Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. З. Алисултанов, Р. П. Мейланов, Некоторые вопросы теории квантово-статистических систем, обладающих энергетическим спектром дробно-степенного типа, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 135–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:41:46

© 2012 г.

З. З. Алисултанов*, Р. П. Мейланов†

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КВАНТОВО-СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ ДРОБНО-СТЕПЕННОГО ТИПА

Рассмотрена задача об эффективном потенциале взаимодействия в квантовой системе многих частиц, приводящем к дробно-степенному закону дисперсии. Показано, что переход к производным дробного порядка эквивалентен введению парного межчастичного потенциала. Рассмотрен случай вырожденного электронного газа. С помощью уравнения Ван-дер-Ваальса исследовано уравнение состояния для систем, обладающих дробно-степенным спектром. Получена связь между постоянной Ван-дер-Ваальса и феноменологическим параметром α – порядком дробной производной. Получено соотношение между энергией, давлением и объемом для таких систем; коэффициент перед тепловой энергией есть простая функция от α . Рассматривается бозе-эйнштейновская конденсация в системе с дробно-степенным спектром. В рассматриваемом случае критическая температура конденсации для значений $1 < \alpha < 2$ больше, чем в случае идеальной системы, когда $\alpha = 2$.

Ключевые слова: дробные производные, неквадратичный спектр, функция Грина, уравнение Ван-дер-Ваальса, бозе-эйнштейновская конденсация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы с гамильтонианами, содержащими неквадратичную степень импульса, всегда привлекали внимание исследователей. Это связано прежде всего с тем, что в реальных системах вследствие их неидеальности почти никогда не реализуются квадратичные зависимости энергии от импульса. С другой стороны, систему со сложным законом дисперсии практически не удастся точно описать в рамках существующей теории. Поэтому во многих случаях прибегают к приближениям, которые заключаются в представлении неидеальной системы частиц в виде газа свободных квазичастиц с неквадратичной зависимостью энергии от импульса.

*Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zaur0102@gmail.com

†Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, Россия.
E-mail: lanten50@mail.ru

Неквадратичная зависимость энергии от импульса приводит к достаточно интересным эффектам. Укажем здесь некоторые. Еще Лифшицем и Кагановым [1] было отмечено, что в случае неквадратичной зависимости энергии электрона от импульса период обращения электронов в магнитном поле, а следовательно, и резонансная частота зависят от приложенного электрического поля. Этот эффект можно использовать для анализа формы изоэнергетических поверхностей в полупроводниках. Интересные результаты были получены в работе [2], где рассматривались высокочастотные электромагнитные явления в полупроводниках с неквадратичным законом дисперсии носителей тока. В работе [3] была рассмотрена электронная хаотичность в одномерной сверхрешетке, обусловленная неквадратичным законом дисперсии. А в работе [4] исследовались нелинейные электромагнитные волны в стохастизированном электронном газе с неквадратичной зависимостью энергии от импульса, и было показано, что отклонение от квадратичной зависимости приводит к замедлению волн.

Другой фактор, усиливающий интерес к системам с неквадратичной зависимостью энергии от импульса, связан с проникновением в физику идей так называемого дробного исчисления, основанного на математическом аппарате интегрирования дробного порядка [5], [6]. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, характерно отклонение зависимости энергии от импульса от квадратичной и наличие нелокальности дробно-степенного характера. Такое отклонение приводит, в частности, к распределениям вероятностей дробно-степенного типа. Эти распределения оказываются необычайно устойчивыми [7], [8]. Использование этого аппарата позволяет с большой точностью интерпретировать сложные экспериментальные данные для таких явлений, как аномальная диффузия [6], теплоперенос в средах со сложной структурой [9], дисперсионный перенос в полупроводниках [10], расчет термодинамических свойств поверхностей [11] и т.д. Кроме того, использование этого аппарата позволило предсказать ряд новых эффектов. Так, например, в работах [12], [13] было показано, что в рамках концепции фрактонів удастся добиться сравнительно больших температур перехода в сверхпроводящее состояние, что делает интересным аппарат дробного интегрирования в теории сверхпроводимости. Следует отметить, что нелокальные взаимодействия степенного типа рассматривались еще в работах Дайсона в применении к фазовым переходам в ферромагнетиках [14]–[16]. В работе [17] рассматривались нелокальные взаимодействия такого типа в кристаллической решетке и были получены дробные кинетические уравнения. Особенности дробной квантовой механики рассматривались в работах [18]–[21], где было проведено исследование систем с гамильтонианами, содержащими нецелую степень импульса. Необходимо отметить, что заметный вклад в обобщение уравнений на случай фрактальных сред, а также в исследование систем, описываемых уравнениями в дробных операторах, внес Тарасов. Так, например, в работах [22]–[24] была рассмотрена дробная статистическая механика, получены дробные аналоги уравнений Лиувилля и Боголюбова, а также кинетические уравнения с дробными производными.

Наконец, необходимо отметить, что полученная недавно двумерная модификация атомов углерода – графен [25], [26] – является системой с гамильтонианом, содержащим неквадратичную степень импульса. Действительно, электроны графена вблизи так называемой точки Дирака обладают линейным законом дисперсии [27].

Исследование графена очень важно для современной науки, так как благодаря своим уникальным свойствам он может стать очень перспективным материалом для нанотехнологий.

Идея дробно-степенной зависимости энергии от импульса лежит также в основе работы [28], где подробно был рассмотрен вопрос о возможном способе введения и физической интерпретации дробного интегродифференцирования в квантовой статистической физике. Эта идея развивается также и в настоящей работе. Напомним основную суть развиваемой теории. Исходным пунктом исследований является уравнение для функции Грина, записанное в дробных производных по пространственным координатам в виде

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + E_0 \frac{\hbar^\alpha}{p_0^\alpha} \Delta_1^{\alpha/2} \right] G(1, 1') = \delta(1 - 1'), \quad (1)$$

где 1 означает $r_1 t_1$, $1' - r_1' t_1'$, E_0 и p_0 – характеристические энергия и импульс системы, $\Delta_1^{\alpha/2}$ – дробная производная Рисса, определенная в одномерном случае как [29]

$$\Delta_x^{\alpha/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha) \cos((\pi/2)(2 - \alpha))} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{|x - \xi|^{\alpha-1}},$$

где $1 < \alpha \leq 2$. Возможность нестрогого ограничения сверху значений, принимаемых параметром α , была доказана в работе [30]. Спектр системы, описываемой уравнением (1), как легко показать, имеет вид

$$\omega(p) = \frac{E_0}{p_0^\alpha} |p|^\alpha + \text{const}. \quad (2)$$

В настоящей работе продолжается начатое в работе [28] исследование статистических свойств систем, обладающих энергетическим спектром дробно-степенного типа (2). На наш взгляд, настоящая работа интересна по нескольким причинам. Во-первых, в работе обсуждаются физические условия, соответствующие возникновению в уравнении для функции Грина дробного оператора Рисса. Это позволит сделать определенные выводы исследователям, использующим уравнения в таких операторах в некоторой степени формально. Во-вторых, рассмотрены некоторые важные свойства систем с энергетическим спектром дробно-степенного типа. Последнее дает важную информацию о связи феноменологического параметра – порядка дробной производной – с естественными параметрами реальной статистической системы (межчастичный потенциал взаимодействия, постоянная Ван-дер-Ваальса, затухание возбужденных состояний и т.п.).

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ПРИВОДЯЩИЙ К ДРОБНЫМ ПРОИЗВОДНЫМ В УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Обсудим возможность появления в уравнении для функции Грина дробного оператора Рисса. Попытаемся определить явный вид межчастичного потенциала взаимодействия в многочастичной системе, приводящего к такому оператору в основном уравнении. Общее уравнение для функции Грина при наличии взаимодействия между частицами записывается как [31]

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + E_0 \frac{\hbar^2}{p_0^2} \Delta_1 \right) G(1; 1') - \int_0^{-i\beta} d\bar{t}_1 d\bar{r}_1 \Sigma(r_1 t_1; \bar{r}_1 \bar{t}_1) G(\bar{r}_1 \bar{t}_1; r_1' t_1') = \delta(1 - 1'), \quad (3)$$

где $\Sigma(1;1')$ есть массовый оператор, содержащий всю информацию о взаимодействии частиц между собой. Применяя фурье-преобразование к обеим частям уравнения (3), получим

$$\left[\omega - \frac{E_0}{p_0^2} p^2 - \Sigma(p, \omega) \right] G(p, \omega) = 1. \quad (4)$$

Согласно уравнению (4) спектр системы определяется как $\omega(p) = (E_0/p_0^2)p^2 + \text{Re} \Sigma(p, \omega)$. Спектру (2), как легко видеть, соответствует массовый оператор $\Sigma(p) = E_0(p_0^{-\alpha}|p|^\alpha - p_0^{-2}p^2)$. С другой стороны, массовый оператор в общем случае определяется выражением [31]

$$\Sigma(p, \omega) G(p, \omega) = i \int dr dt e^{-i\omega t/\hbar + i p r/\hbar} \int dr_2 V(r_1 - r_2) G_2(12, 1'2')_{t_1=t_2}, \quad (5)$$

или

$$\frac{E_0(p_0^{-\alpha}|p|^\alpha - p_0^{-2}p^2)}{\omega - E_0 p_0^{-\alpha}|p|^\alpha} = i \int dr dt e^{-i\omega t/\hbar + i p r/\hbar} \int dr_2 V(r_1 - r_2) G_2(12, 1'2')_{t_1=t_2}, \quad (6)$$

где $G_2(12, 1'2')$ – двухчастичная функция Грина, $V(r)$ – межчастичный потенциал взаимодействия. Выражение (6) и определяет те условия, т.е. тот потенциал $V(r)$, который приводит к спектру (2). Однако решить это точное уравнение в общем случае нельзя. Воспользуемся аппроксимацией для массового оператора. Можно показать, что массовый оператор для данной системы не содержит столкновений частиц, поэтому ограничимся аппроксимациями низшего порядка. В аппроксимации Хартри–Фока для фермионного газа имеем

$$\Sigma_{\text{HF}}(p) = n \int V(r) dr - \int \frac{dp'}{(2\pi)^3} \frac{V(p-p')}{e^{\beta[E_0 p_0^{-\alpha}|p'|^\alpha - \mu]} + 1},$$

где $\beta = 1/(kT)$, μ – химический потенциал, n – концентрация частиц в трансляционно-инвариантной системе. Очевидно, что видоизменить зависимость энергии от импульса можно только за счет фоковской части массового оператора. С учетом этого запишем

$$E_0(p_0^{-\alpha}|p|^\alpha - p_0^{-2}p^2) = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{V(p-p')}{e^{\beta[E_0 p_0^{-\alpha}|p'|^\alpha - \mu]} + 1}. \quad (7)$$

Спектр такой системы имеет вид $\omega(p) = E_0 p_0^{-\alpha}|p|^\alpha + n \int V(r) dr$, и ему соответствует уравнение для функции Грина

$$\left[\omega - E_0 p_0^{-\alpha}|p|^\alpha - n \int V(r) dr \right] G(1, 1') = \delta(1 - 1'),$$

которое после фурье-преобразования приводит к уравнению

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} + E_0 \frac{\hbar^\alpha}{p_0^\alpha} \Delta_1^{\alpha/2} + \int V(r_1 - r_2) \langle n(r_2) \rangle dr_2 \right] G(1, 1') = \delta(1 - 1').$$

Заметим, что это уравнение отличается от уравнения (1) наличием хартриевского члена. В работе [28] мы пренебрегали хартриевским членом в уравнении для функции Грина. В настоящей работе мы также последуем этому приближению.

Займемся непосредственно выяснением условий, приводящих к спектру (2). Для этого необходимо решить интегральное уравнение (7) относительно потенциала V . Применяя к обеим частям уравнения (7) фурье-преобразование, получим

$$V(r) = E_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k_0^{-2} k^2 - k_0^{-\alpha} |k|^\alpha) e^{-ikr} \cdot \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ikr}}{e^{\beta[E_0 k_0^{-\alpha} |k|^\alpha - \mu]} + 1} \right]^{-1}, \quad (8)$$

где мы перешли к переменным $k = p/\hbar$, $V(r) = \int (d^D k / (2\pi)^D) V(k) e^{-ikr}$, $D = 1, 2, 3$ – размерность рассматриваемой системы. Чтобы определить $\int |p|^\alpha e^{-ip\xi} p^{D-1} dp$, воспользуемся обычным приемом:

$$\begin{aligned} \int |p|^\alpha e^{-ip\xi} p^{D-1} dp &= \int_0^\infty p^{\alpha+D-1} (e^{ip\xi} + e^{-ip\xi}) dp = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\infty p^{\alpha+D-1} (e^{ip(\xi+i\delta)} + e^{-ip(\xi-i\delta)}) dp. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$V(r) = E_0 \left(k_0^{-2} \frac{\Gamma(2+D)}{r^{2+D}} - k_0^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+D)}{r^{\alpha+D}} \right) \cdot \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ikr}}{e^{\beta[E_0 k_0^{-\alpha} |k|^\alpha - \mu]} + 1} \right]^{-1},$$

Интеграл $K(r)$ не вычисляется в общем виде. Поэтому рассмотрим случай малой плотности, когда $e^{-\beta\mu} \gg 1$. Тогда

$$K(r) = e^{\beta\mu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\beta E_0 k_0^{-\alpha} |k|^\alpha} e^{-ikr}.$$

Этот интеграл положим равным $K(r) = A e^{\beta\mu} e^{-|r|^\alpha / \beta E_0 k_0^{-\alpha}}$, где A – константа, появляющаяся при интегрировании. Таким образом, для потенциала взаимодействия (8) получаем

$$V(r) = \frac{E_0}{A} e^{-\beta\mu} e^{|r|^\alpha / \beta E_0 k_0^{-\alpha}} \left(k_0^{-2} \frac{\Gamma(2+D)}{r^{2+D}} - k_0^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+D)}{r^{\alpha+D}} \right). \quad (9)$$

Мы получили тот потенциал, который в данном подходе приводит к дробной производной Рисса по координате. При $\alpha = 2$ этот потенциал равен нулю. Пусть рассматриваемая система находится при температуре $T \sim 10^\circ \text{ K}$, и масса частиц имеет порядок массы протона, т.е. $M \approx 10^{-28} \text{ кг}$. Характеристическую энергию возьмем равной $E_0 = 0.1 \text{ эВ}$, а для характерного волнового числа по формуле $E_0 = k_0^2 \hbar^2 / 2M$ получаем $k_0 \approx 10^{10} \text{ м}^{-1}$. Кроме того, предположим, что $e^{-\beta\mu} \approx 20$. Тогда полученный потенциал в случае трехмерной системы ведет себя так, как показано на рис. 1. Энергия дается в единицах E_0/A .

По своему физическому смыслу производная дробного порядка по координате означает учет пространственных корреляций. Как видно из рис. 1, переход к производным дробного порядка действительно эквивалентен введению парного межчастичного потенциала, приводящего к неидеальности газа. Однако в отличие от традиционного межчастичного потенциала, который имеет чисто потенциальную природу и не зависит от импульса, в данном случае мы имеем принципиально иной

Рис. 1. Потенциал взаимодействия (9) при различных значениях α . Для сравнения на врезке приведен потенциал межатомного взаимодействия жидкого гелия (1 – потенциальная энергия, 2 – энергия) (см., например, работу [32]).

случай. Дело в том, что переход к дробной производной, приводящий к дробному спектру, означает учет эффективного взаимодействия между частицами, причем чрезвычайно важно, что это взаимодействие фактически неявно зависит от импульса. В этой связи отметим, что рассмотрение случая, когда энергия взаимодействия между частицами зависит от импульса в традиционной статистической физике, в принципе невозможно. Таким образом, переход к производным дробного порядка по координате фактически означает учет зависимости энергии взаимодействия от импульса и тем самым расширяет границы применимости статистической физики, позволяя также учитывать зависимость энергии взаимодействия от импульсов.

Проанализируем полученный потенциал на примере системы заряженных частиц. В такой системе потенциал взаимодействия между частицами в общем случае определяется согласно выражению [32]

$$V(r) = \int \frac{e^2 e^{-ikr} dk}{k^2 \varepsilon(k)}.$$

Величина e^2/k^2 есть фурье-образ кулоновского взаимодействия в трехмерной системе, $\varepsilon(k)$ – диэлектрическая проницаемость в среде с пространственной дисперсией. В среде без дисперсии имеем $\varepsilon = \text{const}$, а следовательно, $V(r) = q^2/(\varepsilon r)$, т.е. приходим к закону Кулона. Если диэлектрическая проницаемость имеет вид $\varepsilon(k) = 1 + k_0^2/k^2$, то приходим к дебаевской экранировке $V(r) = q^2 e^{-k_0 r}/r$, где k_0^{-1}

Рис. 2. Межчастичный потенциал взаимодействия в вырожденном электронном газе, приводящий к энергетическому спектру дробно-степенного типа (2).

есть радиус Дебая. Представляет интерес решение уравнения

$$V_{\alpha}(r) = \int \frac{q^2 e^{-ikr} dk}{k^2 \varepsilon_{\alpha}(k)},$$

где $V_{\alpha}(r)$ есть выражение (9), относительно $\varepsilon_{\alpha}(k)$. В этом случае можно утверждать, что в системе заряженных частиц с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\alpha}(k)$ межчастичный потенциал определяется выражением (9), что приводит к дробно-степенному спектру и, следовательно, к дробной производной Рисса в уравнении для функции Грина.

3. ВЫРОЖДЕННЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ

Рассмотрим случай вырожденного электронного газа. В этом случае необходимо положить $[e^{\beta[E_0 p_0^{-\alpha} |p'|^{\alpha} - \mu]} + 1]^{-1} = \Theta(E_F - E_0 p_0^{-\alpha} |p|^{\alpha})$. Кроме того, положим $E_0 = E_F$ и $p_0 = p_F$. Учитывая это, из выражения (8) получим

$$V_{\alpha}(r) = E_F \operatorname{Re} \left\{ \frac{\int_0^{k_F} k^2 dk (k_F^{-2} k^2 - k_F^{-\alpha} k^{\alpha}) e^{-ikr}}{\int_0^{k_F} k^2 dk e^{-ikr}} \right\}. \quad (10)$$

На рис. 2 изображена зависимость межчастичного потенциала (10) от расстояния между частицами. Энергия дается в единицах энергии Ферми, а расстояние – в ангстремах. Потенциал взаимодействия, как легко видеть из рис. 2, представляет собой некоторую потенциальную яму, глубина которой зависит от параметра α .

Другой важный вывод состоит в том, что взаимодействие в данном случае носит характер притяжения, и поэтому можно сказать, что мы имеем дело с явлением, аналогичным явлению сверхпроводимости, при котором электроны за счет обмена фононами начинают притягиваться и образовывать куперовские пары. Кроме того, в данном случае интенсивность электрон-электронного притяжения есть функция от параметра α . По-видимому, в такой системе должен реализовываться следующий эффект. При определенной температуре в рассматриваемой системе электроны локализуются в потенциальной яме, приведенной на рис. 2. Переход в такое состояние назовем f-переходом. Температура f-перехода определяется, очевидно, глубиной

ямы, которая в свою очередь зависит от параметра α . Таким образом, для температуры перехода имеем $U(\alpha) = k_B T_f$. Сделаем некоторые оценки. Для значения $\alpha = 1.9$ глубина ямы порядка $U(\alpha = 1.9) = 0.01$ эВ. Отсюда находим, что для этого случая $T_f \approx 100$ К. Аналогично для значения $\alpha = 1.7$, например, получим $T_f \approx 400$ К.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ДРОБНО-СТЕПЕННЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим вопрос об уравнении состояния газа (для определенности возьмем ферми-газ), обладающего спектром (2) и соответственно описываемого уравнением (1). Распределение Ферми для такого газа имеет вид $n_\alpha(\beta, p) = (e^{\beta(|p|^\alpha - \mu)} + 1)^{-1}$, где используется система единиц, в которой несущественные на данном этапе постоянные равны единице, т.е. $E_0 = 1$, $p_0 = 1$. Уравнение состояния для системы с таким распределением получено в работе [28], где использовалось соотношение $dP = n d\mu$, P – давление. Для нахождения дифференциала от химического потенциала было продифференцировано $n_\alpha(\beta, p)$. Основное соображение, использованное в работе [28] при совершении таких действий над функцией $n_\alpha(\beta, p)$, заключается в следующем. Параметр α неявно содержит в себе эффективное взаимодействие между частицами. Это взаимодействие, естественно, определяется концентрацией частиц. Следовательно, при дифференцировании следует иметь в виду, что параметр α не является постоянной величиной, а есть функционал плотности. Это значит, что по этому параметру также необходимо провести дифференцирование. В некотором смысле эти соображения очень похожи на подобные утверждения теории ферми-жидкости. Действительно, в последнем случае распределение записывается как $n(\beta, p) = (e^{\beta(\varepsilon(p) - \mu)} + 1)^{-1}$, где $\varepsilon(p)$ есть энергия квазичастиц, которая в свою очередь является функционалом от плотности, т.е. $\varepsilon = \varepsilon(n, p)$. С помощью таких соображений в работе [28] было получено уравнение состояния для ферми-системы, обладающей энергетическим спектром дробно-степенного типа. Оно имеет вид

$$P = \frac{1}{\beta} n + 2 \frac{1}{\beta} e^{\beta \mu} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)}) e^{-\beta |p|^\alpha}, \quad (11)$$

где n – концентрация идеального газа (при $\alpha = 2$). Не представляет труда с помощью таких же соображений получить и уравнение состояния для бозе-газа. Из уравнения (11) видно, что степенной закон дисперсии приводит в конечном итоге к появлению некоторого добавочного давления в уравнении состояния, т.е. фактически учитывает взаимодействие между частицами. Функция распределения, определяющая это добавочное давление, в сущности представляет собой распределение Вейбулла (растянутая экспонента), которое тесно связано с фрактальными свойствами системы [33]. Это добавочное давление равно нулю при $\alpha = 2$, и мы приходим к уравнению состояния идеального газа.

Исследуем уравнение (11). Как было сказано, оно описывает газ взаимодействующих фермионов. Попытаемся сделать некоторые общие замечания относительно

характера этого взаимодействия с помощью более привычных подходов. Уравнение (11), записанное в виде

$$P - I_\alpha = \frac{N}{V} kT, \quad (12)$$

где $I_\alpha = 2\beta^{-1}e^{\beta\mu} \int (d^3p/(2\pi)^3)(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)})e^{-\beta|p|^\alpha}$, очень похоже на уравнение Ван-дер-Ваальса, которое, однако, не содержит информации о конечности размеров частиц. Это связано с тем, что рассмотренная аппроксимация не учитывает столкновений и того факта, что частицы не могут проникать друг в друга. Если пренебречь эффектами конечности размеров частиц, то уравнение Ван-дер-Ваальса может быть записано как

$$P - n^2a = \frac{N}{V} kT.$$

Сравнивая его с уравнением (19), получим

$$n^2a = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)})e^{-\beta|p|^\alpha}.$$

С целью получения выражения для химического потенциала прибегнем к приближению, а именно будем использовать выражение для химического потенциала бoльцмановского идеального газа. Это приближение во многих случаях оправдано [34]. Химический потенциал бoльцмановского газа с точностью до несущественных постоянных величин есть величина, равная $\mu = \beta^{-1} \ln(n\beta^{3/2})$ [34]. Тогда имеем

$$na = 2\beta^{1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1 - e^{-\beta(p^2 - |p|^\alpha)})e^{-\beta|p|^\alpha}.$$

Для конкретных вычислений необходимо перейти к размерным величинам. В размерных переменных интеграл I_α записывается как

$$I_\alpha = 2\frac{1}{\beta}e^{\beta\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(1 - e^{-\beta E_0(k_0^{-2}k^2 - k_0^{-\alpha}|k|^\alpha)})e^{-\beta E_0k_0^{-\alpha}|k|^\alpha},$$

где, как и выше, $k = p/\hbar$. Химический потенциал бoльцмановского газа в размерных переменных имеет вид $\mu = \beta^{-1} \ln[(n/2)(2\pi\hbar^2m^{-1}\beta)^{3/2}]$ [34]. Для постоянной Ван-дер-Ваальса, следовательно, получим следующее выражение, связывающее эту постоянную с параметром α :

$$a = \frac{\beta^{1/2}}{n} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(1 - e^{-\beta E_0(k_0^{-2}k^2 - k_0^{-\alpha}|k|^\alpha)})e^{-\beta E_0k_0^{-\alpha}|k|^\alpha}. \quad (13)$$

Это соотношение очень важно с точки зрения возможности описания реальных систем методом дробного интегрирования, которое осуществляется с помощью уравнения (1). Эта зависимость приведена на рис. 3. Каждому значению постоянной Ван-дер-Ваальса a ставится в соответствие одно значение параметра α , т. е. системы с различными a можно описать уравнениями состояния (12) с параметрами α , соответствующими этим a .

Рис. 3. Зависимость постоянной Ван-дер-Ваальса a от параметра α : а – $q_0^2/(2m\beta^{-1}) = 1$; б – $q_0^2/(2m\beta^{-1}) = 2$. При построении кривых условно принято, что $\beta^{-1}/n(\pi)^{3/2} = 1$.

5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ, ДАВЛЕНИЕМ И ОБЪЕМОМ

Представляет интерес получение соотношения между энергией, давлением и объемом для системы с дробно-степенным спектром. В дальнейшем нас будут интересовать лишь качественные зависимости определяемых величин, поэтому мы пренебрежем несущественными постоянными множителями в последующих выражениях. Там, где возникнет необходимость оставить постоянные члены, это будет специально оговорено.

В работе [28] было показано, что для системы с дробно-степенным спектром плотность состояний имеет вид $\rho(\omega) = \alpha^{-1}\omega^{D/\alpha-1}$, где $D = 1, 2, 3$ – размерность фазового пространства. Параметр α является существенным, поэтому он будет сохранен во всех выражениях. Кроме того, заметим, что выражение для плотности состояний было получено в работе [28] в системе единиц, в которой $E_0 = 1$, $p_0 = 1$. Однако, как можно легко понять из введения, эти постоянные входят в выражение для спектра вместе с важным параметром α . Приняв условие $E_0 = 1$, $p_0 = 1$, мы тем самым могли потерять и параметр α . Однако легко показать, что даже в самом общем случае, когда сохранены все постоянные, этот параметр входит в соотношение именно таким образом, как это получено в работе [28]. В этом можно легко убедиться путем вывода этого выражения по правилам, использованным в работе [28]. Рассматривая трехмерную систему, имеем $\rho(\omega) = \alpha^{-1}\omega^{3/\alpha-1}$. Число частиц с энергией в промежутке от ω до $\omega + d\omega$ при этом есть величина

$$dN = \frac{V\omega^{3/\alpha-1}d\omega}{\alpha e^{\beta(\omega-\mu)} + 1}. \quad (14)$$

Величины β и μ определяют термодинамическое состояние системы и поэтому не могут быть опущены. В последнем выражении мы опустили также и спиновую постоянную. Заметим, что все приводимые в этом пункте формулы имеют совершенно аналогичный вид для обеих статистик Ферми и Бозе, отличаясь лишь

знаком в знаменателе выражения (14). Так, для бозе-газа получим выражение $dN = V\alpha^{-1}(e^{\beta(\omega-\mu)} - 1)^{-1}\omega^{3/\alpha-1}d\omega$. Интегрируя выражение (14) по энергии, получим полное число частиц в газе:

$$N = \frac{V}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\omega^{3/\alpha-1} d\omega}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1}.$$

Вводя переменную интегрирования $z = \beta\omega$, имеем

$$\frac{N}{V} = \frac{\beta^{-3/\alpha}}{\alpha} \int_0^\infty \frac{z^{3/\alpha-1} dz}{e^{z-\beta\mu} + 1}. \quad (15)$$

Эта формула определяет химический потенциал μ как функцию от температуры β^{-1} и плотности N/V . Для большого термодинамического потенциала имеем

$$\Omega = -\frac{V\beta^{-1}}{\alpha} \int_0^\infty \omega^{3/\alpha-1} \ln(1 + e^{\beta(\mu-\omega)}) d\omega.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\Omega = -\frac{\alpha}{3} \frac{V}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\omega^{3/\alpha} d\omega}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1}. \quad (16)$$

Найдем с помощью выражения (14) полную энергию системы:

$$E = \int \omega dN = \frac{V}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\omega^{3/\alpha} d\omega}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1}. \quad (17)$$

Выражение (16) с точностью до множителя $-\alpha/3$ совпадает с выражением (17). Имея в виду также, что $\Omega = -PV$, получим выражение

$$PV = \frac{\alpha}{3} E.$$

Интересно отметить, что значение коэффициента при тепловой энергии определяется степенью зависимости энергии от импульса в законе дисперсии. При $\alpha = 2$ получаем соотношение для состояния идеального газа.

6. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ В СИСТЕМЕ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ ДРОБНО-СТЕПЕННОГО ТИПА

Одним из важных вопросов статистической физики является вопрос о переходе системы в бозе-эйнштейновский конденсат. Известно, что неидеальность системы приводит к тому, что температура перехода понижается. При низких температурах в системе становятся существенными эффекты нелокальности, так как при этом взаимодействие между частицами начинает преобладать над энергией теплового движения. В связи с этим представляет интерес рассмотрение явления бозе-эйнштейновского конденсата в системе с нелокальностью дробно-степенного характера, т.е. в системе с энергетическим спектром дробно-степенного типа (2). Такая нелокальность, как оказалось, приводит к особым результатам и, на наш

взгляд, интересна для теории сверхпроводимости. В настоящей работе получена связь критической температуры конденсации бозе-газа с параметром α в законе дисперсии (2).

Для большого термодинамического потенциала трехмерного газа с законом дисперсии (2) имеем

$$\Omega = \frac{2}{\beta \Gamma(3/2)} \frac{V \pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int \ln[1 - e^{-\beta E_0 k_0^{-\alpha} |k|^\alpha} e^{\beta \mu}] k^2 dk. \quad (18)$$

Соответственно для плотности частиц получим

$$\rho = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{2}{\Gamma(3/2)} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-\beta E_0 k_0^{-\alpha} k^\alpha} e^{\beta \mu}}{1 - e^{-\beta E_0 k_0^{-\alpha} k^\alpha} e^{\beta \mu}} k^2 dk. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\gamma = e^{\beta \mu}, \quad x^2 = \beta E_0 k_0^{-\alpha} k^\alpha, \\ C(\alpha) = \frac{2}{\alpha \Gamma(3/2)} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_0^{3/\alpha} k_0^{-3}}.$$

Тогда выражение (19) можно переписать в виде

$$\rho = C(\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \right)^{3/\alpha} \int \frac{e^{-x^2} \gamma}{1 - e^{-x^2} \gamma} x^{6/\alpha-1} dx,$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \rho &= C(\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \right)^{3/\alpha} \left[\int x^{6/\alpha-1} (\gamma e^{-x^2} + \gamma^2 e^{-2x^2} + \dots) dx \right] = \\ &= C(\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \right)^{3/\alpha} \sum_n \frac{\gamma^n}{n^{3/\alpha}} = C(\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \right)^{3/\alpha} \zeta_{3/\alpha}(\gamma). \end{aligned} \quad (20)$$

Температура T_c , при которой $\gamma = 1$, называется критической температурой конденсации Бозе–Эйнштейна. Согласно выражению (20) для этой температуры $\rho = C(\alpha) (k T_c)^{3/\alpha} \zeta_{3/\alpha}(1)$. Отсюда

$$T_c = \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{C(\alpha) \zeta_{3/\alpha}(1)} \right)^{\alpha/3}. \quad (21)$$

Перепишем это выражение в виде

$$T_c = \left(\frac{\rho \alpha \Gamma(3/2) (2\pi)^3 E_0^{3/\alpha} k_0^{-3}}{2\pi^{3/2} \zeta_{3/\alpha}(1)} \right)^{\alpha/3} = \frac{E_0}{k_B} \left(\frac{\rho \alpha \Gamma(3/2) (2\pi)^3 k_0^{-3}}{2\pi^{3/2} \zeta_{3/\alpha}(1)} \right)^{\alpha/3}.$$

Возьмем такую плотность, чтобы при $\alpha = 2$ температура перехода была равна 3.2 К (критическая температура жидкого ^4He). Эта плотность равна $\rho \approx 10^{26} \text{м}^{-3}$. Ха-

Рис. 4. Зависимость критической температуры от параметра α .

рактическое волновое число выберем из следующих соображений. Для бозе-жидкости часто применяют аппроксимацию, в которой молекулы взаимодействуют как твердые сферы диаметром $b = 2.56 \cdot 10^{-10}$ м. Соответственно для характеристического волнового числа имеем $k_0 = 2\pi/b \approx 2.45 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$. Тогда, рассматривая газ атомов, массы которых порядка массы атомов ^4He ($6.64 \cdot 10^{-27}$ кг), и пользуясь формулой $E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2m$, находим характеристическую энергию $E_0 \approx 0.121$ эВ. Пользуясь этими постоянными, можно построить зависимость критической температуры от параметра α (рис. 4).

Большой интерес вызывает то, что критическая температура конденсации оказывается довольно сильно повышенной при значениях $\alpha < 2$. Этот вывод интересен для теории высокотемпературных сверхпроводников ввиду того, что электронный газ для сверхпроводников можно рассматривать как бозе-эйнштейновский конденсат куперовских пар, а критическую температуру конденсации – как температуру перехода в сверхпроводящее состояние.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из рассмотренного выше можно сделать вывод, что появление дробных операторов в уравнении для функции Грина связано с неидеальностью системы. Рассмотрение было проведено для общего случая. Оно может быть применено как к фермионному, так и к бозонному газам. Наиболее интересным, на наш взгляд, представляется применение дробно-дифференциального подхода к фононному газу. Как известно, неидеальность фононного газа, вызванная, в частности, сложностью структуры кристалла, приводит к ангармонизму, с которым связаны многие интересные эффекты. Теория ангармонизма дробно-степенного характера имеет свои особенности и может представлять большой интерес при описании реальных экспериментальных результатов. Так, элементарный расчет показывает, что дробно-дифференциальный подход дает широкий класс зависимостей теплоемкости от температуры. В то же время известно, что зависимость теплоемкости от температуры для сложных кристаллов не является однозначной функцией, а определяется типом кристалла и структурой. Последнее обстоятельство практически не описывается существующей теорией. Таким образом, дробно-дифференциальный подход в теории ангармонических эффектов в кристаллах представляет большой интерес.

Список литературы

- [1] И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, *УФН*, **69**:11 (1959), 419–458.
- [2] Ф. Г. Басс, Е. А. Рубинштейн, *ФТТ*, **19**:5 (1977), 1379–1388.
- [3] Ф. Г. Басс, В. В. Конотоп, А. П. Панчева, *ЖЭТФ*, **96**:5 (1989), 1869–1879.
- [4] Ф. Г. Басс, А. П. Панчева, *ЖЭТФ*, **99**:6 (1991), 1711–1717.
- [5] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [6] В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, изд-во “Артишок”, Ульяновск, 2008.
- [7] В. В. Учайкин, *ЖЭТФ*, **124**:4 (2003), 903–920.
- [8] А. А. Станиславский, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 491–507.
- [9] Р. П. Мейланов, М. Р. Шабанова, *ЖТФ*, **81**:7 (2011), 1–6.
- [10] Р. Т. Сибатов, В. В. Учайкин, *УФН*, **179**:10 (2009), 1079–1104.
- [11] С. Ш. Рехвиашвили, *ФТТ*, **49**:4 (2007), 756–759.
- [12] X.-B. Wang, J.-X. Li, Q. Jiang, Z.-H. Zhang, D.-C. Tian, *Phys. Rev.*, **49**:14 (1994), 9778–9781.
- [13] A. V. Milovanov, J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. B*, **66**:13 (2002), 134505, 11 pp., arXiv: cond-mat/0201504.
- [14] F. J. Dyson, *Commun. Math. Phys.*, **12**:2 (1969), 91–107.
- [15] F. J. Dyson, *Commun. Math. Phys.*, **12**:3 (1969), 212–215.
- [16] F. J. Dyson, *Commun. Math. Phys.*, **21**:4 (1971), 269–283.
- [17] N. Laskin, G. Zaslavsky, *Physica A*, **368**:1 (2006), 38–54, arXiv: nlin/0512010.
- [18] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [19] N. Laskin, *Phys. Lett. A*, **268**:4–6 (2000), 298–305, arXiv: hep-ph/9910419.
- [20] N. Laskin, *Phys. Rev. E*, **62**:3 (2000), 3135–3145, arXiv: 0811.1769.
- [21] В. М. Елеонский, В. Г. Королев, Н. Е. Кулагин, *Письма в ЖЭТФ*, **76**:12 (2002), 859–862.
- [22] V. E. Tarasov, *Phys. Rev. E*, **71**:1 (2005), 011102, 12 pp., arXiv: cond-mat/0505720.
- [23] V. E. Tarasov, *Chaos*, **16**:3 (2006), 033108, 7 pp., arXiv: 0710.1807.
- [24] V. E. Tarasov, *Modern Phys. Lett. B*, **21**:5 (2007), 237–248, arXiv: 0711.0859.
- [25] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, *Science*, **306**:5696 (2004), 666–669, arXiv: cond-mat/0410550.
- [26] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature*, **438**:7065 (2005), 197–200.
- [27] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 109–162, arXiv: 0709.1163.
- [28] З. З. Алисултанов, Р. П. Мейланов, *ТМФ*, **171**:3 (2012), 404–416.
- [29] С. Г. Самко, Ф. Ф. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [30] А. Б. Алхасов, Р. П. Мейланов, М. Р. Шабанова, *ИФЖ*, **84**:2 (2011), 309–317.
- [31] Л. Каданов, Г. Бейм, *Квантовая статистическая механика. Методы функций Грина в теории равновесных и неравновесных процессов*, Мир, М., 1964.
- [32] Р. Балеску, *Статистическая механика заряженных частиц*, Мир, М., 1967.
- [33] И. Г. Каплан, *Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий*, Наука, М., 1982.
- [34] W. Weibull, *J. Appl. Mech.*, **18**:3 (1951), 293–297.