Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гордевский, Приближенное двухпотокое решение уравнения Больцмана,
ТМФ, 1998, том 114, номер 1, 126–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 05:02:42

© 1998 г.

В. Д. Горdevский*

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДВУХПОТОКОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Построено явное приближенное решение трехмерного нелинейного уравнения Больцмана для твердых сфер. Оно имеет вид пространственно неоднородной линейной комбинации двух максвеллианов, отвечающих разным плотностям, температурам и массовым скоростям. Показано, что за счет выбора параметров, входящих в распределение, невязка между левой и правой частями уравнения в интегральной норме может быть сделана сколь угодно малой.

1. ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях, посвященных кинетическому уравнению Больцмана [1], важное место занимает поиск точных решений этого уравнения. Хорошо известны частные решения в виде глобального и локального максвеллианов [1, 2]. Больших успехов удалось достичь в частном случае максвелловских молекул [3–10]. Были получены решения (иногда лишь в виде формальных рядов) и для некоторых более общих случаев [11–14]. Однако для физически содержательных моделей взаимодействия, в частности для модели твердых (упругих) сфер, до сих пор неизвестно явное решение, отличное от максвеллиана. В связи с этим возникает интерес к поиску приближенных явных решений нелинейного уравнения Больцмана, удовлетворяющих ему лишь с произвольной степенью точности. Такие решения служат хорошей аппроксимацией некоторых точных решений, описывающих неравновесные состояния газа, и в силу своей простоты являются удобной моделью для истинных решений уравнения Больцмана, сильно отличающихся от максвеллианов. Заметим, что первые попытки в этом направлении были предприняты еще в послевоенные годы в связи с приближенным описанием ударной волны (распределение Тамма–Мотт–Смита [1, с. 414; 15]).

В работе [16] построено приближенное бимодальное решение трехмерного нелинейного уравнения Больцмана для твердых сфер. Оно имеет вид линейной комбинации двух глобальных максвеллианов с одинаковыми температурами и плотностями, но разными массовыми скоростями, и с коэффициентами специального вида, зависящими от пространственных координат x и времени t (в [16] оно названо “заворачивающим потоком”). В работах [16, 17] показано, что при стремлении температуры к нулю само решение

* Харьковский государственный университет, Харьков, Украина

$f(t, v, x)$, а также левая и правая части уравнения Больцмана $D(f)$ и $Q(f, f)$ не выдерживают предельного перехода в пространстве L с нормой

$$\|g\|_L = \sup_{(x,t) \in R^3 \times R^1} \int_{R^3} |g(t, v, x)| dv, \quad (1)$$

однако норма разности между $D(f)$ и $Q(f, f)$ в L имеет конечный предел. Этот предел точно вычислен в работе [17], причем показано, что он может быть сделан сколь угодно малым при больших числах Кнудсена и соответствующем выборе параметров, характеризующих распределение f . Это означает, что при “околосвободномолекулярном” течении газа возможны потоки, сколь угодно близкие к бимодальным. Отметим, что даже в смысле обобщенных функций распределение f не стремится к максвеллиану в пределе низких температур, т.е. найденное приближенное решение не есть малое отклонение от состояния равновесия.

Целью настоящей работы является исследование поведения обобщенного бимодального распределения (назовем его двухпотоковым), в котором не только массовые скорости максвеллианов, но и температуры, и плотности различны. Переходим к точной постановке задачи.

Уравнение Больцмана, как и в [16], запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \\ \times [f(t, v', x) f(t, v'_1, x) - f(t, v, x) f(t, v_1, x)] \end{aligned} \quad (2)$$

или коротко

$$D(f) = Q(f, f), \quad (2')$$

где $v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha)$; $v'_1 = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha)$; $\alpha \in \Sigma$; Σ – единичная сфера в R^3 ; d – диаметр молекул; $v \in R^3$ – скорость молекулы.

Будем искать решение уравнения (2) в виде бимодального распределения $f = \varphi M + (1 - \varphi)M_0$ с различными максвеллианами M и M_0 , а именно:

$$f(t, v, x) = \varphi(t, x) \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta v^2} + [1 - \varphi(t, x)] \rho_0 \left(\frac{\beta_0}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_0 (v - v_0)^2}. \quad (3)$$

Здесь ρ, ρ_0 – плотности газа, $v_0 \in R^3$ – вторая массовая скорость (первую мы для простоты положили равной 0), $\beta = 1/2T$; $\beta_0 = 1/2T_0$ – обратные температуры газа, а функция $\varphi(t, x)$ имеет вид

$$\varphi(t, x) = [1 + e^{c(x^1 - \mathcal{D}t)}]^{-1}, \quad (4)$$

где $c, \mathcal{D}$ – произвольные параметры, x^1 – первая компонента вектора $x \in R^3$ (в (3) и (4) обозначения по сравнению с работой [16] несколько изменены). Очевидно, что при $x^1 \rightarrow \pm\infty$ или $t \rightarrow \pm\infty$ функция $\varphi(t, x)$ стремится либо к 0, либо к 1, т.е. распределение f в этих случаях стремится к одному из максвеллианов (M или M_0).

Формально (3), (4) напоминает распределение Тамма–Мотт–Смита, однако, как уже отмечалось в [16], разница между ними принципиальна из-за того, что при исследовании ударной волны сразу полагают $v_0^2 = v_0^3 = 0$ (это соблюдается и для модификаций

Холвея, Солвена и др., см. [1, с. 416]), а в нашей схеме v_0 произвольно, более того, именно случай, когда $v_0^1 = 0$, $v_0^2 \neq 0$, $v_0^3 \neq 0$, оказывается наиболее интересным [16, 17]. Отметим в этой связи еще работу [18], в которой на физическом уровне строгости доказывалось, что распределение Тамма–Мотт–Смита точно удовлетворяет уравнению Больцмана. Более строгие рассмотрения [19] не только опровергли этот вывод, но даже позволили получить жесткие оценки снизу для невязки в L_2 -смысле между $D(f)$ и $Q(f, f)$ (в случае моттсмитовского f).

Наша задача состоит в исследовании поведения невязки

$$\Delta = \|D(f) - Q(f, f)\|_L, \quad (5)$$

где f взято в виде (3), (4) в зависимости от поведения параметров ρ , ρ_0 , β , β_0 , v_0 , c , $\mathcal{D}$. Легко видеть, что случаи $\rho_0 \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) и $c \rightarrow 0$ тривиальны. Поэтому в работе основное внимание уделено рассмотрению ситуации, когда $\beta, \beta_0 \rightarrow +\infty$ (низкотемпературный предел) при фиксированных ненулевых значениях остальных параметров.

В разделе 2 проведены необходимые вычисления, связанные с низкотемпературным предельным переходом, результаты которых сформулированы в виде теоремы и следствия.

Раздел 3 посвящен обсуждению как полученных результатов, так и иных возможностей, возникающих в связи с наличием большого числа параметров.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наша цель – выяснить низкотемпературное поведение ($\beta, \beta_0 \rightarrow +\infty$) невязки Δ , определенной равенством (5). Прежде всего вычислим $D(f)$ и $Q(f, f)$ (очевидные выкладки, аналогичные проведенным в работе [16], опустим):

$$D(f) = -\varphi^2 e^{c(x^1 - \mathcal{D}t)} c(v^1 - \mathcal{D})(M - M_0) \quad (6)$$

(здесь v^1 – компонента скорости v вдоль оси x^1);

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \varphi(1 - \varphi) \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| \times \\ \times [M(v')M_0(v'_1) + M_0(v')M(v'_1) - M(v)M_0(v_1) - M_0(v)M(v_1)]. \quad (7)$$

Учитывая, что $\varphi(1 - \varphi) = \varphi^2 e^{c(x^1 - \mathcal{D}t)}$, из (6) и (7) получим

$$D(f) - Q(f, f) = \varphi^2 e^{c(x^1 - \mathcal{D}t)} \left\{ c(v^1 - \mathcal{D})(M_0 - M) - \right. \\ \left. - \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| [M(v')M_0(v'_1) + M_0(v')M(v'_1) - \right. \\ \left. - M(v)M_0(v_1) - M_0(v)M(v_1)] \right\}. \quad (8)$$

Поскольку при любых c и $\mathcal{D}$ очевидно, что

$$\sup_{(x, t) \in R^3 \times R^1} \varphi^2 e^{c(x^1 - \mathcal{D}t)} = \frac{1}{4},$$

из (5), (8) и (1) имеем

$$\Delta = \frac{1}{4} \int_{R^3} dv |c(v^1 - \mathcal{D})(M_0 - M) - G(M, M_0) - G(M_0, M) + M\mathcal{L}(M_0) + M_0\mathcal{L}(M)|, \quad (9)$$

где введены стандартные обозначения для “прибыточных” G и “затратных” $\mathcal{L}$ частей оператора столкновений $Q(f, f)$. Последние два слагаемых легко вычисляются непосредственно с помощью интегрирования по α и замены $w_1 = \sqrt{\beta_0}(v_1 - v_0)$ и $w_1 = \sqrt{\beta}v_1$, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(M_0) &= \frac{d^2 \rho_0}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw_1 \left| v - v_0 - \frac{w_1}{\sqrt{\beta_0}} \right| e^{-w_1^2}, \\ \mathcal{L}(M) &= \frac{d^2 \rho}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw_1 \left| v - \frac{w_1}{\sqrt{\beta}} \right| e^{-w_1^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вычисления $G(M, M_0)$ и $G(M_0, M)$ воспользуемся полученным в работе [20] представлением

$$\begin{aligned} G(M, M_0) = G(M_0, M) &= \pi^2 d^2 [2R\beta\beta_0]^{-1} M M_0 \times \\ &\times \left[\Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q + R\right) - \Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q - R\right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Phi(a, b, z)$ – вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция Куммера, а величины Q и R определены следующим образом (обозначения [20]):

$$Q = \frac{1}{2}(\beta v^2 + \beta_0(v - v_0)^2), \quad (12)$$

$$R = \left[\frac{1}{4}(\beta v^2 - \beta_0(v - v_0)^2)^2 + \beta\beta_0[v \times (v - v_0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) легко видеть, что при $v_0 \neq 0$

$$Q > 0, \quad R \geq 0, \quad Q \geq R, \quad (14)$$

причем $Q = R$ тогда и только тогда, когда

$$\left(v - \frac{v_0}{2} \right)^2 = \frac{v_0^2}{4}, \quad (15)$$

т.е. величина $Q - R$ достигает своего равного нулю минимума в R^3 на сфере с центром в точке $v_0/2$ и радиусом $|v_0|/2$. Величина R достигает своего минимума в R^3 (т.е. обращается в нуль) при

$$v = \frac{\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta_0} \pm \sqrt{\beta}} v_0. \quad (16)$$

Одна из точек (16) не существует, если $\beta_0 = \beta$, другая существует всегда. Поскольку случай $\beta_0 = \beta$ подробно рассмотрен в [16, 17], будем в дальнейшем считать, что $\beta_0 \neq \beta$.

Это удобно формализовать путем введения нового параметра k , характеризующего “перепад” температур максвеллианов:

$$\beta_0 = k\beta, \quad k > 0, \quad k \neq 1. \quad (17)$$

Тогда R достигает нулевого значения в двух (различных!) точках (16), причем обе эти точки не лежат на сфере (15). Учитывая (9), (10), (11) и (17), по аналогии с работой [16] оценим невязку Δ сверху следующим образом:

$$4\Delta \leq I_1 + I_2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} I_2 = & \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int_{R^3} dv e^{-\beta v^2} \left| c(v^1 - \mathcal{D}) + \right. \\ & + \rho_0 \frac{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}R} d^2 e^{-k\beta(v-v_0)^2} \left[\Phi \left(1, \frac{1}{2}, Q + R \right) - \Phi \left(1, \frac{1}{2}, Q - R \right) \right] - \\ & \left. - \frac{d^2 \rho_0}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw_1 \left| v - v_0 - \frac{w_1}{\sqrt{k\beta}} \right| e^{-w_1^2} \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

I_1 выглядит совершенно аналогично с заменой $v_0 \leftrightarrow 0$, $k\beta \leftrightarrow \beta$ и $\rho \leftrightarrow \rho_0$.

Используем в дальнейшем для краткости выкладок введенный в [16] символ “эквивалентности при $\beta \rightarrow +\infty$ ”: если $J(\beta)$ и $H(\beta)$ – две функции параметра β , то запись $J \sim H$ означает, что

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (J - H) = 0 \quad (20)$$

(существование предела каждой из величин J и H не обязательно). Тогда из (19), применяя технику работы [16], можно получить, что

$$\begin{aligned} I_2 \sim & \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int_{R^3} dv e^{-\beta v^2} \times \\ & \times \left| B + \rho_0 \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}{2\sqrt{\beta}R} d^2 e^{-k\beta(v-v_0)^2} \left[\Phi \left(1, \frac{1}{2}, Q + R \right) - \Phi \left(1, \frac{1}{2}, Q - R \right) \right] \right|, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$B = -\mathcal{D}c - \rho_0 \pi d^2 |v_0|. \quad (22)$$

Заметим сразу, что интегралы (19), (21) сходятся (см. приложение). Функция $\Phi(1, 1/2, z)$ при $z > 1$ описывается асимптотической формулой [21]

$$\Phi \left(1, \frac{1}{2}, z \right) = \sqrt{\pi z} e^z + O \left(\frac{1}{z} \right). \quad (23)$$

Используя (23), а также определение и свойства величин Q и R (12)–(16), и вновь опираясь на технику работы [16], из (21) получим

$$I_2 \sim \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int_{R^3} dv e^{-\beta v^2} \left| B + \sqrt{Q + R} \rho_0 \frac{\pi \sqrt{k} d^2}{2\sqrt{\beta} R} \exp [Q + R - \beta k(v - v_0)^2] \right|. \quad (24)$$

Аналогичное выражение встречается и в [16]. Однако дальнейший анализ по схеме этой работы здесь невозможен вследствие гораздо более сложной структуры величин Q и R при $k \neq 1$. Поэтому предел правой части (24), когда $\beta \rightarrow +\infty$, удастся вычислить лишь при некотором предположении. Именно, положим величину B равной нулю, тогда

$$I_2 \sim \rho \rho_0 \frac{\beta d^2 \sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dv \exp\{-\beta v^2 - k\beta(v - v_0)^2 + Q + R\} \frac{\sqrt{Q + R}}{R}. \quad (25)$$

Прежде чем исследовать (25), обсудим предположение $B = 0$. На самом деле это требование налагается лишь при анализе I_2 , а рассмотрение I_1 приводит к аналогичному требованию $E = 0$, где

$$E = c(v_0^1 - \mathcal{D}) + \rho \pi d^2 |v_0|. \quad (26)$$

Легко видеть, что система условий $B = E = 0$ совместна и налагает лишь некоторые ограничения на поведение параметров, остающихся пока свободными. Интересным, на наш взгляд, является условие совместности

$$v_0^1 = \mathcal{D} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right), \quad (27)$$

из которого следует, что $|v_0^1| > |\mathcal{D}|$. Последнее ограничение, видимо, имеет определенный физический смысл, ибо $\mathcal{D}$ — аналог фазовой скорости “волны” (потока), а v_0^1 — соответствующая составляющая массовой скорости.

Возвращаясь к исследованию выражения (25), произведем замену

$$v = u \frac{|v_0|}{2} + \frac{v_0}{2}. \quad (28)$$

Тогда с учетом (12), (13) и (17) получим

$$I_2 \sim \rho \rho_0 \frac{d^2 \sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\beta} \left(\frac{|v_0|}{2}\right)^3 \int_{R^3} du P(u, k) e^{-\beta S(u, k)}, \quad (29)$$

где

$$P(u, k) = \sqrt{\frac{\beta(Q + R)}{R^2}}, \quad (30)$$

$$S(u, k) = \frac{1}{2\beta}(Q - R)v_0^2. \quad (31)$$

Далее, переходя сначала в (29) к сферической системе координат с осью z , направленной вдоль v_0 (введены обозначения $r = |u|$, $\pi/2 - \psi$ — угол между векторами u и v_0), а затем вводя переменную $s = \sin \psi$, будем иметь

$$I_2 \sim \rho \rho_0 \frac{d^2 \sqrt{k}}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi \beta} v_0^2 \int_{-1}^1 ds \int_0^{+\infty} P(r, s, k) e^{-\beta S(r, s, k)} = F(\beta, k), \quad (32)$$

где

$$P(r, s, k) = r^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta}Q(r, s, k) + \frac{1}{\beta}R(r, s, k)}{\left(\frac{1}{\beta}R(r, s, k)\right)^2}}, \quad (33)$$

$$S(r, s, k) = \left(\frac{1}{\beta}Q(r, s, k) - \frac{1}{\beta}R(r, s, k)\right) \frac{v_0^2}{2}, \quad (34)$$

$$\frac{1}{\beta}Q(r, s, k) = \frac{1+k}{4}r^2 + \frac{1}{2}rs(1-k) + \frac{1}{4}(1+k), \quad (35)$$

$$\frac{1}{\beta}R(r, s, k) = \left[\left(\frac{1-k}{4}r^2 + \frac{1}{2}rs(1+k) + \frac{1-k}{4}\right)^2 + kr^2(1-s^2)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Итак, нас интересует асимптотика при $\beta \rightarrow +\infty$ двойного интеграла $F(\beta, k)$, взятого по полуполосе:

$$\Omega = \{(r, s) \in R^2 : r \geq 0; -1 \leq s \leq 1\}. \quad (37)$$

Имея целью применить здесь метод Лапласа, перечислим основные свойства функций P и S (они легко проверяются исходя из (33)–(36)):

$$\max_{\Omega} \{-S(r, s, k)\} = 0 = S(1, s, k), \quad (38)$$

т.е. глобальный максимум функции $-S$ на Ω достигается на отрезке $A = \{(r, s) \in R^2 : r = 1; -1 \leq s \leq 1\}$; функция $P(r, s, k)$ бесконечно дифференцируема в окрестности отрезка A и непрерывна всюду в Ω , кроме двух интегрируемых особенностей, не лежащих на A , так что интеграл (32) абсолютно сходится; кроме того,

$$P(r, s, k) > 0, \quad (r, s) \in \Omega, \quad (39)$$

и наконец,

$$-S''_{rr}(1, s, k) = \frac{-kv_0^2}{(s+1) + k(1-s)} < 0. \quad (40)$$

Значит, к интегралу (32) может быть применена теорема Федорюка [22, гл. II, теорема 4.8], которая дает

$$F(\beta, k) = \rho\rho_0 \frac{d^2\sqrt{k}}{4\sqrt{2}} \pi v_0^2 \left[\int_A P(r, s, k) \omega_h + o(1) \right], \quad (41)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow +\infty$; криволинейный интеграл берется по отрезку A , а ω_h – дифференциальная форма Лере–Гельфанда для функции h :

$$h(r, s, k) = \sqrt{-S(r, s, k)}. \quad (42)$$

Из (41) и (42) прямым вычислением получаем

$$I_2 \sim \rho\rho_0 \pi d^2 |v_0|. \quad (43)$$

Сразу же заметим, что результат не зависит от k , т.е. при любом фиксированном перепаде температур в исходном бимодальном распределении низкотемпературный предел величины I_2 один и тот же! Аналогичное, разумеется, верно и для I_1 . Более того, опираясь на другую теорему [22, гл. II, теорема 2.1] и рассматривая переменные s, k как двумерный параметр в одномерном интеграле по r , нетрудно показать, что $F(\beta, k)$ стремится к пределу (43) при $\beta \rightarrow +\infty$ равномерно на любом отрезке $k \in [k_1, k_2]$, где $k_1, k_2 > 0$ (ограничение $k \neq 1$ также снимается). Наконец, очевидно, что результат (43) при $\rho = \rho_0 = 1$ соответствует результату работы [16].

Все вышеизложенное позволяет считать доказанной следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если параметры бимодального распределения (3), (4) связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} B = -\mathcal{D}c - \rho_0 \pi d^2 |v_0| &= 0, & E = c(v_0^1 - \mathcal{D}) + \rho \pi d^2 |v_0| &= 0, \\ \beta_0 &= k\beta, & 0 < k < +\infty, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I_1 = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} I_2 = \rho \rho_0 \pi d^2 |v_0|,$$

где I_1 и I_2 определены в (18), (19).

Исходя из (18) и выражений для B и E легко видеть, что для “околосвободномолекулярного” течения (d мало) имеет место следующее следствие из этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть величины $v_0^2 \neq 0$, $v_0^3 \neq 0$, $c \neq 0$, $\rho > 0$, $\rho_0 > 0$, $k > 0$ произвольны и фиксированы. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\mathcal{D}$, v_0^1 , d , связанных соотношениями $B = E = 0$ и удовлетворяющих условиям $|\mathcal{D}| < \delta$, $|v_0^1| < \delta$, $0 < d < \delta$, существует такое $N > 0$, что при всех $\beta > N$ справедливо неравенство*

$$\Delta = \|D(f) - Q(f, f)\|_L < \epsilon. \quad (44)$$

Этот факт проще всего можно записать с помощью специального “повторного” предельного перехода

$$\lim_{\substack{\mathcal{D} \rightarrow 0 \\ v_0^1 \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Delta = 0, \quad (45)$$

где внешний предел берется по “траектории” в пространстве параметров $\mathcal{D}$, v_0^1 , d , определяемой условиями $B = E = 0$. Разумеется, (45) следует понимать лишь символически, т.к. существование внутреннего предела при $k \neq 1$ на самом деле доказано не для самого Δ , а лишь для величин I_1 и I_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что при $B = E = 0$ стремление любого из параметров $\mathcal{D}$, v_0^1 , d к нулю влечет за собой стремление к нулю и двух других.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказанные теорема и следствие аналогичны результатам работы [16], т.е. случай различных температур принципиально не отличается от случая равных температур. Технические трудности не позволяют перенести на двухпоточковые решения результаты работы [17] и избавиться от требований $B = E = 0$. Тем не менее можно считать установленным, что при больших числах Кнудсена возможны течения газа из твердых сфер, сколь угодно близкие к двухпоточковому, причем перепад температур k произволен. Помимо предельного перехода (45), имеется много других возможностей, связанных с остальными параметрами распределения f . Отметим некоторые из них (другие либо затруднительны для исследования, либо тривиальны: например, при $c \rightarrow 0$ исчезает зависимость от x и t , при $d \rightarrow 0$ сразу получаем кнудсеновский газ и т.п.).

1. Интересно было бы в (25) сначала устремить k к нулю или бесконечности при фиксированном β . Однако зависимость подынтегральной функции от параметра k весьма сложна, и не удастся строго обосновать предельный переход по k . Если же осуществить его формально, то полученная функция от β в пределе $\beta \rightarrow +\infty$ все равно дает (43).

2. При $k \neq 1$ приобретает интерес и случай $v_0 \rightarrow 0$ (или даже $v_0 = 0$), который тривиален при $k = 1$. Легко видеть, что тогда для любого $d > 0$

$$\lim_{\mathcal{D} \rightarrow 0} \lim_{v_0 \rightarrow 0} \lim_{\beta, \beta_0 \rightarrow +\infty} \Delta = \lim_{\mathcal{D} \rightarrow 0} \lim_{\beta, \beta_0 \rightarrow +\infty} \lim_{v_0 \rightarrow 0} \Delta = 0. \quad (46)$$

Существенно, что в этом случае d произвольно, т.е. (46) имеет место для любого газа, а не только близкого к кнудсеновскому. Правда, физический смысл этой ситуации не столь интересен, ибо здесь и M , и M_0 стремятся к δ -функции, сосредоточенной в нуле (хотя и с разной скоростью). Это значит, что в пределе мы получаем “мертвый газ”, т.е. все молекулы покоятся.

3. Интересный эффект наблюдается при попытке поменять местами два предельных перехода $\beta \rightarrow +\infty$ и $v_0 \rightarrow 0$ в случае $k = 1$, $\rho = \rho_0 = 1$ (остальные параметры фиксированы). Тогда очевидно, что

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lim_{v_0 \rightarrow 0} \Delta = 0 \quad (47)$$

(т.к. $\lim_{v_0 \rightarrow 0} \Delta(\beta, v_0) = \Delta(\beta, 0) = 0$, поскольку при указанных выше условиях и $v_0 = 0$ распределение f совпадает с максвеллианом). С другой стороны, из результатов [17] вытекает, что

$$\lim_{v_0 \rightarrow 0} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Delta = \frac{1}{2} |\mathcal{D}c|. \quad (48)$$

Мы видим, что (47) и (48) не совпадают, т.е. функция

$$\tilde{\Delta}(T, v_0) = \Delta\left(\frac{1}{2T}, v_0\right) = \Delta(\beta, v_0)$$

не является непрерывной в точке $T = 0$, $v_0 = 0$.

4. Как отмечалось в [16, 17], уже на первом этапе предельного перехода (45), т.е. при $\beta \rightarrow +\infty$, функция f , а также $D(f)$ и $Q(f, f)$ выходят из пространства L и имеют предел лишь в пространстве обобщенных функций, однако величина Δ , т.е. норма разности

$D(f) - Q(f, f)$ в пространстве L , при $k = 1$ имеет конечный предел (по-видимому, это будет так и при $k \neq 1$, хотя строгого доказательства пока нет). Значит, можно сказать, что уравнение Больцмана для функций f рассматриваемого вида ведет себя более регулярным образом, чем сами функции f .

Автор выражает искреннюю признательность А. В. Бобылеву за полезные обсуждения полученных результатов и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, например, сходимост ь интеграла (21). Подынтегральная функция с точностью до констант не превосходит суммы

$$|B|e^{-\beta v^2} + \frac{1}{R} \exp\{-\beta v^2 - k\beta(v - v_0)^2\} \Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q + R\right) + \frac{1}{R} \exp\{-\beta v^2 - k\beta(v - v_0)^2\} \Phi\left(1, \frac{1}{2}, Q - R\right). \quad (49)$$

Интеграл от первого слагаемого в (49) сходится, а третье из них, очевидно, мажорируется вторым. В силу асимптотики (23) достаточно таким образом обосновать сходимост ь интеграла

$$I = \int_{R^3} dv \exp\{-\beta v^2 - k\beta(v - v_0)^2 + Q + R\} \frac{\sqrt{Q + R}}{R}. \quad (50)$$

Благодаря (12) и (17) интеграл (50) упрощается, и мы имеем

$$I = \int_{R^3} dv e^{-(Q-R)} \frac{\sqrt{Q + R}}{R}. \quad (51)$$

Приведем величины R и $Q - R$ к более удобному виду исходя из (12), (13) (θ – угол между векторами v и $v - v_0$):

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{1}{4} (\beta v^2 - \beta_0 (v - v_0)^2)^2 + \beta \beta_0 v^2 (v - v_0)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1}{4} (\beta v^2 + \beta_0 (v - v_0)^2)^2 - \beta \beta_0 v^2 (v - v_0)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{1}{4} (\beta v^2 + \beta_0 (v - v_0)^2)^2 - \beta \beta_0 (v, v - v_0)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} |\sqrt{\beta} v - \sqrt{\beta_0} (v - v_0)| |\sqrt{\beta} v + \sqrt{\beta_0} (v - v_0)| = \\ &= \frac{1}{2} |v(\sqrt{\beta_0} - \sqrt{\beta}) - \sqrt{\beta_0} v_0| |v(\sqrt{\beta_0} + \sqrt{\beta}) - \sqrt{\beta_0} v_0|. \end{aligned} \quad (52)$$

Во-первых, из (52) видно, что величина R имеет в точках (16) корни первого порядка,

что приводит к двум интегрируемым полюсам в (51). Во-вторых, используя (52), получим

$$\begin{aligned}
 Q - R &= \frac{1}{2}(\beta v^2 + \beta_0(v - v_0)^2) - \frac{1}{2}|\sqrt{\beta}v - \sqrt{\beta_0}(v - v_0)| |\sqrt{\beta}v + \sqrt{\beta_0}(v - v_0)| = \\
 &= \frac{1}{4} \left[(\sqrt{\beta}v - \sqrt{\beta_0}(v - v_0))^2 + (\sqrt{\beta}v + \sqrt{\beta_0}(v - v_0))^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2|\sqrt{\beta}v - \sqrt{\beta_0}(v - v_0)| |\sqrt{\beta}v + \sqrt{\beta_0}(v - v_0)| \right] = \\
 &= \frac{1}{4} (|\sqrt{\beta}v + \sqrt{\beta_0}(v - v_0)| - |\sqrt{\beta}v - \sqrt{\beta_0}(v - v_0)|)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \left(|v(\sqrt{\beta_0} + \sqrt{\beta}) - \sqrt{\beta_0}v_0| - |v(\sqrt{\beta_0} - \sqrt{\beta}) - \sqrt{\beta_0}v_0| \right)^2. \quad (53)
 \end{aligned}$$

При $v \rightarrow \infty$ выражение (53), очевидно, имеет следующий асимптотический вид:

$$\frac{1}{4}v^2 \left(\sqrt{\beta_0} + \sqrt{\beta} - |\sqrt{\beta_0} - \sqrt{\beta}| \right)^2, \quad (54)$$

т.е. на бесконечности интеграл (51) ведет себя одинаково с интегралом

$$\int_{R^3} dv \exp \left\{ -\frac{1}{4}v^2 \left(\sqrt{\beta_0} + \sqrt{\beta} - |\sqrt{\beta_0} - \sqrt{\beta}| \right)^2 \right\} \sqrt{\frac{Q + R}{R^2}}. \quad (55)$$

Коэффициент при v^2 в экспоненте отрицателен, а подкоренное выражение, как видно из (12) и (52), ограничено при $v \rightarrow \infty$. Следовательно, интеграл (55) сходится, что и требовалось.

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [2] Т. Карлеман. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИИЛ, 1960.
- [3] R. S. Krauss. Magister Sciences thesis: MIT 1967.
- [4] А. В. Бобылев. Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 6. С. 1296–1299.
- [5] А. В. Бобылев. Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 3. С. 571–574.
- [6] M. Krook, T. Wu. Phys. Fluids. 1977. V. 20. № 10(1). P. 1589–1595.
- [7] А. А. Никольский. Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 2. С. 299–302.
- [8] E. Ikenberry, C. Truesdall. Ration Mech. and Anal. 1956. V. 5. № 1. P. 1–129.
- [9] В. С. Галкин. Прикл. матем. и мех. 1956. Т. 20. № 3. С. 445–446.
- [10] H. M. Ernst. J. Stat. Phys. 1984. V. 34. № 5/6. P. 1001–1017.
- [11] А. В. Бобылев. Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 1361–1365.
- [12] В. В. Веденяпин. Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 338–342.
- [13] Д. Я. Петрина, А. В. Мищенко. Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 2. С. 338–342.
- [14] А. В. Мищенко, Д. Я. Петрина. ТМФ. 1988. Т. 77. № 1. С. 135–153.
- [15] И. Е. Тамм. Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 239–249.
- [16] В. Д. Гордевский. Матем. физ., анализ, геом. 1995. Т. 2. № 2. С. 168–176.
- [17] В. Д. Гордевский. Матем. физ., анализ, геом. 1997. Т. 4. № 1/2. С. 1–12.
- [18] A. Sakurai. J. Fluid Mech. 1957. Part 3. P. 255–260.
- [19] R. Narasimha, S. M. Deshpande. J. Fluid Mech. 1969. V. 36. № 3. P. 555–570.
- [20] S. M. Deshpande, R. Narasimha. J. Fluid Mech. 1969. V. 36. № 3. P. 545–554.
- [21] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
- [22] М. Ф. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 9.IX.1996 г.,
после доработки 3.VI.1997 г.