).

Докажем неравенство (4.14). При $2 \leq p < \infty$ в силу формул (4.11) и (4.23) выполнены неравенства

$$\langle x, \Lambda_0 x \rangle \geq \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle - \beta^2(p-2) \langle x, x \rangle \geq (\pi^2 + \beta^2(2-p)) \langle x, x \rangle, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}).$$

Неравенство (4.14), а вместе с ним и утверждение 1 леммы доказаны.

Докажем утверждение 2. Оператор (4.11) представляет собой сумму симметричного оператора Штурма–Лиувилля $-d^2/dt^2 - \beta^2(p-2)$ [56] и одномерного оператора $\langle \cdot, \mathbf{1} \rangle \mathbf{1}$ с областью значений $\{k\mathbf{1} : k \in \mathbb{R}\} \subset L^2$. Следовательно, согласно общей теории оператор Λ_0 является симметричным и имеет чисто дискретный простой спектр.

Рассмотрим для $p > 2$ задачу $\Lambda_0 x = \gamma x$ на собственные числа оператора Λ_0 , т. е. задачу

$$\beta^2(p-2)(\langle x, \mathbf{1} \rangle - x) + A_{w_0}^{-1} x = \gamma x, \quad x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0}).$$

В силу леммы 3.2 эту задачу можно записать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} x''(t) + \mu x(t) - \beta^2(p-2) \int_0^1 x(s) ds &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$\mu := \beta^2(p-2) + \gamma. \quad (4.25)$$

Рассмотрим далее отдельно два случая.

Случай 1. Пусть функция $x \in \text{Ran}(A_{w_0})$ такова, что

$$\int_0^1 x(t) dt = 0. \quad (4.26)$$

Тогда задача (4.24) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} x''(t) + \mu x(t) &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Легко видеть, что (4.27) представляет собой задачу на собственные числа для оператора $A_{w_0}^{-1}$. Используя формулы (3.10), (3.11), убеждаемся, что задача (4.26), (4.27) имеет решения (μ_k, e_k) , где

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda_{2k}} = 4k^2\pi^2, \quad e_k(t) = \phi_{2k}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.28)$$

так как $\int_0^1 \phi_{2k}(t) dt = 0$, $\int_0^1 \phi_{2k-1}(t) dt \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, в силу формул (4.25) и (4.28) мы получаем в рассматриваемом случае собственные числа (4.15) и нормированные в L^2 собственные функции (4.16).

Случай 2. Пусть функция $x \in \text{Ran}(A_{w_0})$ такова, что

$$c := \int_0^1 x(t) dt \neq 0. \quad (4.29)$$

Тогда задачу (4.24) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x''(t) + \mu x(t) - \beta^2(p-2)c &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

В результате замены переменной

$$g(t) = x(t) - \frac{\beta^2(p-2)c}{\mu}, \quad t \in [0, 1], \quad (4.31)$$

задача (4.30) принимает вид

$$\begin{aligned} g''(t) + \mu g(t) &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ g(0) &= g(1) = \frac{\beta^2(2-p)c}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Учитывая результаты из книги [56], часть 3, гл. 2, рассмотрим далее отдельно случаи $\mu > 0$ и $\mu \leq 0$.

Пусть спектральный параметр μ из (4.25) положителен, положим

$$\psi^2 := \mu = \beta^2(p-2) + \gamma > 0, \quad \psi > 0. \quad (4.33)$$

Решая задачу (4.32) и учитывая замену (4.31), убеждаемся, что единственное решение задачи (4.30) имеет вид

$$x(t) = \frac{\beta^2(2-p)c}{\psi^2} \left(\cos(\psi t) + \frac{1 - \cos \psi}{\sin \psi} \sin(\psi t) - 1 \right), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.34)$$

Используем формулы (4.29) и (4.34), получим уравнение для параметра $\psi > 0$:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} + \frac{\psi^3}{2\beta^2(2-p)}.$$

Полагая $\theta = \psi/2$, заключаем, что данное уравнение принимает вид (4.18). Графически можно показать, что уравнение (4.18) имеет однократные положительные корни $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < \dots$. Отсюда, используя (4.33), получаем собственные числа $\tilde{\gamma}_k$, записанные в формуле (4.17).

Несложно доказать, что если $\mu \leq 0$, то задача (4.30) при условии (4.29) не имеет решений для $p > 2$.

Таким образом, при условии (4.29) задача (4.30) имеет в качестве собственных только числа $\mu_k = 4\theta_k^2 = \beta^2(p-2) + \tilde{\gamma}_k$, $k = 1, 2, \dots$. На основе полученных выше результатов мы выводим основное утверждение п. 2 леммы о собственных числах. Утверждение о ядре легко доказать, используя формулу (4.15) и рассуждения в случае $\mu > 0$ при $\gamma = 0$.

Докажем утверждение 3. Пусть фиксировано число $p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$. Рассмотрим кубическую кривую

$$f(\theta) := \theta + \frac{4\theta^3}{\beta^2(2-p)}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

из правой части уравнения (4.18). Легко видеть, что уравнение $f(\theta) = 0$ имеет три действительных корня

$$\theta_0 = 0, \quad \pm\theta_* = \pm \frac{\beta\sqrt{p-2}}{2},$$

из которых только один (корень θ_*) строго положителен. Поскольку $p < p_0(\beta)$, справедлива оценка $0 < \theta_* < \pi$. Учитывая данную оценку, применяя неравенство $\operatorname{tg} \theta < \theta$ при $0 < \theta < \pi/2$ и решая графически уравнение (4.18), заключаем, что имеют место неравенства $\pi/2 < \theta_* < \theta_1 < \pi$. Тем самым мы доказали первое неравенство в формуле (4.19). Второе неравенство в (4.19) вытекает из первого и оценки $p < p_0(\beta)$.

Из п. 2 доказываемой леммы и неравенств (4.19) следует, что минимальное собственное число квадратичной формы $\langle x, \Lambda_0 x \rangle$ равно $\tilde{\gamma}_1 = 4\theta_1^2 + \beta^2(2-p) > 0$. Отсюда в силу свойств оператора Λ_0 вытекает неравенство (4.20). Соотношения (4.21) доказываются аналогично соотношениям (4.19), (4.20). Третье утверждение, а вместе с ним и лемма доказаны полностью.

ЛЕММА 4.6. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $0 < p \leq p_0(\beta)$. Тогда оператор $\Lambda''(z_0)$, заданный в (4.10), является строго положительным при $0 < p < p_0(\beta)$ и положительным при $p = p_0(\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует непосредственно из формулы (4.12) и п. 1, 2 леммы 4.5.

Введем функцию

$$\Lambda_1(y, x) := \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 (x(t) + y)^2 dt - \ln \int_0^1 |x(t) + y|^p dt, \quad (y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.35)$$

Легко видеть, что в силу (4.2) выполнено равенство

$$\Lambda_1(y, x) = \Lambda(y, x) - \frac{1}{2} \langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle, \quad (y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.36)$$

ЛЕММА 4.7. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $0 < p \leq 2$. Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$\min_{(y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})} \Lambda(y, x) \leq \min_{(y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})} \Lambda_1(y, x) = \Lambda_1(y_0, 0) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{\beta^2}. \quad (4.37)$$

Минимум в последней экстремальной задаче в (4.37) достигается только в двух точках $(y, x) = \pm(y_0, 0)$, где $y_0 = \sqrt{p}/\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (4.2) и (4.35) мы имеем $\Lambda(y, x) \leq \Lambda_1(y, x)$ для всех $(y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0})$. Отсюда, очевидно, вытекает первое неравенство в формуле (4.37).

Применяя методы вариационного исчисления [54], решим гладкую экстремальную задачу

$$\Lambda_1(y, x) \rightarrow \inf, \quad (y, x) \in \mathbb{R} \times \text{Ran}(A_{w_0}). \quad (4.38)$$

Согласно лемме 3.6 при $0 < p \leq 2$ выполнено неравенство $\|x\|_p \leq \|x\|_2$. Учитывая это неравенство, формулу (4.35) и первую теорему Вейерштрасса (см. замечание 9.1 в монографии [53]), заключаем, что минимум в задаче (4.38) достигается.

Используя формулы (4.8), (4.9) и (4.36), убеждаемся, что стационарные точки задачи (4.38) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda_1(y, x) &\equiv \beta^2 \int_0^1 x(t) dt + \beta^2 y - \frac{p \int_0^1 |x(t) + y|^{p-1} \text{sgn}(x(t) + y) dt}{\int_0^1 |x(t) + y|^p dt} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_1(y, x) &\equiv \beta^2 x(t) + \beta^2 y - \frac{p |x(t) + y|^{p-1} \text{sgn}(x(t) + y)}{\int_0^1 |x(t) + y|^p dt} = 0. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что указанная система уравнений имеет только два решения: $\pm z_0 = \pm(y_0, 0)$. Учитывая формулы (4.10), (4.36) и неравенство Шварца, заключаем, что квадратичная форма, построенная по второй производной $\Lambda_1''(z_0)$, удовлетворяет соотношениям

$$\langle z, \Lambda_1''(z_0) z \rangle_B = \beta^2(p-2)(\langle x, \mathbf{1} \rangle^2 - \langle x, x \rangle) + 2\beta^2(y + \langle x, \mathbf{1} \rangle)^2 \geq 0, \quad z = (y, x).$$

Таким образом, для точек $\pm z_0$ выполнены необходимые условия минимума первого и второго порядков [54]. Нетрудно найти, что

$$\Lambda_1(z_0) = \Lambda_1(-z_0) = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{\beta^2}.$$

Учитывая вышеизложенное, в частности то, что минимум в задаче (4.38) достигается и существуют только две стационарные точки, убеждаемся, что второй минимум в (4.37) достигается только в точках $\pm(y_0, 0)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Первое утверждение леммы 4.2 и формулы (4.3), (4.4) вытекают из лемм 4.3–4.7. Наличие всего двух точек минимума при $0 < p \leq 2$ следует непосредственно из лемм 4.3–4.7. Существование порога $p_0(\beta)$ доказано в лемме 4.5. В лемме 4.6 доказано, что для точек $\pm z_0$ выполнены необходимые условия минимума первого и второго порядков при $2 < p \leq p_0(\beta)$. Можно показать, что при $2 < p \leq p_0(\beta)$ минимум в экстремальной задаче (4.2) также доставляют только две точки $\pm z_0$.

Используя свойства гладкости функционала F и известный вид гильбертова пространства H_{w_0} , ассоциированного с ковариационным оператором A_{w_0} , несложно показать, что при $0 < p \leq p_0(\beta)$

$$\inf_{z \in H_{A_\nu}} \left\{ F(z) + \frac{1}{2} \|z\|_{A_\nu}^2 \right\}$$

также достигается только в двух точках $\pm z_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.8. Пусть фиксированы числа $\beta > 0$ и $p > p_0(\beta)$. Тогда точки $\pm z_0$, заданные в (4.3), не являются точками локального минимума в экстремальной задаче (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из леммы 4.5 и ее доказательства вытекает, что при $p > p_0(\beta)$ для стационарных точек $\pm z_0$ не выполнено необходимое условие минимума второго порядка. А именно, в силу формул (1.9), (4.15), (4.16) имеют место следующие соотношения при $p > p_0(\beta)$:

$$\langle e_1, \Lambda_0(z_0)e_1 \rangle = \gamma_1 = 4\pi^2 + \beta^2(2 - p) < 0.$$

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.1, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.3

В силу лемм 4.1, 4.2 для модельного интеграла Лапласа (3.24) при $0 < p \leq p_0(\beta)$ выполнены условия 1–3 теоремы 2.1, где следует положить $B = \mathbb{R} \times L^{\tilde{p}}$, $P_A(dz) = \nu_\beta(dz)$, $f(x) \equiv 1$, $u = \sqrt{n}$ и взять функцию F из (3.21). При этом у нас имеются всего две экстремальные точки $\pm z_0 = \pm(y_0, 0) = \pm(\sqrt{p}/\beta, 0)$. Согласно формулам (4.1), (4.10)

$$\begin{aligned} \langle z, F''(z_0)z \rangle_B &= \langle z, F''(-z_0)z \rangle_B = \\ &= \beta^2(2 - p)\langle x, x \rangle + \beta^2 p \langle x, \mathbf{1} \rangle^2 + 4\beta^2 y \langle x, \mathbf{1} \rangle + \beta^2 y^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z = (y, x)$. Таким образом, интегралы (2.1) для точек $\pm z_0$ совпадают, обозначим их общее значение через $D = D(p)$. В силу формул (2.1), (3.5), (3.15), (3.16) и (5.1)

имеют место равенства

$$D(p) = \int_B e^{-\langle z, F''(z_0)z \rangle / 2} \nu_\beta(dz) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \times \\ \times \int_{L^2} \exp \left\{ -\beta^2 y^2 - \frac{\beta^2(2-p)}{2} \langle x, x \rangle - \frac{\beta^2 p}{2} \langle x, \mathbf{1} \rangle^2 - 2\beta^2 y \langle x, \mathbf{1} \rangle \right\} P_{w_0}(dx). \quad (5.2)$$

Значения интеграла (5.2) при разных p приведены в следующей лемме.

ЛЕММА 5.1. *Интеграл $D(p)$ принимает следующие значения:*

$$D(p) = \begin{cases} \frac{\beta\sqrt{2-p}}{2\sqrt{2} \operatorname{sh}((\beta/2)\sqrt{2-p})}, & 0 < p < 2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & p = 2, \\ \frac{\beta\sqrt{p-2}}{2\sqrt{2} \sin((\beta/2)\sqrt{p-2})}, & 2 < p < p_0(\beta). \end{cases} \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему Фубини к интегралу (5.2), убеждаемся, что при $0 < p < p_0(\beta)$ выполнено равенство

$$D(p) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{L^2} \exp \left\{ -\frac{\beta^2(2-p)}{2} \langle x, x \rangle - \frac{\beta^2 p}{2} \langle x, \mathbf{1} \rangle^2 \right\} Q(x) P_{w_0}(dx), \quad (5.4)$$

где

$$Q(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 y^2 - 2\beta^2 y \langle x, \mathbf{1} \rangle} dy, \quad x \in L^2.$$

Используя формулу 2.3.15.11 из справочника [57], получаем равенство

$$Q(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{\beta^2 \langle x, \mathbf{1} \rangle^2}, \quad x \in L^2. \quad (5.5)$$

Из соотношений (5.4), (5.5) вытекает следующее равенство при $0 < p < p_0(\beta)$:

$$D(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{L^2} \exp \left\{ \frac{\beta^2(p-2)}{2} (\langle x, x \rangle - \langle x, \mathbf{1} \rangle^2) \right\} P_{w_0}(dx). \quad (5.6)$$

Дальнейшее вычисление интеграла нужно проводить отдельно для каждого из трех случаев доказываемой леммы.

1. Пусть фиксировано число $0 < p < 2$. Вычислим интеграл (5.6), применяя предложение 2.1, где мы положим

$$B = L^2, \quad P_A = P_{w_0}, \quad A = A_{w_0}, \quad C = \beta^2(p-2)I. \quad (5.7)$$

Легко видеть, что оператор $A^{-1} - C \equiv A_{w_0}^{-1} + \beta^2(2-p)I$ является строго положительным, следовательно, в силу формулы (2.4) справедливо соотношение

$$M = \int_{L^2} e^{\beta^2(p-2)\langle x, x \rangle / 2} P_{w_0}(dx) < \infty. \quad (5.8)$$

Согласно предложению 2.1 и формулам (2.5), (5.7) вероятностная мера

$$\gamma(dx) = \frac{1}{M} e^{\beta^2(p-2)\langle x, x \rangle / 2} P_{w_0}(dx) \quad (5.9)$$

является гауссовской мерой на L^2 с нулевым средним и инъективным ковариационным оператором

$$A_\gamma = (A_{w_0}^{-1} + \beta^2(2-p)I)^{-1} \equiv (I + \beta^2(2-p)A_{w_0})^{-1}A_{w_0}. \quad (5.10)$$

Учитывая формулы (5.6) и (5.9), убеждаемся, что при $0 < p < 2$ справедливо равенство

$$D(p) = \frac{M}{\sqrt{2}} \int_{L^2} e^{\beta^2(2-p)\langle x, \mathbf{1} \rangle^2/2} \gamma(dx). \quad (5.11)$$

Найдем значения постоянной M и интеграла из формулы (5.11). Используя лемму 3.3 настоящей работы и формулу 6.2.1.6 из справочника [57], получаем

$$\det(I + \beta^2(2-p)A_{w_0}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta^2(2-p)}{\pi^2 k^2} \right) = \frac{\text{sh}(\beta\sqrt{2-p})}{\beta\sqrt{2-p}}. \quad (5.12)$$

В силу п. 2 предложения 2.1 и формул (5.8), (5.12) выполнено равенство

$$M = [\det(I + \beta^2(2-p)A_{w_0})]^{-1/2} = \frac{\sqrt{\beta}(2-p)^{1/4}}{\sqrt{\text{sh}(\beta\sqrt{2-p})}}. \quad (5.13)$$

Для вычисления интеграла из формулы (5.11) найдем величину

$$\sigma^2 := \langle \mathbf{1}, A_\gamma \mathbf{1} \rangle = \int_{L^2} \langle x, \mathbf{1} \rangle^2 \gamma(dx); \quad (5.14)$$

далее мы полагаем, что параметр σ неотрицателен. Пусть

$$h(t) := (A_\gamma \mathbf{1})(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (5.15)$$

Функция $h(t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению $A_\gamma^{-1}h = \mathbf{1}$. Это уравнение в силу формулы (5.10) эквивалентно уравнению $A_{w_0}^{-1}h + \beta^2(2-p)h = \mathbf{1}$, которое согласно лемме 3.2 эквивалентно следующей неоднородной граничной задаче:

$$\begin{aligned} h''(t) + \beta^2(p-2)h(t) + 1 &= 0, & t \in [0, 1], \\ h(0) &= h(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

В результате замены переменной

$$f(t) = h(t) + \frac{1}{\beta^2(p-2)}, \quad t \in [0, 1], \quad (5.17)$$

задача (5.16) принимает вид

$$\begin{aligned} f''(t) + \beta^2(p-2)f(t) &= 0, & t \in [0, 1], \\ f(0) = f(1) &= \frac{1}{\beta^2(p-2)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Общее решение дифференциального уравнения из (5.18) в случае $0 < p < 2$ хорошо известно (см., например, справочник [56]). Учтем замену (5.17), получим, что единственное решение задачи (5.16) имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{\beta^2(p-2)} \left(\text{ch}(t\beta\sqrt{2-p}) + \frac{1 - \text{ch}(\beta\sqrt{2-p})}{\text{sh}(\beta\sqrt{2-p})} \text{sh}(t\beta\sqrt{2-p}) - 1 \right), \quad (5.19)$$

где $t \in [0, 1]$.

Используя формулы (5.14), (5.15) и (5.19), получаем после несложных преобразований, что

$$\sigma^2 = \int_0^1 h(t) dt = \frac{1}{\beta^2(2-p)} \left(1 - \frac{2 \operatorname{th}((\beta/2)\sqrt{2-p})}{\beta\sqrt{2-p}} \right). \quad (5.20)$$

Учитывая неравенство $0 < \operatorname{th} x < x$, верное для всех $x > 0$, выводим следующие оценки:

$$0 < \sigma^2 < \frac{1}{\beta^2(2-p)}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\tau^2 := \frac{1}{\sigma^2} + \beta^2(p-2) > 0. \quad (5.21)$$

Используя равенство

$$\gamma\{x \in L^2: \langle x, \mathbf{1} \rangle < t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2\sigma^2} ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.22)$$

и формулы (5.11), (5.21), убеждаемся, что справедливы соотношения

$$D(p) = \frac{M}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} \left(\beta^2(p-2) + \frac{1}{\sigma^2} \right)\right\} dt = \frac{M}{\sigma\tau\sqrt{2}}. \quad (5.23)$$

Применим формулы (5.20), (5.21), получим

$$\sigma\tau = \frac{\sqrt{2 \operatorname{th}((\beta/2)\sqrt{2-p})}}{\sqrt{\beta}(2-p)^{1/4}}. \quad (5.24)$$

С учетом соотношений (5.13), (5.23), (5.24) получаем после несложных преобразований равенство (5.3) для $0 < p < 2$.

2. Равенство (5.3) в случае $p = 2$ вытекает непосредственно из формулы (5.6).

3. Пусть теперь $2 < p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$. Здесь удобно выделить две возможности: случай $2 < p < 2 + \pi^2/\beta^2$ и случай $2 + \pi^2/\beta^2 \leq p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$. Рассмотрим их по отдельности.

Пусть фиксировано число $2 < p < 2 + \pi^2/\beta^2$. Вычисление интеграла (5.6) здесь также основано на предложении 2.1 и проводится по той же схеме, что и в случае $0 < p < 2$. А именно, мы применяем предложение 2.1 с учетом определений (5.7). В силу леммы 3.3 для $0 \neq x \in \operatorname{Ran}(A_{w_0})$ имеем неравенство $\langle x, A_{w_0}^{-1} x \rangle > \pi^2$. Из него вытекает, что при $2 < p < 2 + \pi^2/\beta^2$ оператор $A^{-1} - C \equiv A_{w_0}^{-1} + \beta^2(2-p)I$ является строго положительным. Следовательно, в силу формулы (2.4) справедливо соотношение (5.8). Согласно предложению 2.1 и формулам (2.5), (5.7) вероятностная мера $\gamma(dx)$, введенная в (5.9), является гауссовской мерой на L^2 с нулевым средним и инъективным ковариационным оператором A_γ , заданным в (5.10). Учитывая формулы (5.6) и (5.9), убеждаемся, что в рассматриваемом случае также справедливо равенство (5.11).

Найдем коэффициент M и интеграл, входящие в формулу (5.11). Используя лемму 3.3 настоящей работы и формулу 6.2.1.6 из справочника [57], теперь получаем равенства

$$\det(I + \beta^2(2-p)A_{w_0}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta^2(2-p)}{\pi^2 k^2} \right) = \frac{\sin(\beta\sqrt{p-2})}{\beta\sqrt{p-2}}.$$

Отсюда в силу п. 2 предложения 2.1 и соотношения (5.8) выполнены равенства

$$M = [\det(I + \beta^2(2 - p)A_{w_0})]^{-1/2} = \frac{\sqrt{\beta}(p - 2)^{1/4}}{\sqrt{\sin(\beta\sqrt{p - 2})}}. \quad (5.25)$$

Для вычисления интеграла из формулы (5.11) найдем

$$\sigma_1^2 := \langle \mathbf{1}, A_\gamma \mathbf{1} \rangle = \int_{L^2} \langle x, \mathbf{1} \rangle^2 \gamma(dx). \quad (5.26)$$

Положим

$$h_1(t) := (A_\gamma \mathbf{1})(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (5.27)$$

Функция $h_1(t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению $A_\gamma^{-1}h = \mathbf{1}$. Это уравнение в силу формулы (5.10) эквивалентно уравнению $A_{w_0}^{-1}h + \beta^2(2 - p)h = \mathbf{1}$, которое согласно лемме 3.2 эквивалентно неоднородной граничной задаче (5.16). В результате замены переменной (5.17) задача (5.16) принимает вид (5.18). Общее решение дифференциального уравнения из (5.18) при $p > 2$ хорошо известно (см., например, справочник [56]). Учтем замену (5.17), получим, что единственное решение задачи (5.16) при $2 < p < 2 + \pi^2/\beta^2$ имеет вид

$$h_1(t) = \frac{1}{\beta^2(p - 2)} \left(\cos(t\beta\sqrt{p - 2}) + \frac{1 - \cos(\beta\sqrt{p - 2})}{\sin(\beta\sqrt{p - 2})} \sin(t\beta\sqrt{p - 2}) - 1 \right), \quad (5.28)$$

где $t \in [0, 1]$. Используя формулы (5.26)–(5.28), получаем после несложных преобразований, что

$$\sigma_1^2 = \int_0^1 h_1(t) dt = \frac{1}{\beta^2(p - 2)} \left(\frac{2 \operatorname{tg}((\beta/2)\sqrt{p - 2})}{\beta\sqrt{p - 2}} - 1 \right). \quad (5.29)$$

Отсюда с учетом неравенства $0 < x < \operatorname{tg} x$, верного для всех $0 < x < \pi/2$, заключаем, что $\sigma_1^2 > 0$. Введем параметр

$$\tau_1^2 := \frac{1}{\sigma_1^2} + \beta^2(p - 2) > 0, \quad \tau_1 > 0. \quad (5.30)$$

Используя равенство (5.22) и формулу (5.11), убеждаемся, что справедливы соотношения

$$D(p) = \frac{M}{2\sigma_1\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \left(\beta^2(p - 2) + \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \right\} dt = \frac{M}{\sigma_1\tau_1\sqrt{2}}. \quad (5.31)$$

Применяя формулы (5.29), (5.30), получаем равенство

$$\sigma_1\tau_1 = \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg}((\beta/2)\sqrt{p - 2})}}{\sqrt{\beta}(p - 2)^{1/4}}.$$

С учетом этого равенства, используя соотношения (5.25), (5.31), получаем после несложных преобразований равенство (5.3) для значений $2 < p < 2 + \pi^2/\beta^2$.

Пусть теперь фиксировано число $2 + \pi^2/\beta^2 \leq p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$. Метод доказательства, примененный выше, теперь уже нельзя использовать. В данном случае мы

применим предложение 2.1 в иной, более общей форме непосредственно к интегралу (5.6). А именно, положим в предложении 2.1

$$\begin{aligned} B &= L^2, & P_A &= P_{w_0}, & A &= A_{w_0}, \\ \langle x, Cx \rangle &\equiv \beta^2(p-2)(\langle x, x \rangle - \langle x, \mathbf{1} \rangle^2). \end{aligned} \quad (5.32)$$

В силу п. 2 предложения 2.1 и формулы (5.6)

$$D(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\det(I - A_{w_0}C)]^{-1/2}. \quad (5.33)$$

Рассуждая так же, как при доказательстве п. 2 леммы 4.5, можно показать, что собственные значения оператора $A_{w_0}C: L^2 \rightarrow L^2$ образуют множество

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \cup \{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^\infty, \quad \alpha_k = \tilde{\alpha}_k = \frac{\beta^2(p-2)}{4k^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применяя формулу 6.2.1.6 из справочника [57] и равенство (5.33), мы убеждаемся, что и при $2 + \pi^2/\beta^2 \leq p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$ справедлива формула (5.3). Довольно длинные вычисления здесь опущены; стоит отметить, что описанный в последнем случае метод применим ко всем значениям $2 < p < 2 + 4\pi^2/\beta^2$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Согласно лемме 5.1 для модельного интеграла (3.24) при $0 < p < p_0(\beta)$ выполнено также условие 4 теоремы 2.1. Учитывая этот факт, а также выводы, изложенные в начале настоящего раздела, заключаем, что к интегралу (3.24) применима теорема 2.1, где следует положить $B = \mathbb{R} \times L^{\tilde{p}}$, $P_A(dz) = \nu_\beta(dz)$, $f(x) \equiv 1$, $u = \sqrt{n}$, $m = 2$ и взять функцию F из (3.21). С учетом формул (2.2), (4.4), (5.2) получаем при $0 < p < p_0(\beta)$ и $n \rightarrow \infty$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_2(n, \beta, p) &= 2e^{-n\Lambda(z_0)} D(p)(1 + o(1)) = \\ &= 2 \exp \left\{ -\frac{np}{2} \left(1 - \ln \frac{p}{\beta^2} \right) \right\} D(p)(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Учитывая формулы (3.1), (3.23), получаем равенство

$$b_n(\beta, p) = \frac{(-1)^n e^{\beta/2}}{n! \beta} \beta^{n(p+2)/2} n^{np/2} K_2(n, \beta, p) \quad (5.35)$$

для фиксированных чисел $p > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 1$. Из формул (5.34), (5.35) вытекает следующее соотношение при $0 < p < p_0(\beta)$ и $n \rightarrow \infty$:

$$b_n(\beta, p) = \frac{2(-1)^n e^{\beta/2}}{n! \beta} \beta^{n(2-p)/2} \left(\frac{np}{e} \right)^{np/2} D(p)(1 + o(1)).$$

Отсюда, учитывая формулу (5.3), получаем соотношения (1.10)–(1.12). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.3. При $p = p_0$ к интегралу (3.24) применима формула (2.3) теоремы 2.2, где $B = \mathbb{R} \times L^{\tilde{p}}$, $P_A(dz) = \nu_\beta(dz)$, $u = \sqrt{n}$ и функция F

задана в (3.21). Используя формулы (2.3) и (4.4) при $p = p_0$, получаем следующие соотношения при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln K_2(n, \beta, p_0) = -\Lambda(z_0) = -\frac{p_0}{2} \left(1 - \ln \frac{p_0}{\beta^2} \right).$$

Таким образом, применив равенство (5.35) при $p = p_0$, получаем соотношение (1.13). Предложение доказано.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00050).

Список литературы

- [1] Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием континуальных интегралов*, Мир, М., 1984.
- [2] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [3] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, *УМН*, **50**:6(306) (1995), 57–150.
- [4] В. Р. Фаталов, *ТМФ*, **168**:2 (2011), 299–340.
- [5] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977; т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978; т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [6] Р. Фейнман, “Пространственно-временной поход к нерелятивистской квантовой механике”, *Вопросы причинности в квантовой механике*, ИЛ, М., 1955, 167–207.
- [7] В. Р. Фаталов, “О методе Лапласа для гауссовских мер в банаховом пространстве”, *ТВП* (в печати).
- [8] В. Р. Фаталов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 189–223.
- [9] В. Р. Фаталов, *ТВП*, **53**:1 (2008), 72–99.
- [10] S. Albeverio, V. Fatalov, V. Piterbarg, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16**:1 (2009), 55–93.
- [11] В. Р. Фаталов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 189–223.
- [12] В. Р. Фаталов, *Точные асимптотики вероятностных распределений и функциональных интегралов. Метод Лапласа*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2009.
- [13] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure and Applied Mathematics, **86**, Academic Press, New York, 1979.
- [14] W. Janke, A. Pelster (eds.), *Path Integrals: New Trends and Perspectives*, Proceedings of the 9th International Conference (Dresden, September 23–28, 2007), World Sci., Hackensack, NJ, 2008.
- [15] J. Zinn-Justin, “Functional integrals in physics: the main achievements”, *Path Integrals: New Trends and Perspectives*, Proceedings of the 9th International Conference (Dresden, September 23–28, 2007), eds. W. Janke, A. Pelster, World Sci., Hackensack, NJ, 2008, 251–260.
- [16] И. М. Ковальчик, Л. А. Янович, *Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения*, Наука и техника, Минск, 1989.
- [17] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Comm. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
- [18] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481.
- [19] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev.*, **184** (1969), 1231–1260.
- [20] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **27**:7 (1971), 461–465.
- [21] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. D*, **7** (1972), 1620–1636.
- [22] T. Banks, C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. D*, **8**:10 (1973), 3346–3366.
- [23] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **37**:3 (1976), 117–120.
- [24] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1972), 411–427.
- [25] Л. Н. Липатов, *Письма в ЖЭТФ*, **25**:2 (1977), 116–119.

- [26] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D*, **15**:6 (1977), 1544–1557.
- [27] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D*, **15**:6 (1977), 1558–1564.
- [28] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (eds.), *Large Order Behaviour of Perturbation Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [29] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [30] В. В. Белокуров, Д. В. Ширков, *Теория взаимодействия частиц*, Наука, М., 1986.
- [31] В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, *Метод построения квантовопольевой теории возмущений со сходящимися рядами*, Препринт НИИЯФ МГУ 95–31/395, МГУ, М., 1995.
- [32] J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.*, **70**:2 (1981), 109–167.
- [33] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [34] Б. Саймон, *Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.
- [35] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [36] B. Simon, *Ann. Phys.*, **58**:1 (1970), 76–136.
- [37] E. Lieb, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**:5 (1976), 751–753.
- [38] Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986.
- [39] Т. Хида, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987.
- [40] А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000.
- [41] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [42] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобаян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [43] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995.
- [44] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Физматлит, М., 1997.
- [45] S. R. S. Varadhan, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19**:3 (1996), 261–286.
- [46] S. R. S. Varadhan, *Lett. Math. Phys.*, **88**:1–3 (2009), 175–185.
- [47] E. Olivieri, M. E. Vares, *Large Deviations and Metastability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **100**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [48] R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer, Berlin, 2006.
- [49] E. Bolthausen, *Prob. Theory Relat. Fields*, **72**:2 (1986), 305–318.
- [50] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, Наука, М., 1971.
- [51] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Часть I. Общая теория*, УРСС, М., 2004.
- [52] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [53] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, М., 1972.
- [54] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [55] К. Ферник, “Регулярность траекторий гауссовских случайных функций”, *Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения*, Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 10, ред. Ю. К. Беляев, Мир, М., 1978, 63–132.
- [56] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961.
- [57] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.