Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, О разрушении решения в системах типа
Кортвега–де Фриза, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 2, 197–
206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:24:17

© 2012 г.

Е. В. Юшков*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМАХ ТИПА КОРТВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Рассмотрена парная система Кортвега–де Фриза типа Буссинеска и ее симметричный вариант. Для таких систем, описывающих поведение жидкости в канале, было показано, что при определенных условиях у них отсутствует глобальное во времени решение. С использованием метода нелинейной емкости получены достаточные условия разрушения решения и оценка времени разрушения как для этих систем, так и для обобщенной многокомпонентной системы типа Кортвега–де Фриза.

Ключевые слова: система уравнений типа Кортвега–де Фриза, система типа Буссинеска, начально-краевая задача, глобальная во времени разрешимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы изучаем проблему глобальной во времени разрешимости начально-краевых задач для обобщенных систем уравнений типа Кортвега–де Фриза (КдФ). Большинство таких систем являются аппроксимациями двумерных уравнений Эйлера, описывающих распространение волн идеальной жидкости на свободной поверхности горизонтальных каналов. Исследуемая система

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x + \frac{1}{6}u_{xxx} = 0, \quad u_t + \eta_x + uu_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0$$

и ее двумерный симметричный аналог

$$\eta_t + u_x + \frac{1}{2}(\eta u)_x + \frac{1}{6}u_{xxx} = 0, \quad u_t + \eta_x + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0$$

хорошо описывают распространение длинных волн малой амплитуды с числом Стокса порядка $O(1)$ (см., например, работу [1]). Независимые переменные x и t представляют собой безразмерную координату вдоль канала и время, η – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня, а $u(x, t)$ характеризует зависимость горизонтальной скорости от x, y, t , где y – это безразмерная высота, равная расстоянию до дна, умноженному на $\sqrt{2/3}$ [2].

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Наиболее интересным вопросом для этих систем, которому, несомненно, посвящено большинство работ, является вопрос о поведении солитонных решений специального вида [1], [2]. Поскольку солитоны такого же вида описываются уравнением КдФ пятого порядка

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

для полноты картины мы исследуем и это уравнение, вызывающее большой интерес при описании гравитационно-капиллярных волн (см. работы [3], [4]). Кроме того, так как исследование задач для систем в неограниченных областях сопряжено с большими техническими сложностями, на примере уравнения (1) мы демонстрируем, как изучать эффект разрушения в неограниченных областях и при произвольных граничных условиях.

Используя метод пробной функции (нелинейной емкости), предложенный в работах [5], [6] и примененный в работе [7] к уравнениям гидродинамического типа, мы получаем результат о разрушении классических решений за конечное время, оценив снизу время разрушения. Однако начнем мы с обобщенной системы КдФ [8]

$$\partial_t u_k + \partial_x \left[\frac{1}{2} u_k \sum_{j=1}^N a_{kj} u_j + \partial_x^2 u_k \right] = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

рассмотрев частные случаи как наиболее интересные с точки зрения приложений в математической физике.

С используемыми обозначениями и определениями подробно можно ознакомиться в работах [5], [9]. Отметим, что часто удобно исследовать системы, в которых перед всеми слагаемыми, кроме производных по времени, стоит знак минус; для этого достаточно заменить x на $-x$.

2. ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА КдФ

Начнем с рассмотрения следующей начально-краевой задачи на отрезке $[0, L]$:

$$\partial_t u_k - \partial_x \left[\frac{1}{2} u_k \sum_{j=1}^N a_{kj} u_j + \partial_x^2 u_k \right] = 0, \quad (2)$$

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

плюс граничные условия. Заметим, что эта система уравнений описывает весьма широкий класс задач, в частности, если матрица $\{a_{kj}\}$ единичная, то можно сложить все уравнения и получить уравнение КдФ для новой переменной. Со случаем единичной матрицы читатель может ознакомиться в работе [5]. Мы также наложим определенные условия на коэффициенты a_{kj} : предположим, что существуют такие константы α и b , что для всех $k = 1, \dots, N$

$$a_{kk} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq k}} \frac{b^2 a_{kj}}{2} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq k}} \frac{a_{jk}}{2b^2} \geq \alpha^2. \quad (4)$$

Этому условию удовлетворяют, например, антисимметричные положительно определенные матрицы. Умножим все уравнения системы (2) на пробную функцию

$\varphi(x) = L - x$, проинтегрируем на отрезке $[0, L]$ и сложим друг с другом. Вводя обозначение $u = \sum_{k=1}^N u_k$, запишем полученный результат:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)u \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L (L - x) \partial_x \left[\sum_{k,j=1}^N a_{kj} u_k u_j + 2\partial_x^2 u \right] dx. \quad (5)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^N a_{kj} u_k u_j &= \sum_{k=1}^N a_{kk} u_k^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ k \neq j}} a_{kj} u_k u_j \geq \sum_{k=1}^N a_{kk} u_k^2 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ k \neq j}} a_{kj} \left(\frac{b^2 u_k^2}{2} + \frac{u_j^2}{2b^2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N u_k^2 \left(a_{kk} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq k}} \frac{b^2 a_{kj}}{2} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq k}} \frac{a_{jk}}{2b^2} \right) \geq \alpha^2 \sum_{k=1}^N u_k^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} u^2. \end{aligned}$$

Используя эти неравенства и интегрируя по частям равенство (5) на отрезке $[0, L]$, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)u \, dx = \frac{\alpha^2}{4} \int_0^L u^2 \, dx - \frac{L}{2} \sum_{k,j=1}^N a_{kj} u_k u_j \Big|_{x=0} - L u_{xx} \Big|_{x=0} + u_x \Big|_{x=0}^{x=L}.$$

Предположим, что граничные условия таковы, что

$$-\frac{1}{L} u_x \Big|_{x=L} - \frac{1}{L} u_x \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N a_{kj} u_k u_j \Big|_{x=0} - u_{xx} \Big|_{x=0} \geq -\beta^2, \quad (6)$$

тогда, пользуясь неравенством

$$\left(\int_0^L (L - x)u \, dx \right)^2 \leq \int_0^L u^2 \, dx \cdot \int_0^L (L - x)^2 \, dx, \quad (7)$$

получим, что

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{3\alpha^2}{4L^3} J^2 - \beta^2 L, \quad J(t) = \int_0^L (L - x)u \, dx.$$

Это обыкновенное дифференциальное неравенство приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что существуют такие константы b , α и β , что для начальных данных задачи (2), (3) выполнено неравенство*

$$J(0) \geq L^2 \frac{2\beta}{\sqrt{3}\alpha},$$

а для $u = \sum_{k=1}^N u_k$ справедливо неравенство (6); кроме того, для всех $k = 1, \dots, N$ выполнено условие (4). Тогда не существует глобального во времени классического решения на отрезке $[0, L]$, причем имеет место следующая оценка:

$$J(t) \geq L^2 \frac{2\beta}{\sqrt{3}\alpha} \cdot \frac{1 + C_0 e^{2\gamma t}}{1 - C_0 e^{2\gamma t}},$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}\alpha\beta}{2L}, \quad C_0 = \frac{\sqrt{3}\alpha J(0) - 2\beta L^2}{\sqrt{3}\alpha J(0) + 2\beta L^2}.$$

3. СИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА КДФ–КДФ

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\eta_t - u_x - \frac{1}{2}(\eta u)_x - \frac{1}{6}u_{xxx} = 0, \quad (8)$$

$$u_t - \eta_x - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad L > 0, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \eta|_{x=0} = \eta_x|_{x=0} = \eta_{xx}|_{x=0} = 0. \quad (11)$$

Исследуем вопрос о разрушении гладкого решения задачи (8)–(11). Другими словами, предположим, что найдется такое $T > 0$, что существует классическое решение задачи $u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}([0, L]))$, $\eta(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}([0, L]))$. Воспользуемся симметрией системы, умножим уравнения (8) и (9) на пробную функцию $\varphi(x) = (L - x)^5$ и проинтегрируем на отрезке $[0, L]$. Нетрудно проверить, что после интегрирования по частям в силу граничных условий мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)^5 \eta dx &= 5 \int_0^L (L - x)^4 \left(u + \frac{1}{2}u\eta \right) dx + 10 \int_0^L (L - x)^2 u dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)^5 u dx &= 5 \int_0^L (L - x)^4 \left(\eta + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{3}{4}u^2 \right) dx + 10 \int_0^L (L - x)^2 \eta dx. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $\eta = v - 2$ и сложим уравнения этой системы, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)^5 (u + v) dx &= 5 \int_0^L (L - x)^4 \left(\frac{1}{2}uv + \frac{1}{4}v^2 + \frac{3}{4}u^2 \right) dx + \\ &+ 10 \int_0^L (L - x)^2 (u + v) dx + L^5 + \frac{20}{3}L^3. \end{aligned}$$

Воспользуемся очевидным неравенством $uv \leq v^2/4 + u^2$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)^5 (u + v) dx &\geq 10 \int_0^L (L - x)^2 (u + v) dx + \\ &+ 5 \int_0^L (L - x)^4 \left(\frac{v^2}{8} + \frac{u^2}{4} \right) dx + L^5 + \frac{20}{3}L^3. \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь неравенством $v^2 + u^2 \geq (v + u)^2/2$, из (12) выводим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)^3 [(L - x)^2 (u + v) + 16] dx &\geq \\ &\geq 10 \int_0^L (L - x)^2 (u + v) dx + L^5 + \frac{20}{3}L^3 + \frac{5}{16} \int_0^L (L - x)^4 (u + v)^2 dx \geq \\ &\geq \frac{5}{16} \int_0^L [(L - x)^2 (u + v) + 16]^2 dx + L^5 + \frac{20}{3}L^3 - 80L. \end{aligned}$$

Наконец, из неравенства

$$\begin{aligned} \left(\int_0^L (L-x)^3 [(L-x)^2(u+v)+16] dx \right)^2 &\leq \\ &\leq \int_0^L [(L-x)^2(u+v)+16]^2 dx \cdot \int_0^L (L-x)^6 dx, \end{aligned}$$

положив

$$J(t) = \int_0^L (L-x)^3 [(L-x)^2(u+v)+16] dx,$$

получим обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{35}{16L^7} J^2 + L^5 + \frac{20}{3} L^3 - 80L.$$

Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть константы a и k задаются соотношениями

$$k^2 = \frac{35}{16L^7}, \quad L^5 + \frac{20}{3} L^3 - 80L \geq -a^2,$$

и для начальных данных задачи (8)–(11) выполнено неравенство $J(0) \geq a/k$. Тогда не существует глобального во времени классического решения на отрезке $[0, L]$, причем имеет место следующая оценка:

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \cdot \frac{1 + C_0 e^{2akt}}{1 - C_0 e^{2akt}}, \quad C_0 = \frac{kJ(0) - a}{kJ(0) + a}.$$

Следует заметить, что результат о разрушении решения может быть получен для начально-краевой задачи с гораздо более мягкими условиями на границах. С целью экономии времени читателя, а также из-за большого объема выкладок мы далее рассматриваем такие условия только для уравнения КдФ пятого порядка.

4. УРАВНЕНИЕ КДФ ПЯТОГО ПОРЯДКА

4.1. Задача на отрезке $x \in [0, L]$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t - uu_x - u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad L > 0, \quad (13)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (14)$$

плюс условия на левой границе. Эта задача хорошо изучена численными и асимптотическими методами [3], [4], поэтому наше исследование феномена разрушения в случае уравнения КдФ с дополнительным слагаемым служит прежде всего для демонстрации гибкости метода пробной функции. В частности, речь пойдет об исключении правых граничных условий и о ненулевых граничных условиях на левой границе; также мы рассмотрим задачи в неограниченных областях $[0, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$ (см. пп. 4.2 и 4.3). Мы полагаем, что аккуратному исследователю не составит труда самостоятельно получить соответствующий результат и для систем уравнений.

Под решением задачи (13), (14) будем понимать классическое решение

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(5)}([0, L])).$$

В качестве пробной функции возьмем $\varphi(x) = (L-x)^9$. Заметим, что, взяв в качестве пробной функции $(L-x)^\lambda$ при $\lambda > 9$, мы получим аналогичный результат. Умножим уравнение (13) на пробную функцию и проинтегрируем его на отрезке $[0, L]$ по частям, получим равенство

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (L-x)^9 u \, dx = \frac{9}{2} \int_0^L (L-x)^8 u^2 \, dx + \int_0^L u \left(\frac{9!}{6!} (L-x)^6 + \frac{9!}{4!} (L-x)^4 \right) dx - A,$$

где

$$A = \left\{ L^9 u_{xxxxx} + 9L^8 u_{xxx} + \left(\frac{9!}{7!} L^7 + L^9 \right) u_{xx} + \left(\frac{9!}{6!} L^6 + 9L^8 \right) u_x + \right. \\ \left. + \left(\frac{9!}{5!} L^5 + \frac{9!}{7!} L^7 \right) u + \frac{1}{2} L^9 u^2 \right\}_{x=0}.$$

Собирая полные квадраты под знаком интеграла, можно показать справедливость равенства

$$\frac{dF}{dt} = \frac{9}{2} \int_0^L (L-x)^8 \left(u + \frac{8!}{6!} (L-x)^{-2} + \frac{8!}{4!} (L-x)^{-4} \right)^2 dx - (B + A). \quad (15)$$

Здесь

$$F(t) = \int_0^L (L-x)^9 \left(u + \frac{8!}{6!} (L-x)^{-2} + \frac{8!}{4!} (L-x)^{-4} \right) dx, \\ B = \frac{9}{2} \left(\frac{8!}{4!} \right)^2 \left(L + \frac{L^3}{45} + \frac{L^5}{4500} \right).$$

Очевидно, что

$$F^2(t) \leq \int_0^L (L-x)^8 \left(u + \frac{8!}{6!} (L-x)^{-2} + \frac{8!}{4!} (L-x)^{-4} \right)^2 dx \cdot \int_0^L (L-x)^{10} dx.$$

С учетом этого неравенства и неравенства (15) мы получаем

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - a^2, \quad k^2 = \frac{99}{2L^{11}}, \quad a^2 = B + A. \quad (16)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для начальных данных задачи (13), (14) справедливо неравенство $F(0) \geq a/k$. Тогда не существует глобального во времени классического решения задачи на отрезке $[0, L]$, причем имеет место следующая оценка:

$$F(t) \geq \frac{a}{k} \cdot \frac{1 + C_0 e^{2akt}}{1 - C_0 e^{2akt}}, \quad C_0 = \frac{kF(0) - a}{kF(0) + a}.$$

4.2. Задача на луче $[0, \infty)$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t - uu_x - u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad (17)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = u_{xxxx}|_{x=0} = 0. \quad (18)$$

Для классического решения задачи на отрезке $[0, L]$ с нулевыми граничными условиями на левой границе, как мы показали, справедливо неравенство (16) (в данном случае $A = 0$). Для достаточно больших L

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - L^6 a^2$$

и

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} L^6 B k^2 = a_0^2 k_0^2, \quad k_0^2 = \frac{99}{2}, \quad a_0^2 = \frac{9}{2} \left(\frac{8!}{4!} \right)^2 \frac{1}{4500}.$$

Кроме того,

$$kF(0) - L^3 a = k_0 L^{9/2} \int_0^1 (1-r)^9 \left(u_0 + L^{-2} \frac{8!}{6!} (1-r)^{-2} + L^{-4} \frac{8!}{4!} (1-r)^{-4} \right) dr - a_0 L^{11/2},$$

где мы сделали замену переменной $x = Lr$. Переходя к пределу $L \rightarrow +\infty$, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Положим*

$$F_\infty(t) = \lim_{L \rightarrow +\infty} L^{-1} \int_0^1 (1-r)^9 u(Lr, t) dr.$$

Пусть начальные данные задачи (17), (18) таковы, что выполнено неравенство $F_\infty(0) \geq a_0/k_0$. Тогда не существует глобального во времени классического решения на луче $[0, +\infty)$, причем имеет место следующая оценка:

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \cdot \frac{1 + C_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - C_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad C_\infty = \frac{k_0 F_\infty(0) - a_0}{k_0 F_\infty(0) + a_0}.$$

Заметим, что нам удалось избежать постановки граничных условий на бесконечности. К сожалению, методом пробной функции этого не удастся сделать для задачи на прямой $(-\infty, \infty)$.

4.3. Задача на прямой $(-\infty, \infty)$. Рассмотрим сначала следующую начально-краевую задачу:

$$u_t - uu_x - u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad x \in (-L, L), \quad L > 0, \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (20)$$

$$u'(L, t) + u^{(3)}(L, t) - Lu^2(-L, t) - 2Lu''(-L, t) - 4Lu^{(4)}(-L, t) = f(L, t). \quad (21)$$

Решение задачи будем искать в классе функций $u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(4)}(-\infty, +\infty))$. Умножим обе части уравнения (19) на пробную функцию $\varphi(x) = L - x$ и проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (L - x) u dx = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx + f(L, t).$$

Воспользовавшись неравенством (7), отсюда получим неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{3}{2L^3} J^2 - |f(L, t)|, \quad J(t) = \int_0^L (L - x)u \, dx.$$

Тогда при достаточно больших L

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{3}{2L^3} J^2 - L^3 |f(L, t)|,$$

следовательно, рассуждая аналогично случаю для полупрямой, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Положим*

$$J_\infty(t) = \lim_{L \rightarrow +\infty} L^{-1} \int_0^1 (1 - r)^9 u(Lr, t) \, dr.$$

Пусть начальные данные задачи (19)–(21) таковы, что выполнено неравенство $J_\infty(0) \geq a_0/k_0$. Тогда не существует глобального во времени классического решения на прямой $(-\infty, +\infty)$, причем имеет место следующая оценка:

$$J_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \cdot \frac{1 + C_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - C_\infty e^{2a_0 k_0 t}},$$

где

$$k_0^2 = \frac{3}{2}, \quad a_0^2 = |f(L, t)|, \quad C_\infty = \frac{k_0 J_\infty(0) - a_0}{k_0 J_\infty(0) + a_0}.$$

5. НЕСИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА КДФ–КДФ

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы

$$\eta_t - u_x - (\eta u)_x - \frac{1}{6} u_{xxx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad L > 0, \quad (22)$$

$$u_t - \eta_x - uu_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx} = 0, \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(x). \quad (24)$$

Заметим, что данная система несимметрична и не сводится к обобщенной системе КДФ, поэтому задание граничных условий будет отличаться от предыдущих примеров, но техника исследования эффекта разрушения останется такой же. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} L\eta + \frac{1}{6}\eta_x + \frac{1}{6}L\eta_{xx}|_{x=0} &= f_1(t), & \eta|_{x=L} &= \eta_x|_{x=L} = 0, \\ u|_{x=0} &= u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, & u + \frac{1}{6}u_{xx}|_{x=L} &= f_2(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим сразу, что такой выбор граничных условий не обязателен для получения теоремы о разрушении, а лишь наиболее удобен для представления результата.

Решение, как обычно, понимается в классическом смысле. Умножим уравнение (23) на пробную функцию $\varphi(x) = L - x$ и проинтегрируем получившееся уравнение и уравнение (23) по всей области. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_0^L \eta \, dx &= f_2, \\ \frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)u \, dx &= \int_0^L \eta \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \, dx - f_1.\end{aligned}$$

Проинтегрировав по времени первое уравнение, из второго уравнения можно получить, что

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (L - x)u \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \, dx + \int_0^L \eta_0 \, dx + \int_0^t f_2(s) \, ds - f_1.$$

Предположим, что существует такая константа a , что выполнено неравенство

$$\int_0^L \eta_0 \, dx + \int_0^t f_2(s) \, ds - f_1 \geq -\frac{2}{3} L^3 a^2. \quad (26)$$

Теперь воспользуемся неравенством (7) и получим оценку для производной функции $J(t) = \int_0^L (L - x)u \, dx$:

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{3}{2L^3} J^2 + \int_0^L \eta_0 \, dx + \int_0^t f_2(s) \, ds - f_1 \geq \frac{3}{2L^3} J^2 - \frac{2}{3} L^3 a^2.$$

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что существует такая константа a , что для всех $t \in [0, T]$, где*

$$T = \frac{1}{2a} \ln \frac{1}{C_0}, \quad C_0 = \frac{3J(0) - 2L^3}{3J(0) + 2L^3},$$

выполнены неравенства (26) и, кроме того, $J(0) \geq 2L^3 a/3$. Тогда не существует глобального во времени классического решения задачи (22)–(25) на отрезке $[0, L]$. Имеет место следующая оценка:

$$J(t) \geq \frac{2L^3}{3} \frac{1 + C_0 e^{2at}}{1 - C_0 e^{2at}}.$$

Заметим, что условия задачи сильно упрощаются, если $f_2 \geq 0$. В этом случае для справедливости теоремы не нужно искать специальную константу, и результат выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $f_2 > 0$ и начальные данные удовлетворяют неравенствам*

$$\int_0^L u_0 \, dx \geq 0, \quad \int_0^L \eta_0 \, dx \geq \frac{1}{6} f_1.$$

Тогда классическое решение задачи (22)–(25) разрушается за конечное время

$$T = \frac{2L^3}{3J(0)},$$

причем справедлива оценка снизу $J(t) \geq TJ(0)/(T - t)$.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность М. О. Корпусову за неоценимую помощь в работе и полезное обсуждение полученных результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] J. L. Bona, V. A. Dougalis, D. E. Mitsotakis, *Nonlinearity*, **21**:12 (2008), 2825–2848.
- [2] J. L. Bona, M. Chen, J.-C. Saut, *J. Nonlinear Sci.*, **12**:4 (2002), 283–318.
- [3] J. P. Boyd, *Physica D*, **48**:1 (1991), 129–146.
- [4] R. Grimshaw, N. Joshi, *SIAM J. Appl. Math.*, **55**:1 (1995), 124–135.
- [5] С. И. Похожаев, *Дифференц. уравнения*, **47**:3 (2011), 493–498.
- [6] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.
- [7] Е. В. Юшков, “О разрушении решений уравнений гидродинамического типа при специальных граничных условиях”, *Дифференц. уравнения*, в печати.
- [8] P. D. Miller, P. L. Christiansen, *Phys. Scripta*, **61**:5 (2000), 518–525.
- [9] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

Поступила в редакцию 24.02.2012