Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Дараби, Классические евклидовы решения в виде кротовых нор в $f(\tilde{R})$ -космологии Палатини, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 3, 468–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:43:23

© 2012 г.

Ф. Дараби*

КЛАССИЧЕСКИЕ ЕВКЛИДОВЫ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ КРотовых НОР В $f(\tilde{R})$ -КОСМОЛОГИИ ПАЛАТИНИ

В контексте расширенных теорий гравитации исследуются классические евклидовы кротовые норы. Для построения точечного лагранжиана в плоском пространстве-времени Фридмана–Робертсона–Уокера без потери общности используется динамическая эквивалентность между $f(\tilde{R})$ -гравитацией и скалярно-тензорными теориями. Продемонстрированы динамические эквивалентности между $f(\tilde{R})$ -гравитацией Палатини и теорией Бранса–Дикке с потенциалом самодействия, а также между теорией Бранса–Дикке с потенциалом самодействия и теорией О’Ханлона с минимальным взаимодействием. В теории О’Ханлона показано существование новых евклидовых решений в виде кротовых нор, а в специальном случае найден соответствующий вид функции $f(\tilde{R})$, допускающий решение в виде кротовой норы. При малых значениях скаляра Риччи функция $f(\tilde{R})$ согласуется с решением в виде кротовой норы, полученным для теории гравитации высшего порядка $\tilde{R} + \epsilon \tilde{R}^2$, $\epsilon < 0$.

Ключевые слова: евклидовы кротовые норы, $f(R)$ -космология, скалярно-тензорные теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существуют два типа классических кротовых нор: лоренцевы и евклидовы. Лоренцевы кротовые норы, такие как кротовые норы Шварцшильда или мосты Эйнштейна–Розена, известны как вакуумные решения лоренцевых полевых уравнений Эйнштейна. Они представляют собой *реальные мосты* между различными областями пространства-времени. Согласно определению лоренцевых кротовых нор, данному Виссером [1], если пространство-время Минковского содержит компактную область Ω и если Ω имеет топологию вида $\Omega \sim R \times \Sigma$, где Σ – 3-многообразие с нетривиальной топологией, границы которого имеют топологию вида $d\Sigma \sim S^2$, и, кроме того, все гиперповерхности Σ пространственноподобные, то область Ω содержит квазипостоянную кротовую нору во внутреннюю вселенную.

С другой стороны, евклидовы кротовые норы изучались в основном как инстантоны, а именно как решения классических евклидовых полевых уравнений Эйнштейна. Евклидовы кротовые норы обычно рассматриваются как евклидовы метрики,

*Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: f.darabi@azaruniv.edu

состоящие из двух асимптотически плоских областей, связанных узким горлышком (ручкой). В общем случае такие кротовые норы могут демонстрировать *квантовое туннелирование* между различными областями пространства-времени, имеющими, вообще говоря, различные топологии. Возможно, они могут быть полезны для понимания испарения черных дыр [2], поскольку допускают нелокальные связности, с помощью которых можно определить фундаментальные постоянные, а также для обращения в нуль космологической постоянной Λ [3]–[5]. Их даже рассматривают как альтернативу механизму Хиггса [6]. Следовательно, такие решения исключительно важны для изучения квантовых аспектов гравитации. Причина, в силу которой классические кротовые норы могут существовать, связана со следствием теоремы Чигера и Гломмола [7], в которой утверждается, что *необходимое* (но не достаточное) условие существования классической кротовой норы состоит в том, чтобы собственные значения тензора Риччи были отрицательны где-то на многообразии [8].

Лоренцевы кротовые норы широко исследовались в модифицированных теориях гравитации, таких как гравитация Бранса–Дикке [9]–[11], модифицированная телепараллельная гравитация [12] и $f(R)$ -гравитация [9]. Однако, насколько известно автору, изучение евклидовых кротовых нор в модифицированных гравитациях не привлекало большого внимания исследователей. Мы решили восполнить этот пробел в знаниях и исследовать евклидовы кротовые норы в $f(R)$ -гравитации.

Имеются два формализма для изучения $f(R)$ -гравитации: метрическая $f(R)$ -гравитация и $f(R)$ -гравитация Палатини [13]–[16]. Первый представляет собой стандартный метрический формализм, в котором полевые уравнения выводятся путем варьирования действия по метрическому тензору. Второй представляет собой формализм Палатини, в котором метрика и связность при варьировании действия рассматриваются как независимые переменные. Эти два формализма порождают, вообще говоря, различные полевые уравнения для нелинейного действия, однако хорошо известно, что решения $f(R)$ -гравитации Палатини представляют собой подкласс решений метрической $f(R)$ -гравитации [17]–[19]. В действительности каждой модели гравитации Палатини отвечает свой чисто метрический аналог, что приводит к полевым уравнениям четвертого порядка.

В недавней работе [20] мы рассмотрели четыре типа действия: метрическое действие Йордана, действие Палатини–Йордана, метрическое действие Эйнштейна и действие Палатини–Эйнштейна. Симметрия между картинами Йордана и Эйнштейна представляет собой конформную симметрию, которая соответствует появлению или обращению в нуль кинетических членов. С другой стороны, переход от метрического действия Йордана к действию Палатини–Йордана требует появления кинетического члена, тогда как переход от метрического действия Эйнштейна к действию Палатини–Эйнштейна требует обращения кинетического члена в нуль. В обоих переходах от метрического действия Йордана к метрическому действию Эйнштейна и действию Палатини–Йордана появляются кинетические члены и в обоих переходах от метрического действия Эйнштейна и действия Палатини–Йордана к действию Палатини–Эйнштейна кинетический член обращается в нуль. Картини Йордана и Эйнштейна динамически эквивалентны с точки зрения конформной симметрии. Хотя метрический формализм и формализм Палатини также связаны конформным преобразованием, они, по-видимому, не являются динамически эквивалентными. Метрическое действие Йордана отличается от действия Палатини–Йордана наличием динамического *опережающего* кинетического члена. Аналогичным образом метрическое действие Эйнштейна отличается от действия Палатини–Эйнштейна

наличием динамического *запаздывающего* кинетического члена. Однако действие Палатини–Йордана при редукции к действию Палатини–Эйнштейна принимает тот же вид, что и метрическое действие Йордана, а именно оно становится действием типа действия О’Ханлона, в котором динамика полностью обусловлена потенциалом самодействия. С другой стороны, метрическое действие Эйнштейна и действие Палатини–Йордана демонстрируют одинаковые динамические свойства, заключающиеся в том, что оба они имеют динамический кинетический член и потенциал.

Подводя итог, заметим, что для каждого отображения между картинами Йордана и Эйнштейна существует соответствующее отображение между формализмом Палатини и метрическим формализмом. Аналогично для каждого отображения, связывающего два действия типа действия О’Ханлона, а именно метрическое действие Йордана и действие Палатини–Эйнштейна, существует отображение, связывающее действие Палатини–Йордана с метрическим действием Эйнштейна. Поэтому кажущиеся различия между формализмом Палатини и метрическим формализмом зависят строго от представления, а число степеней свободы при этом сохраняется. Это означает, что динамические содержания обоих формализмов тождественны.

В действительности метрический формализм и формализм Палатини становятся неэквивалентными на массовой оболочке в присутствии материи [19]. Однако преимущество формулировки Палатини основано на полевых уравнениях второго порядка, которые оказывается легче решить. В этом смысле формализм Палатини проще применять и проще анализировать, чем соответствующий метрический формализм [19]. Более того, если рассматривать картину Эйнштейна как физическую, то в настоящем исследовании евклидовых кротовых нор формализм Палатини оказывается более удобным, чем метрический формализм. Это связано с тем, что в отличие от метрического формализма, действие которого превращается в скалярно-тензорную теорию в картине Йордана, действие в формализме Палатини можно преобразовать в действие в картине Эйнштейна. Основываясь на приведенных выше рассуждениях, мы будем исследовать евклидовы кротовые норы в $f(R)$ -гравитации Палатини.

Подход настоящей работы по духу аналогичен подходу работ [21]–[26]: мы используем динамическую эквивалентность между $f(\tilde{R})$ -гравитацией Палатини [27] и скалярно-тензорными теориями для построения точечного лагранжиана в плоской вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера [28], [29]. Мы приводим краткий обзор хорошо известной динамической эквивалентности между $f(\tilde{R})$ -гравитацией Палатини и теорией Бранса–Дикке с потенциалом самодействия [30]–[32]. Кроме того, исследуется хорошо известная динамическая эквивалентность между теорией Бранса–Дикке с потенциалом самодействия и теорией О’Ханлона с минимальным взаимодействием, при этом динамика полностью определяется потенциалом самодействия. Наконец, для теории О’Ханлона показано существование новых решений типа евклидовых кротовых нор и получены возможные соответствующие виды функции $f(\tilde{R})$ в формализме Палатини.

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ $f(\tilde{R})$ -ГРАВИТАЦИЕЙ ПАЛАТИНИ И ТЕОРИЕЙ О’ХАНЛОНА С МИНИМАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Действие в формализме $f(\tilde{R})$ -гравитации Палатини принимает вид

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}), \quad (1)$$

где $f(\tilde{R}) - \tilde{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma})$, а $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ – связность. Это действие зависит от двух динамических переменных, а именно от метрики и связности. Варьирование действия (1) по метрике приводит к уравнению

$$f'(\tilde{R})\tilde{R} - \frac{1}{2}f(\tilde{R})g_{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

где $f'(\tilde{R}) = df/d\tilde{R}$. След уравнения (2) равен

$$f'(\tilde{R})\tilde{R} - 2f(\tilde{R}) = 0, \quad (3)$$

а варьирование (1) по связности дает

$$(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{\mu\nu})_{;\lambda} = 0, \quad (4)$$

где $(\cdot)_{;}$ обозначает ковариантную производную. Поэтому связность совместна с новой метрикой $h_{\mu\nu} = f'(\tilde{R})g_{\mu\nu}$, и мы получаем

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{2f'(\tilde{R})} \partial_\lambda f'(\tilde{R}) \partial^\lambda f'(\tilde{R}) - \frac{3}{f'(\tilde{R})} \square f'(\tilde{R}), \quad (5)$$

где R – скаляр Риччи, построенный из связности Леви-Чивиты для метрики $g_{\mu\nu}$. Легко проверить, что действие (1) динамически эквивалентно действию¹⁾ [28]

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R + \frac{3}{2\Phi} \Phi_{;\mu} \Phi^{;\mu} - V(\Phi) \right), \quad (6)$$

где $\Phi = f'(\tilde{R})$, $V(\Phi) = \chi(\Phi)\Phi - f(\chi(\Phi))$ и $\tilde{R} = \chi(\Phi)$. Это хорошо известное действие теории Бранса–Дикке с параметром взаимодействия, равным $-3/2$. Если переопределить $\Phi \equiv \varphi^2$, то действие (6) принимает вид

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} (\varphi^2 R + 6\varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - V(\varphi)). \quad (7)$$

Это действие динамически эквивалентно действию

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\varphi)R + \frac{1}{2}\varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - U(\varphi) \right), \quad (8)$$

где $F(\varphi) = \varphi^2/12$, а $U(\varphi) = V(\varphi)/12$. Конформное преобразование вида [30], [31]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \quad (9)$$

¹⁾Используя общую теорию с бездивергентным током, можно также показать эквивалентность между действием (6) в формализме Палатини и действием

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi R - V(\Phi))$$

в метрическом формализме $f(R)$ -гравитации [32]. Действительно, рассматривая простую дивергентную теорию и ток, подходящим образом определенный в терминах поля Φ , можно обобщить конформную эквивалентность между метрическим формализмом и формализмом Палатини с помощью уравнения сохранения этого тока.

дает плотность лагранжиана в картине Эйнштейна

$$\sqrt{-g} \left(FR + \frac{1}{2} \varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - U \right) = \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{1}{2} \bar{R} + 3 \square_{\Gamma} \sigma + \frac{3F_{\varphi}^2 - F}{4F^2} \varphi_{;\alpha} \varphi^{;\alpha} - \frac{U}{4F^2} \right). \quad (10)$$

Вводя новое скалярное поле $\bar{\varphi}$ и потенциал $\bar{U}$, определенные как

$$\bar{\varphi}_{;\alpha} = \sqrt{\frac{3F_{\varphi}^2 - F}{4F^2}} \varphi_{;\alpha}, \quad \bar{U}(\bar{\varphi}(\varphi)) = \frac{U}{4F^2}, \quad (11)$$

получим [30]

$$\sqrt{-g} \left(FR + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - U \right) = \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{1}{2} \bar{R} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{;\alpha} \bar{\varphi}^{;\alpha} - \bar{U} \right). \quad (12)$$

Если положить $F(\varphi) = \varphi^2/12$ в первом определении в (11), то получим $\bar{\varphi}_{;\alpha} = 0$, что приводит к действию

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{1}{2} \bar{R} - \bar{U} \right), \quad (13)$$

которое известно как действие О'Ханлона в картине Эйнштейна, где динамика полностью определяется потенциалом самодействия [33].

3. КЛАССИЧЕСКИЕ ЕВКЛИДОВЫ КРОТОВЫЕ НОРЫ В ТЕОРИИ О'ХАНЛОНА

В настоящем разделе мы будем искать решения в виде кротовых нор для системы (13) для минимально взаимодействующего скалярного поля с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{R} - \bar{U}, \quad (14)$$

где $U(\bar{\varphi})$ – потенциал самодействия. Мы не уточняем априори вид потенциала и, анализируя полевые уравнения и соответствующие решения в виде кротовых нор, можем использовать конформную эквивалентность, обсуждавшуюся в предыдущем разделе, чтобы получить соответствующие решения в виде кротовых нор в $f(R)$ -гравитации Палатини.

Уравнения движения Эйнштейна принимают вид

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T}, \quad (15)$$

где тензор энергии-импульса и его след равны

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}(\bar{\varphi}), \quad \bar{T} = 4\bar{U}(\bar{\varphi}). \quad (16)$$

Подставляя (16) в уравнение (15), получаем

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}(\bar{\varphi}). \quad (17)$$

Видно, что для положительно-определенной евклидовой метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$ тензор Риччи $\bar{R}_{\mu\nu}$ имеет отрицательные собственные значения тогда и только тогда, когда потенциал $\bar{U}(\bar{\varphi})$ является положительным, и, следовательно, решения в виде кротовых

нор могут существовать в данной системе тогда и только тогда, когда выполняются два следующих условия:

$$\bar{U}(\bar{\varphi}) > 0, \quad -\bar{g}_{\mu\nu}\bar{U}(\bar{\varphi}) < 0. \quad (18)$$

Для плоской вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера евклидова метрика $\bar{g}_{\mu\nu}$ записывается как

$$dS^2 = dt^2 + a^2(t) d^2\Omega_3, \quad (19)$$

где $d^2\Omega_3$ – элемент длины на трехмерной сфере. Евклидово полевое уравнение для переменной a получаем в виде

$$\dot{a}^2 = 1 - a^2\bar{U}(\bar{\varphi}), \quad (20)$$

где точка сверху обозначает производную по времени. Теперь будем искать решения уравнения (20) в виде кротовых нор. Обычно считается, что кротовая нора имеет две асимптотически плоские области, связанные горлышком, где $\dot{a} = 0$, и описывается выражением вида

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{C}{a^n}, \quad (21)$$

где C – положительная константа. Чтобы получить асимптотическую евклидову кротовую нору, необходимо, чтобы величина $\dot{a}^2$ оставалась положительной при больших a , что требует $n > 0$. Сравнение уравнений (20) и (21) показывает, что можно выбрать подходящий вид потенциала $\bar{U}(\bar{\varphi})$ так, чтобы уравнение (20) определяло кротовую нору. Тем самым существование кротовых нор для теории О’Ханлона установлено.

Теперь мы будем искать соответствующие кротовые норы в $f(\tilde{R})$ -теории Палатини. Для этого можно переписать потенциал в виде

$$\bar{U}(\bar{\varphi}) = \frac{U}{4F^2} = 3\frac{V(\varphi)}{\varphi^4} = 3\frac{\tilde{R}\Phi - f(\tilde{R})}{\Phi^2} = 3\frac{\tilde{R}f' - f(\tilde{R})}{f'^2}. \quad (22)$$

Чтобы после подстановки в уравнение (20) этот потенциал определял кротовую нору, мы должны взять уравнение

$$\frac{\tilde{R}f' - f(\tilde{R})}{f'^2} = \frac{C}{a^{n+2}}. \quad (23)$$

Можно попытаться переписать это уравнение в виде дифференциального уравнения первого порядка для f как функции a или $\tilde{R}$. В обоих случаях нам нужно выразить скаляр Риччи $\tilde{R}$ в терминах масштабного множителя a . Используя метрику (19), для скалярной кривизны получаем

$$\tilde{R} = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right]. \quad (24)$$

Если требуется рассматривать (21) как решение в виде кротовой норы, то скаляр Риччи должен принимать вид

$$\tilde{R} = 6\left[\frac{C}{a^{n+2}}\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{1}{a^2}\right], \quad (25)$$

где значения n и C могут фиксировать знак скаляра Риччи.

Ценным упражнением является получение решений в виде кротовых нор в $f(\tilde{R})$ -теории, при этом определяющие их уравнения – те же самые, что для хорошо известных решений в виде кротовых нор в общепринятой теории Эйнштейна–Гильберта. Из соображений простоты положим сначала $n = 2$. Этот случай соответствует известной кротовой норе конформного скалярного поля, взаимодействующего с действием Эйнштейна–Гильберта [34]–[36]. Тогда скаляр Риччи и f' принимают вид

$$\tilde{R} = \frac{6}{a^2}, \quad (26)$$

$$f' = \frac{df}{d\tilde{R}} = \frac{df}{da} \frac{da}{d\tilde{R}} = -\frac{a^3}{12} \frac{df}{da}. \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (23), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$a^6 \left(\frac{df}{da} \right)^2 + Aa^5 \left(\frac{df}{da} \right) + 2Aa^4 f = 0. \quad (28)$$

Можно также с помощью уравнения (28) и его производной d/da получить дифференциальное уравнение второго порядка

$$Aa^5 \frac{d^2 f}{da^2} + 2a^6 \frac{df}{da} \frac{d^2 f}{da^2} + 2a^5 \left(\frac{df}{da} \right)^2 + 3Aa^4 \frac{df}{da} = 0, \quad (29)$$

где $A = 72/C$. В качестве альтернативы можно подставить (26) в уравнение (23), чтобы выразить a в терминах $\tilde{R}$. При этом получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\tilde{R}^2 \left(\frac{df}{d\tilde{R}} \right)^2 - \tilde{R} \left(\frac{df}{d\tilde{R}} \right) + f = 0. \quad (30)$$

Аналогично, взяв производную $d/d\tilde{R}$ уравнения (30), получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка для f в терминах $\tilde{R}$:

$$\frac{d^2 f}{d\tilde{R}^2} \left(1 - 2\tilde{R} \frac{df}{d\tilde{R}} \right) - 2 \left(\frac{df}{d\tilde{R}} \right)^2 = 0. \quad (31)$$

Поскольку мы интересуемся явным видом функции $f(\tilde{R})$, рассмотрим уравнение (31), решение которого можно получить или в параметрическом виде

$$\begin{aligned} f(T) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln T^2 - \frac{C}{2} \ln T - \frac{1}{4} C^2, \\ R(T) &= \frac{1}{2T} [1 - \operatorname{sgn}(\ln T + C) \ln T - \operatorname{sgn}(\ln T + C) C] \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} f(T) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln T^2 - \frac{C}{2} \ln T - \frac{1}{4} C^2, \\ R(T) &= \frac{1}{2T} [1 + \operatorname{sgn}(\ln T + C) \ln T + \operatorname{sgn}(\ln T + C) C], \end{aligned} \quad (33)$$

где C – постоянная, или же в явном виде²⁾

$$f(\tilde{R}) = -\frac{1}{4}[\text{LambertW}(-2C_1\tilde{R})]^2 - \frac{1}{2}\text{LambertW}(-2C_1\tilde{R}) + C_2, \quad (34)$$

где C_1 и C_2 – постоянные. При малых значениях скаляра Риччи $\tilde{R}$ получаем по модулю постоянной C_1 следующее выражение:

$$f(\tilde{R}) \simeq \tilde{R} - C_1\tilde{R}^2 + \frac{C_2}{C_1}. \quad (35)$$

Полезно заметить, что приведенное выше решение, по модулю постоянного члена C_2/C_1 , представляет собой кротовую нору, найденную Фукутакой с соавторами [37] в теории гравитации высшего порядка $\tilde{R} + \epsilon\tilde{R}^2$, $\epsilon < 0$, для замкнутой вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера. Это интересное совпадение подтверждает правильность общего вида выражения для $f(\tilde{R})$, задаваемого уравнением (34), для которого мы ожидаем классические евклидовы кротовые норы.

Далее, можно положить $n = 4$, что соответствует *аксионному* полю как материальному источнику, взаимодействующему с действием Эйнштейна–Гильберта, что приводит к кротовой норе Гиддингса–Строминджера [8]. Тогда скаляр Риччи и f' принимают вид

$$\tilde{R} = 6\left[\frac{C}{a^6} + \frac{1}{a^2}\right], \quad (36)$$

$$f' = \frac{df}{d\tilde{R}} = \frac{df}{da} \frac{da}{d\tilde{R}} = -\frac{1}{6} \frac{df}{da} \left[\frac{a^7}{6C + 2a^4}\right]. \quad (37)$$

Подставляя (36) и (37) в уравнение (23), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$Aa^8 \left(\frac{df}{da}\right)^2 + a(C + a^4)(6C + 2a^4) \frac{df}{da} + (6C + 2a^4)^2 f = 0. \quad (38)$$

Можно также с помощью уравнения (38) и его производной d/da получить дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} a(C + a^4)(6C + 2a^4) \frac{d^2 f}{da^2} + 2Aa^8 \frac{df}{da} \frac{d^2 f}{da^2} + 8Aa^7 \left(\frac{df}{da}\right)^2 + \\ + (42C^2 + 64Ca^4 + 22a^8) \frac{df}{da} + a^3(96C + 32a^4)f = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где $A = 36/C$. К сожалению, дифференциальные уравнения первого и второго порядков не дают точных решений (по крайней мере, с использованием доступного математического программного обеспечения типа **Maple**).

В качестве альтернативы, если бы мы захотели использовать соотношение (36), чтобы выразить a в терминах $\tilde{R}$ и построить дифференциальное уравнение типа уравнений (30), (31), то мы получили бы более сложные дифференциальные уравнения, не имеющие точных решений, так что этот случай мы не рассматриваем.

²⁾Функция Ламбера LambertW удовлетворяет уравнению $\text{LambertW}(x) \exp(\text{LambertW}(x)) = x$ и имеет бесконечное число ветвей для каждого (ненулевого) значения x , при этом ровно одна из этих ветвей аналитична в нуле. При малых x имеем $\text{LambertW}(x) \simeq x$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение каждого нового решения в виде евклидовой кротовой норы исключительно важно как с макроскопической, так и с микроскопической точки зрения. В частности, очень маленькие евклидовы кротовые норы рассматриваются как инстантоны, а именно как седловые точки в евклидовом интеграле по траекториям. Поэтому их можно использовать для квазиклассической трактовки в приближении разреженных кротовых нор, когда мы пренебрегаем взаимодействием между крупномасштабными концами кротовых нор. С другой стороны, поскольку в теориях с разумным составом материи черные дыры испаряются, новые решения в виде кротовых нор могут давать новые вклады в испарение черных дыр. Аналогично предполагается, что новые решения в виде кротовых нор должны играть свою немаловажную роль в обращении в нуль космологической постоянной. Учитывая важность новых решений в виде кротовых нор и воодушевившись существованием решений в виде евклидовых кротовых нор для некоторых теорий гравитации высшего порядка, мы исследовали классические решения в виде евклидовых кротовых нор для модифицированных теорий $f(\tilde{R})$ -гравитации общего вида в формализме Палатини. Мы использовали хорошо известную динамическую эквивалентность между $f(\tilde{R})$ -гравитацией и теорией О'Ханлона с минимальным взаимодействием. Мы показали существование новых решений в виде евклидовых кротовых нор для теории О'Ханлона, а в специальном случае получили соответствующий вид функции $f(\tilde{R})$ (типа кротовой норы), который при малых $\tilde{R}$ согласуется с решением в виде кротовой норы, полученным для теории гравитации высшего порядка $\tilde{R} + \epsilon \tilde{R}^2$, $\epsilon < 0$.

Вообще говоря, такие кротовые норы в $f(\tilde{R})$ -гравитации могут демонстрировать те же характеристические свойства, которые изучаются в общей теории относительности. Их можно использовать в ряде задач: а) при описании квантовой амплитуды при туннелировании между различными областями пространства-времени; б) для реализации испарения черных дыр; в) для допущения нелокальных связностей при определении фундаментальных постоянных; г) для обращения в нуль космологической постоянной; д) в квазиклассической трактовке в приближении разреженных кротовых нор. Более того, можно исследовать вопрос о том, могут ли кротовые норы влиять на динамические свойства $f(\tilde{R})$ -гравитации, что фактически соответствует исследованию проблемы динамической темной энергии.

Как было отмечено выше, хорошо известно, что метрическая теория и теория Палатини расширенной гравитации становятся неэквивалентными на массовой оболочке в присутствии материи, однако решения $f(\tilde{R})$ -гравитации Палатини представляют подкласс решений метрической $f(R)$ -гравитации в чистой $f(R)$ -теории [17]–[19]. Также можно показать эквивалентность между метрическим формализмом и формализмом Палатини в чистой $f(R)$ -гравитации, используя бездивергентные токи [32]. В результате, поскольку мы рассматривали только чисто гравитационный случай, решения в виде кротовых нор, исследованные в настоящей работе, можно использовать для получения соответствующих решений метрической $f(R)$ -гравитации. Другими словами, представленные в настоящей работе результаты можно интерпретировать в более широком контексте, в котором рассматриваются формализм Палатини и метрический формализм в случае расширенных теорий гравитации [38].

В настоящей работе получены решения для изотропной космологии Фридмана–Робертсона–Уокера, имеющие один масштабный множитель, соответствующий горлышку кротовой норы. Кроме того, интересной задачей представляется обобщение на случай других анизотропных космологических моделей Бьянки с тремя различными масштабными множителями. Для этого следует сначала установить физическую интерпретацию решений в виде кротовых нор, имеющих более одного горлышка, а затем искать такие возможные решения типа решений в виде кротовых нор в анизотропных космологических моделях Бьянки.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за полезные информативные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 217/D/2659 Azarbaijan Shahid Madani University (Tabriz, Iran).

Список литературы

- [1] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*, AIP, Melville, NY, 1995.
- [2] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **37**:4 (1988), 904–910.
- [3] S. Coleman, *Nucl. Phys. B*, **307**:4 (1988), 867–882.
- [4] S. Coleman, *Nucl. Phys. B*, **310**:3–4 (1988), 643–668.
- [5] I. Klebanov, L. Susskind, T. Banks, *Nucl. Phys. B*, **317**:3 (1989), 665–692.
- [6] S. Mignemi, I. Moss, *Phys. Rev. D*, **48**:8 (1993), 3725–3730.
- [7] J. Cheeger, D. Grommol, *Ann. Math.*, **96**:3 (1972), 413–443.
- [8] S. Giddings, A. Strominger, *Nucl. Phys. B*, **306**:4 (1988), 890–907.
- [9] F. S. N. Lobo, M. A. Oliveira, *Phys. Rev. D*, **80**:10 (2009), 104012, 9 pp., arXiv:0909.5539.
- [10] A. G. Agnese, M. La Camera, *Phys. Rev. D*, **51**:4 (1995), 2011–2013.
- [11] K. K. Nandi, B. Bhattacharjee, S. M. K. Alam, J. Evans, *Phys. Rev. D*, **57**:2 (1998), 823–828.
- [12] C. G. Boehmer, T. Harko, F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D*, **85**:4 (2012), 044033, 8 pp., arXiv:1110.5756.
- [13] S. Capozziello, M. Francaviglia, *Gen. Relativity Gravitation*, **40**:2–3 (2008), 357–420, arXiv:0706.1146.
- [14] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B*, **634**:2–3 (2006), 93–100, arXiv:hep-th/0512118.
- [15] S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **4**:1 (2007), 115–145.
- [16] S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D*, **74**:8 (2006), 086005, 13 pp., arXiv:hep-th/0608008.
- [17] G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043524, 11 pp.
- [18] G. Allemandi, M. Capone, S. Capozziello, M. Francaviglia, *Gen. Relativity Gravitation*, **38**:1 (2006), 33–60, arXiv:hep-th/0409198.
- [19] G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia, S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 063505, 10 pp., arXiv:gr-qc/0504057.
- [20] S. Capozziello, F. Darabi, D. Vernieri, *Mod. Phys. Lett. A*, **25**:39 (2010), 3279–3289, arXiv:1009.2580.
- [21] H. Fukutaka, K. Ghoroku, K. Tanaka, *Phys. Lett. B*, **222**:2 (1989), 191–194.
- [22] F. S. Accetta, A. Chodos, B. Shao, *Nucl. Phys. B*, **333**:1 (1990), 221–252.
- [23] P. F. González-Díaz, *Phys. Lett. B*, **233**:1–2 (1989), 85–88.
- [24] P. F. González-Díaz, *Phys. Lett. B*, **247**:2–3 (1990), 251–256.
- [25] O. Bertolami, *Phys. Lett. B*, **234**:3 (1990), 258–264.
- [26] D. H. Coule, K. Maeda, *Class. Quant. Grav.*, **7**:6 (1990), 955–963.
- [27] H. A. Buchdahl, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **150** (1970), 1.
- [28] T. P. Sotiriou, *Class. Quant. Grav.*, **23**:17 (2006), 5117–5128, arXiv:gr-qc/0604028.

- [29] M. Roshan, F. Shojai, *Phys. Lett. B*, **668**:3 (2008), 238–240.
- [30] S. Capozziello, R. de Ritis, A. A. Marino, *Class. Quant. Grav.*, **14**:12 (1997), 3243–3258.
- [31] S. Capozziello, R. de Ritis, A. A. Marino, *Class. Quant. Grav.*, **14**:12 (1998), 3259–3268.
- [32] S. Capozziello, F. Darabi, D. Vernieri, *Modern Phys. Lett. A*, **26**:1 (2011), 65–72, arXiv: 1006.0454.
- [33] J. O’Hanlon, *Phys. Rev. Lett.*, **29**:2 (1972), 137–138.
- [34] J. J. Halliwell, R. Laflamme, *Class. Quant. Grav.*, **6**:12 (1989), 1839–1846.
- [35] Y. Verbin, A. Davidson, *Nucl. Phys. B*, **339**:2 (1990), 545–559.
- [36] D. N. Page, *J. Math. Phys.*, **32**:12 (1991), 3427–3438.
- [37] H. Fukutaka, K. Ghoroku, K. Tanaka, *Phys. Lett. B*, **222**:2 (1989), 191–194.
- [38] S. Capozziello, M. De Laurentis, *Phys. Rep.*, **509**:4–5 (2011), 167–321, arXiv: 1108.6266.

Поступила в редакцию 15.02.2012,
после доработки 27.04.2012