Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Об одном семействе конформно-гамильтоновых систем, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 2, 179–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:33:54

© 2012 г.

А. В. Цыганов*

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КОНФОРМНО-ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Предложен метод построения конформно-гамильтоновых систем динамических уравнений с инвариантной мерой из гамильтоновых уравнений движения с помощью замены переменных, включая замену времени. В качестве примера рассмотрена задача Чаплыгина о качении шара и системы Веселовой на алгебре Ли $e^*(3)$, а также доказана их полная эквивалентность.

Ключевые слова: интегрируемые системы, неголономные системы, шар Чаплыгина, система Веселовой.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Чаплыгин рассмотрел неголономную задачу о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной шероховатой плоскости и показал, что она может быть проинтегрирована в θ -функциях после замены переменных и времени. Соответствующие уравнения движения не являются гамильтоновыми, но обладают инвариантной мерой (множителем Якоби).

За последние годы список интегрируемых неголономных систем, обладающих множителем Якоби, существенно пополнился [2]–[10]. Список литературы не претендует на полноту, и мы ограничиваемся указанием работ обзорного и общего характера за несколько последних лет, в которых читатель найдет дальнейшие ссылки.

В настоящей работе мы покажем, что большинство таких неголономных систем может быть получено из обычных интегрируемых гамильтоновых систем достаточно тривиальными преобразованиями. Это позволяет применить всю палитру известных математических методов исследования гамильтоновых интегрируемых систем к неголономным системам – например, установить связи с нелинейными эволюционными уравнениями, построить матрицы Лакса, классические r -матрицы и их квантовые аналоги и т. д.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, БЛИЗКИЕ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

Мы будем называть систему динамических уравнений близкой к гамильтоновой, если эти уравнения могут быть получены из гамильтоновых уравнений движения

$$\frac{d}{dt} z_k = Z_k \equiv \{H, z_k\}, \quad k = 1, \dots, m,$$

построенных с помощью канонических скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, заменой переменных, включая замену времени. В основном мы будем обсуждать конформно-гамильтоновы системы, для которых векторное поле имеет вид

$$\hat{Z} = g(z)Z.$$

Напомним, если $g(z)$ – всюду положительная гладкая функция на открытом подмногообразии симплектического пространства M и поле Z полно, то существуют вторые скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}'$, относительно которых поле $\hat{Z}$ является гамильтоновым. Более того, при выполнении некоторых дополнительных технических условий существует симплектоморфизм, который отображает каждую орбиту Z в орбиту $\hat{Z}$ и инвариантен относительно потоков, порождаемых Z и $\hat{Z}$.

В гамильтоновой механике преобразования $Z \rightarrow \hat{Z}$ и сопутствующие им преобразования времени $dt \rightarrow g dt$ часто используют для изучения различных траекторно-эквивалентных гамильтоновых систем (см., например, работы [11], [12]). В неголономной механике такие преобразования, следуя Чаплыгину [1], используют для приведения неголономных систем к гамильтоновым [2], [4], [13]–[15].

Если существует несколько гамильтоновых полей $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$, то можно ввести более общее векторное поле вида

$$\tilde{Z} = g_1(z)Z^{(1)} + \dots + g_m(z)Z^{(m)}.$$

Такие поля встречаются и в бигамильтоновой геометрии, и в неголономной механике [16]. Далее мы докажем, что именно преобразование вида $\hat{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ связывает систему Веселовой и систему Чаплыгина, которые являются траекторно-эквивалентными системами.

С математической точки зрения предлагаемый нами метод построения таких обладающих инвариантной мерой негамильтоновых динамических систем на кокасательных расслоениях T^*Q довольно тривиален. Более того, используя метод разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби и обычные ортогональные системы координат на конфигурационном многообразии Q , можно достаточно легко построить обширное семейство интегрируемых негамильтоновых систем на симплектических многообразиях $M = T^*Q$.

Если же на данном кокасательном расслоении T^*Q действует некоторая группа Ли G , сохраняя при этом симплектическую форму Ω , то мы можем с помощью отображения момента построить негамильтоновы системы на сингулярных орбитах алгебры $\mathfrak{g}^*$. С другой стороны, метод построения негамильтоновых систем на сингулярных орбитах можно перенести на орбиты общего положения, используя структуру полупрямого произведения подалгебр $\mathfrak{g}^*$. В этом случае для построения интегралов движения можно использовать метод классической r -матрицы [17], метод сдвига аргумента [18], [19] и другие известные методы построения интегрируемых систем на алгебрах Ли.

2.1. Близкие к гамильтоновым динамические системы на кокасательных расслоениях. Пусть Q – гладкое многообразие, T^*Q – кокасательное расслоение с симплектическими координатами

$$z = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

такие, что стандартная 1-форма Лиувилля θ , симплектическая 2-форма Ω и соответствующий тензор Пуассона являются каноническими:

$$\theta = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n, \quad \Omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i, \quad P = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dq_i} \wedge \frac{d}{dp_i}. \quad (2.1)$$

По теореме Лиувилля стандартная $2n$ -форма объема $\mu = \Omega^n \simeq dq dp$ инвариантна относительно эволюции, определяемой гамильтонианом H и соответствующей переменной времени t :

$$\frac{d}{dt} q_k = \{H, q_k\}, \quad \frac{d}{dt} p_k = \{H, p_k\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Изменим форму данных динамических уравнений, подставив новые переменные

$$p_k \rightarrow g(q)p_k \quad (2.3)$$

в 1-форму Лиувилля и симплектическую 2-форму:

$$\theta \rightarrow \theta_g = g(q)(p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n), \quad \Omega \rightarrow \Omega_g = d\theta_g.$$

Получаемые таким образом скобки Пуассона

$$\{q_i, q_j\}_g = 0, \quad \{q_i, p_j\}_g = g\delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_g = F_{ij}, \quad (2.4)$$

где

$$F_{ij} = \partial_j g p_i - \partial_i g p_j, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial q_k},$$

являются тривиальной деформацией исходных канонических скобок Пуассона типа Туриэля [20]. Исходная форма объема в новых переменных

$$\mu_g = P_g^{-n} \simeq g^{-n} dq dp \quad (2.5)$$

инвариантна относительно эволюции, задаваемой динамическими уравнениями

$$\frac{d}{dt_g} z_k = \{H, z_k\}_g, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (2.6)$$

которые определяют новую переменную времени t_g . Поэтому здесь и всюду далее мы считаем, что $g(q)$ – всюду положительная гладкая функция на конфигурационном пространстве Q .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Композиция преобразований (2.3) и замены времени*

$$dt_d = g(q) dt_g \quad (2.7)$$

сохраняет исходные уравнения движения (2.2) для координат q_k и аддитивно сдвигает уравнения движения для моментов p_k :

$$\frac{dq_k}{dt_d} = \frac{dq_k}{dt}, \quad \frac{dp_k}{dt_d} = \frac{dp_k}{dt} + \lambda_k q_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

где

$$\lambda_k = \frac{1}{q_k g} \sum_{j=1}^n F_{jk} \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (2.9)$$

Эти негамильтоновы динамические уравнения обладают инвариантной мерой

$$\mu_d = g^{1-n} dq dp, \quad (2.10)$$

которая зависит от произвольной всюду положительной гладкой функции $g(q)$ на конфигурационном пространстве Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть исходных динамических уравнений (2.2) сохраняется:

$$\frac{d}{dt_d} q_k = g^{-1} \{H, q_k\}_g = g^{-1} \sum_{j=1}^n \{p_j, q_k\}_g \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_k\} = \frac{d}{dt} q_k,$$

а оставшаяся часть сдвигается (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_d} p_k &= g^{-1} \{H, p_k\}_g = g^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\{q_j, p_k\}_g \frac{\partial H}{\partial q_j} + \{p_j, p_k\}_g \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} p_k + g^{-1} \sum_{j=1}^n \{p_j, p_k\}_g \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{dp_k}{dt} + \lambda_k q_k. \end{aligned}$$

Множитель Якоби g^{1-n} (2.10) для уравнений (2.8) удовлетворяет стандартному уравнению

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z_j} g^{1-n} \frac{dz_j}{dt_d} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z_j} g^{-n} \frac{dz_j}{dt_g} = 0,$$

так как g^{-n} является множителем Якоби, входящим в определение (2.5), для исходных гамильтоновых уравнений движения в форме (2.6).

Входящие в уравнения движения (2.8) функции λ_k можно считать неопределенными множителями Лагранжа, которые отвечают неголономным связям, наложенным на исходные гамильтоновы уравнения (2.2) в более широком фазовом пространстве [2]. Если гамильтониан H является квадратичной формой по импульсам p_k , то данные связи будут линейными по скоростям. С другой стороны, полученные негамильтоновы уравнения (2.8) можно рассматривать как уравнения для магнитных геодезических потоков [21].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя функции λ_k , мы не можем восстановить исходные уравнения связей, если нам известно только редуцированное фазовое пространство T^*Q . Тем самым предлагаемый метод построения негамильтоновых уравнений движения (2.8) не может быть использован для построения неголономных систем без использования каких-либо дополнительных сведений о полном фазовом пространстве [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы рассматриваем цепочку преобразований векторных полей

$$Z = P dH \rightarrow Z_g = P_g dH \rightarrow Z_d = gZ_g$$

и соответствующие им преобразования скобок Пуассона и времени. Естественным обобщением преобразований (2.3) и (2.7) будет преобразование импульсов

$$p_k \rightarrow \sum_{i=1}^n L_{ki}(q) p_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

которое переводит каноническую скобку Пуассона в скобку $\{\cdot, \cdot\}_L$, зависящую от тензорного поля $L(q)$ [20], и преобразование времени $t \rightarrow t_d$

$$\frac{dz}{dt_d} = f_1\{H_1, z\}_L + f_2\{H_2, z\}_L + \dots + f_n\{H_n, z\}_L, \quad (2.12)$$

которое зависит от набора функций $f_k(q, p)$ и интегралов движения $H_1, \dots, H_n$ исходной гамильтоновой системы уравнений (2.2). Преобразование импульсов (2.11) приводит к простому изменению вида исходной инвариантной формы объема

$$\mu \rightarrow \mu_g = \det L(q) dq dp,$$

а преобразование времени (2.12) сохраняет свойство интегрируемости по Лиувиллю. В этом случае вычисление соответствующей инвариантной меры μ_d зависит от явного вида тензорного поля $L(q)$ и функций f .

Пример соответствующей неголономной системы, описывающей качение динамически несимметричного уравновешенного шара по неподвижной шероховатой сфере, может быть найден в работе [16].

2.2. Примеры интегрируемых систем на $T^*\mathbb{S}^{n-1}$. Замены переменных (2.3) и (2.7) изменяют только форму динамических уравнений и не влияют на инвариантные геометрические и топологические характеристики исходной системы. Таким образом, если гамильтонова система уравнений (2.6) интегрируема и допускает разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби, то и система уравнений (2.8) также интегрируема и допускает разделение переменных.

В методе Якоби, подставляя известные переменные разделения $u_1, \dots, u_n$ (например, эллиптические, сферические, параболические или др.) и канонически сопряженные им импульсы p_{u_k} в разделенные уравнения

$$\Phi_i(u_i, p_{u_i}, H_1, \dots, H_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

такие, что $\det[\partial\Phi_i/\partial H_j] \neq 0$, и решая их относительно $H_1, \dots, H_n$, мы можем построить интегрируемые системы, интересные для приложений.

В качестве примера рассмотрим метод построения интегрируемых гамильтоновых (2.2) и негамильтоновых (2.8) систем уравнений движения на сфере. Напомним, что любые ортогональные системы координат на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ могут быть получены из системы эллиптических координат $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$, которые определяются как корни стандартной рациональной функции

$$e(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - u_k)}{\prod_{i=1}^n (\lambda - e_i)}. \quad (2.14)$$

Здесь $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ – набор параметров и $\sum x_i^2 = 1$. Область определения эллиптических координат

$$e_1 < u_1 < e_2 < u_2 < \dots < u_{n-1} < e_n$$

можно изменять, используя линейное преобразование $u_i \rightarrow au_i + b$, $e_i \rightarrow ae_i + b$. Все остальные ортогональные системы координат на сфере получаются при совпадении части параметров e_i друг с другом.

Подставим эллиптические координаты u и сопряженные им импульсы p_u в однородные разделенные уравнения типа Штеккеля:

$$f(u_j) \prod_{i=1}^n (u_j - e_i) p_{u_j}^2 = u_j^{n-2} H_{n-1} + \dots + u_j H_2 + H_1 + V(u_j), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.15)$$

где рациональная функция $f(u)$ задает метрику, а $V(u)$ определяет потенциал [22]. Решая данные уравнения относительно $H_1, \dots, H_{n-1}$, мы получим искомый набор интегралов движения на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}$ для гамильтоновых уравнений (2.2) и их негамильтоновых аналогов (2.8).

Заметим, что уравнения (2.15) могут быть получены из уравнений с $f(u) = 1$:

$$\prod_{i=1}^n (u_j - e_i) p_{u_j}^2 = u_j^{n-2} H_{n-1} + \dots + u_j H_2 + H_1 + V(u_j), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (2.16)$$

преобразованием вида (2.3)

$$p_{u_j} \rightarrow \sqrt{f(u_j)} p_{u_j}. \quad (2.17)$$

В данном случае это преобразование действует на разделенные уравнения, оставляя переменные u , p_u каноническими.

ПРИМЕР 1. Разделенные уравнения вида (2.16) порождают известные интегрируемые системы на сфере такие, как волчок Эйлера, системы Неймана, Брадена, Росохатиуса и их многомерные обобщения. Например, если $n = 2$ и $V = 0$, то решения уравнений

$$\varphi_3(u_j) p_{u_j}^2 = -u_j H_2 + H_1, \quad \varphi_3(u) = 4 \prod_{i=1}^3 (u - e_i), \quad j = 1, 2,$$

совпадают с интегралами движения в задаче Эйлера:

$$H_1 = (L, \mathbf{A}L), \quad H_2 = (L, L), \quad \mathbf{A} = \text{diag}(e_1, e_2, e_3),$$

где L – вектор момента количества движения с компонентами

$$L_i = -\frac{2x_j x_k (e_j - e_k)}{u_1 - u_2} ((e_i - u_1)p_{u_1} - (e_i - u_2)p_{u_2}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Многомерные обобщения и построение соответствующих потенциалов в интегралах движения обсуждается в работах [23], [24].

ПРИМЕР 2. Для того чтобы получить уравнения движения для неголономного шара Чаплыгина [1], который будет подробно рассмотрен в разделе 4, необходимо подействовать на разделенные уравнения (2.16), отвечающие классическим гамильтоновым системам на сфере, преобразованиями (2.3) и (2.17) при

$$f(u) = \frac{u+1}{(e_1+1)\dots(e_n+1)}, \quad g = \sqrt{-e(-1)} = \sqrt{\frac{f(u_1)\dots f(u_{n-1})}{(e_1+1)\dots(e_n+1)}},$$

где $e(\lambda)$ – рациональная функция, входящая в определение эллиптических координат на сфере (2.14). Например, если $n = 2$ и $V = 0$, решения соответствующих разделенных уравнений

$$\frac{(u_j+1)}{(e_1+1)(e_2+1)(e_3+1)} \varphi_3(u_j) p_{u_j}^2 = -u_j(H_2 - dH_1) + dH_1, \quad j = 1, 2,$$

совпадают с интегралами движения в задаче Чаплыгина (см. ниже формулы (4.5))

$$H_1 = (M, \mathbf{A}_g M), \quad H_2 = (M, M)$$

при $e_j = dI_j^{-1}$ [1]. Здесь I_j – элементы тензора инерции, d – параметр задачи и M – вектор момента количества движения:

$$M_i = -\frac{2g(x)x_j x_k (e_j - e_k)}{u_1 - u_2} ((e_i - u_1)p_{u_1} - (e_i - u_2)p_{u_2}),$$

так что интеграл площадей (x, M) равен нулю.

Неголономные системы на сфере с $V \neq 0$ и соответствующие им матрицы Лакса рассмотрены в работах [16], [25], а многомерные обобщения при $n > 2$ – в статье [6]. Заметим, что ограничения на параметры e_j , используемые в [6], связаны со специальным выбором неголономной связи, налагаемой на систему.

ПРИМЕР 3. Построение неголономных уравнений движения для системы Веселовой [9], [10], которая будет рассмотрена подробно в разделе 5, также состоит из преобразований (2.3) и (2.17), определяемых функциями

$$f(u) = \frac{u}{e_1 \dots e_n}, \quad g = \sqrt{-e(0)} = \sqrt{\frac{f(u_1) \dots f(u_{n-1})}{e_1 \dots e_n}}.$$

В этом случае, если $n = 2$ и $V = 0$, решения разделенных уравнений

$$\frac{u_j \varphi_3(u_j)}{e_1 e_2 e_3} p_{u_j}^2 = -u_j H_1 + H_2, \quad j = 1, 2,$$

совпадают с интегралами движения для системы Веселовой (см. ниже формулы (5.8))

$$H_1 = (K, \hat{\mathbf{A}}_g K), \quad H_2 = (K, K)$$

при $e_i = \hat{a}_i^{-1}$. Здесь K – вектор, введенный для данной системы в работе Федорова [15]:

$$K_i = -\frac{2g(x)x_j x_k (e_j - e_k)}{u_1 - u_2} ((e_i - u_1)p_{u_1} - (e_i - u_2)p_{u_2}).$$

Так как эллиптические координаты на сфере определены с точностью до преобразования $u_i \rightarrow au_i + b$, $e_i \rightarrow ae_i + b$, соответствующие разделенные уравнения совпадают с разделенными уравнениями для задачи Чаплыгина при $u \rightarrow u + 1$. Тем самым на сфере система Веселовой эквивалентна системе Чаплыгина. В разделе 5 мы докажем это утверждение и для соответствующих систем на алгебре $e^*(3)$.

Аналогично, решая разделенные уравнения при $n > 2$, мы получим многомерные обобщения интегралов движения для системы Веселовой, рассмотренные в работе [4].

Для метрик, определяемых другими функциями $f(u)$, и других неголономных связей, определяемых различными функциями $g(u)$, действуя таким же образом, мы можем получить обширное семейство негамильтоновых интегрируемых систем на сфере $\mathbb{S}^n$. Основной вопрос заключается в возможности физической реализации соответствующих неголономных связей и использования этих “математических” негамильтоновых систем при моделировании реальных физических явлений.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПОЛУПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ – ее разложение Картана. Следуя книге [17], рассмотрим аффинное пуассоново подпространство, состоящее из матриц Лакса вида

$$L(\lambda) = a\lambda + \ell + s\lambda^{-1}, \quad \ell \in \mathfrak{f}^*, \quad s \in \mathfrak{p}^*, \quad (3.1)$$

“проходящих” через точку $a \in \mathfrak{p}^*$. Пуассонова структура в этом подпространстве совпадает со скобкой Ли–Пуассона полупрямого произведения $\mathfrak{f} \ltimes \mathfrak{p}$:

$$\{\ell_{ij}, \ell_{km}\} \in \mathfrak{f}^*, \quad \{\ell_{ij}, s_k\} \in \mathfrak{p}^*, \quad \{s_i, s_j\} = 0.$$

При подходящем выборе гамильтониана из спектральных инвариантов оператора Лакса (3.1) соответствующие гамильтоновы уравнения движения имеют вид уравнений Эйлера–Пуассона:

$$\frac{d}{dt}s = \{H, s\} = [s, \omega], \quad \frac{d}{dt}\ell = \{H, \ell\} = [\ell, \omega] + [s, b], \quad (3.2)$$

где “угловая скорость” $\omega = \varphi(\ell)$ зависит от выбора гамильтониана H , а переменная $s \in \mathfrak{p}^*$ играет роль “пуассонова вектора”. Все детали могут быть найдены в книге [17] (см. также работы [18], [19] и библиографию в них).

Используя структуру полупрямого произведения, легко построить обобщение преобразования (2.3)

$$\ell_{ij} \rightarrow g(s)\ell_{ij} + h_{ij}(s, c), \quad (3.3)$$

где $g(s)$ – всюду положительная гладкая функция на $\mathfrak{p}^*$, а h_{ij} – функции на $\mathfrak{p}^*$, зависящие в общем случае также от элементов Казимира $c = (c_1, \dots, c_m)$. Данное преобразование меняет форму исходных скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \{\cdot, \cdot\}_g$ на полупрямом произведении $\mathfrak{f} \ltimes \mathfrak{p}$ аналогично изменению скобок Пуассона на кокасательном расслоении (2.4).

Как и ранее, добавляя к преобразованиям моментов (3.3) замену времени (2.7), можно построить неголономные обобщения исходных уравнений Эйлера–Пуассона (3.2) вида

$$\frac{d}{dt_d}s = g^{-1}\{H, s\}_g = [s, \omega], \quad \frac{d}{dt_d}\ell = g^{-1}\{H, \ell\}_g = [\ell, \omega] + [s, b] + \lambda_k s_k. \quad (3.4)$$

Функции λ_k можно считать неопределенными множителями Лагранжа, которые отвечают неголономным связям, наложенным на исходные уравнения (3.2).

Для построения исходных уравнений движения (3.2) на алгебрах Ли с каноническими скобками Ли–Пуассона можно использовать стандартные методы такие, как метод сдвига аргумента [18], [19], метод классической r -матрицы [17] и т. д.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Преобразование (3.3) допускает естественное обобщение

$$\ell_{ij} \rightarrow \sum_k L_{ik}(s)\ell_{kj} + h_{ij}(s, c),$$

которое зависит от нескольких функций $L_{ik}(s)$.

3.1. Скобки Пуассона на алгебре $e^*(n)$. В качестве примера скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ на полупрямых произведениях алгебр Ли, возникающих в предложенном методе построения негамильтоновых систем вида (3.4), мы рассмотрим скобку Пуассона на дуальной алгебре Ли $e^*(n) = so(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ группы $E(n)$ движений n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Возьмем вложение кокасательного расслоения единичной сферы в алгебру $e^*(n)$

$$\varphi: (p, x) \in T^*\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow (L, x) \in e^*(n) = so(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

которое определяется стандартным образом:

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i. \quad (3.5)$$

Известно, что отображение момента (3.5) задает сингулярную орбиту коприсоединенного представления группы движений евклидова пространства $E(n)$ и, более того, данное отображение φ является пуассоновым, т. е. переводит каноническую скобку Пуассона (2.1) на кокасательном расслоении в скобку Ли–Пуассона на алгебре $e^*(n)$:

$$\begin{aligned} \{L_{ij}, L_{kl}\} &= \delta_{kj}L_{il} - \delta_{il}L_{kj} + \delta_{jl}L_{ki} - \delta_{ki}L_{jl}, \\ \{L_{ij}, x_k\} &= \delta_{ik}x_j - \delta_{jk}x_i, \quad \{x_i, x_k\} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко доказать, что отображение (3.5) является пуассоновым и для второй скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (2.4) на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}^{n-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Образ скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (2.4) при отображении момента (3.5) является скобкой Пуассона:

$$\begin{aligned} \{M_{ij}, M_{kl}\}_g &= g(\delta_{kj}M_{il} - \delta_{il}M_{kj} + \delta_{jl}M_{ki} - \delta_{ki}M_{jl}) + \\ &+ M_{kl} \sum_m (\delta_{im}x_j - \delta_{jm}x_i) \partial_m g - M_{ij} \sum_m (\delta_{km}x_l - \delta_{lm}x_k) \partial_m g, \\ \{M_{ij}, x_k\}_g &= g(\delta_{ik}x_j - \delta_{jk}x_i), \quad \{x_i, x_k\}_g = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

на всем многообразии $e^*(n)$. Здесь, как и ранее, $\partial_m = \partial/\partial x_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке тождества Якоби и других свойств скобок Пуассона при произвольном значении функций Казимира.

На сингулярной орбите скобки Пуассона (3.6) и (3.7) связаны тривиальным преобразованием

$$M_{ij} = g(x)L_{ij}, \quad L_{ij} = g^{-1}(x)M_{ij}, \quad (3.8)$$

а на симплектических листах общего положения мы предполагаем, что это преобразование имеет вид (3.3) с ненулевыми функциями $h_{ij}(x, c)$, зависящими линейно от функций Казимира.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отображение (3.5) является пуассоновым и для второй скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_L$, получаемой из канонической скобки на $T^*\mathbb{S}^{n-1}$ более сложным преобразованием вида (2.11).

4. ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА О КАЧЕНИИ ШАРА

Шаром Чаплыгина [1] называют динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по шероховатой плоскости. Геометрический центр шара совпадает с центром масс, но все три момента инерции различны. Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта имеет вид

$$v + \omega \times r = 0, \quad (4.1)$$

где ω и v – угловая скорость и скорость центра масс тела, r – вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара. В этой системе координат угловой момент шара относительно точки касания можно записать как

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(x, \omega)x, \quad d = mb^2. \quad (4.2)$$

Здесь m – масса, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции, b – радиус шара, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности шара в точке контакта, $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ – векторное произведение трехмерных векторов.

Уравнения движения после подстановки в них множителей Лагранжа, найденных с помощью уравнения связи (4.1), имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{x} = x \times \omega, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= (\mathbf{A} + dg^{-2}\mathbf{A}(x \otimes x)\mathbf{A})M = \mathbf{A}_g M, \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Эти уравнения обладают интегралами движения

$$H_1 = (M, \mathbf{A}_g M), \quad H_2 = (M, M), \quad H_3 = (x, x), \quad H_4 = (x, M) \quad (4.5)$$

и инвариантной мерой

$$\mu_{\text{ch}} = g^{-1} dx dM, \quad g = \sqrt{1 - d(x, \mathbf{A}x)}. \quad (4.6)$$

Согласно работам [2], [13] интегралы движения (4.5) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона:

$$\{M_i, M_j\}_g = \varepsilon_{ijk} \left(g M_k - \frac{d(M, \mathbf{A}x)}{g} x_k \right), \quad \{M_i, x_j\}_g = \varepsilon_{ijk} g x_k, \quad \{x_i, x_j\}_g = 0, \quad (4.7)$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, а уравнения движения имеют вид (3.4)

$$\frac{dz}{dt} = g^{-1} \{H, z\}_g, \quad H = \frac{H_1}{2}. \quad (4.8)$$

Эти уравнения после замены времени (2.7)

$$dt \rightarrow g dt \quad (4.9)$$

становятся гамильтоновыми относительно скобки Пуассона (4.7). Многомерные обобщения данной системы на кокасательных расслоениях $T^*\mathbb{S}^n$ и алгебрах Ли обобщаются в работах [5], [6].

4.1. Приведение скобок Пуассона к каноническим. В работе [25] доказано, что скобки Пуассона (4.7) являются деформацией канонических скобок Ли–Пуассона на алгебре $e^*(3)$ в когомологии Пуассона–Лихнеровича. В силу этого должна существовать замена переменных, которая приводит скобки Пуассона (4.7) для шара Чаплыгина к каноническим скобкам.

Рассмотрим алгебру $e^*(3)$, используя изоморфизм алгебр $(so(3), [\cdot, \cdot])$ и $(\mathbb{R}^3, \times)$

$$L_i = \varepsilon_{ijk} L_{jk},$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $[a, b]$ – коммутатор в $so(3)$ и $a \times b$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. В этих обозначениях каноническая скобка Ли–Пуассона (3.6)

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (4.10)$$

и скобка Пуассона (3.7)

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\}_g &= \varepsilon_{ijk} \left(g(x) M_k + x_k \sum_{m=1}^3 M_m \partial_m g(x) \right), \\ \{M_i, x_j\}_g &= \varepsilon_{ijk} g(x) x_k, \quad \{x_i, x_j\}_g = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

обладают функциями Казимира (x, x) , (x, L) и (x, M) соответственно. Подставляя в формулу (4.11) частный случай функции g (4.6), мы воспроизведем скобки Пуассона (4.7), возникающие при рассмотрении задачи Чаплыгина.

На сингулярных орбитах алгебры $e^*(3)$ при $(x, M) = 0$, которые симплектоморфны кокасательному расслоению $T^*\mathbb{S}^2$, скобки Пуассона (4.11) приводятся к каноническим преобразованием

$$L_i = g^{-1}(x) M_i, \quad (x, M) = (x, L) = 0. \quad (4.12)$$

На симплектических листах общего положения преобразование выглядит следующим образом:

$$L_i = g^{-1}(x)(M_i - bh_i(x)), \quad b = (x, M), \quad (4.13)$$

где функции $h_i(x)$ удовлетворяют одному алгебраическому уравнению:

$$cg(x) = 1 + \sum_{i=1}^3 x_i h_i(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, L) = c(x, M), \quad c \in \mathbb{R},$$

и одному дифференциальному уравнению:

$$\sum_{i=1}^3 \left[h_i^2 - \partial_i h_i + h_i \sum_{j \neq i} (x_j \partial_i h_j - x_i \partial_j h_j) \right] = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Так как переменные x_k зависимы, то для решения этих уравнений мы воспользуемся стандартным представлением алгебры $e^*(3)$ через углы Эйлера и сопряженные им импульсы:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \phi \sin \theta, & M_1 &= \left(\frac{\sin \phi}{\sin \theta} (p_\phi \cos \theta + b) - p_\theta \cos \phi \right), \\ x_2 &= r \cos \phi \sin \theta, & M_2 &= \left(\frac{\cos \phi}{\sin \theta} (p_\phi \cos \theta + b) + p_\theta \sin \phi \right), \\ x_3 &= r \cos \theta, & M_3 &= -p_\phi, \end{aligned}$$

и аналогично для переменных L .

Основное отличие состоит в том, что входящие в определение переменных L_i импульсы p_ϕ и p_θ являются каноническими переменными:

$$\{\phi, p_\phi\} = \{\theta, p_\theta\} = 1, \quad \{\phi, \theta\} = \{\phi, p_\theta\} = \{\theta, p_\phi\} = 0, \quad \{p_\phi, p_\theta\} = 0, \quad (4.14)$$

и эта каноническая скобка Пуассона порождает скобку Ли–Пуассона (4.10). С другой стороны, входящие в определение переменных M_i импульсы p_ϕ и p_θ удовлетворяют скобкам Пуассона, зависящим от функции g :

$$\begin{aligned} \{\phi, p_\phi\}_g &= \{\theta, p_\theta\}_g = g, & \{\phi, \theta\}_g &= \{\phi, p_\theta\}_g = \{\theta, p_\phi\}_g = 0, \\ \{p_\phi, p_\theta\} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} p_\phi - \frac{\partial g}{\partial \phi} p_\theta + b \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} + r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Линейное по моментам преобразование

$$p_\phi \rightarrow g^{-1} p_\phi + bh_1(\phi, \theta), \quad p_\theta \rightarrow g^{-1} p_\theta + bh_2(\phi, \theta)$$

переводит скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (4.15) в канонические скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ (4.14), если справедливо уравнение

$$g^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} - \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \right) + b \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} + r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Если $(x, x) = 1$, то для функции (4.6)

$$g(x) = \sqrt{1 - d(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2)},$$

возникающей при рассмотрении шара Чаплыгина, уравнение (4.16)

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} - \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \right) - b dg^{-1} \cos \theta (a_1 \sin^2 \phi + a_2 \cos^2 \phi) = 0$$

имеет частное решение

$$h_2 = 0, \quad h_1 = g^{-1} \cos \theta \left(1 - \frac{1}{1 - d(a_1 \sin^2 \phi + a_2 \cos^2 \phi)} \right). \quad (4.17)$$

Заметим, что если $h_1 = 0$ или $h_1 = h_2$, то решения уравнения (4.16) будут эллиптическими функциями углов Эйлера ϕ, θ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отвечающее решению (4.17) пуассоново отображение (4.13)*

$$\begin{aligned} L_1 &= g^{-1} \left(M_1 - \frac{bx_1}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_2 &= g^{-1} \left(M_2 - \frac{bx_2}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_3 &= g^{-1} \left(M_3 - \frac{bx_3}{(x, x)} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$\nu = x_1^2 + x_2^2 - d(x, x)(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2),$$

приводит скобки Пуассона (4.7) к каноническим скобкам Ли–Пуассона (4.10), а соответствующие значения функций Казимира равны

$$(x, L) = c, \quad (x, M) = b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке скобок Пуассона (4.10).

Таким образом, заменой времени и координат исходная неголономная динамическая система (4.3) приводится к гамильтоновой интегрируемой системе на алгебре $e^*(3)$ с каноническими скобками Ли–Пуассона.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналогичным образом можно построить пуассоновы отображения, переводящие скобку Пуассона (4.11) на $e^*(3)$ в каноническую скобку (4.10) для функций $g(x)$, отличных от (4.6). Более того, мы предполагаем, что скобки Пуассона (3.7) на алгебре $e^*(n)$ также приводятся к каноническим (3.6) преобразованиями вида (3.3).

4.2. Гамильтонова система, отвечающая шару Чаплыгина. Применяя обратное к (4.18) пуассоново отображение

$$\begin{aligned} M_1 &= g \left(L_1 - \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{bx_1}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right), \\ M_2 &= g \left(L_2 - \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{bx_2}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right), \\ M_3 &= gL_3 + \frac{bx_3}{(x, x)} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

к исходным интегралам движения (4.5), мы получим интегрируемую систему на алгебре $e^*(3)$ с интегралами движения в инволюции относительно канонических скобок Ли–Пуассона (4.10).

Более того, если положить $c = 0$, то мы получим пуассоново отображение (4.18) орбит общего положения скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (4.7) в сингулярную орбиту скобки Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ (4.10) при

$$(x, x) = 1, \quad (x, L) = 0,$$

которая симплектоморфна кокасательному расслоению $T^*\mathbb{S}^2$ сферы единичного радиуса. В этом случае исходные интегралы движения (4.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= g^2(L, \mathbf{A}_g L) + \frac{2bg}{\nu}((x, \mathbf{A}L) - a_3 x_3 L_3) + \\ &\quad + \frac{b^2(a_1 x_1 + a_2 x_2)(1 - d(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2))}{\nu^2}, \\ \tilde{H}_2 &= g^2(L, L) + \frac{2bgx_3 L_3}{\nu} + b^2 \left(1 + \frac{x_3^2(x_1^2 + x_2^2)}{\nu^2} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Используя затем эллиптические координаты на сфере $u_{1,2}$ (2.14) и импульсы $p_{u_{1,2}}$ (2.18) при $e_i = dI_i^{-1}$, мы получим следующие выражения для интегралов движения на $T^*\mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= ap_{u_1}^2 + 2bp_{u_1}p_{u_2} + cp_{u_2}^2 + dp_{u_1} + ep_{u_2} + f, \\ \tilde{H}_2 &= Ap_{u_1}^2 + 2Bp_{u_1}p_{u_2} + Cp_{u_2}^2 + Dp_{u_1} + Ep_{u_2} + F. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь $p_{u_{1,2}}$ – моменты, сопряженные координатам $u_{1,2}$, а коэффициенты полиномов являются аналитическими функциями от $u_{1,2}$. Согласно работе [26] гамильтоновы системы с такими интегралами допускают частичное разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Переменные разделения $s_{1,2}$ в этом случае являются корнями уравнения

$$(B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0,$$

которые в нашем случае равны

$$s_{1,2} = d(1 + u_{1,2})u_{1,2}^{-1}.$$

Как и для случая Клебша [26], эти переменные эволюционируют на примииане алгебраической кривой, которая не является гиперэллиптической, в отличие от разделения переменных Чаплыгина [1], [14].

5. СИСТЕМА ВЕСЕЛОВОЙ

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с его центром масс, при наличии неголономной связи

$$(\omega, x) = 0. \quad (5.1)$$

В данном случае проекция угловой скорости на x равна нулю, что означает отсутствие верчения вокруг вектора x [9], [10]. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + \lambda x, \quad \dot{x} = x \times \omega. \quad (5.2)$$

Здесь M – момент количества движения, $\omega = \hat{\mathbf{A}}M$ – угловая скорость тела, x – орт неподвижной оси в подвижной системе координат, $\hat{\mathbf{A}}$ – диагональная невырожденная матрица

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя уравнения движения в производную от связи (5.1) по времени, мы можем исключить из уравнений движения (5.2) множитель Лагранжа λ , который равен

$$\lambda = \frac{(\hat{\mathbf{A}}M \times M, \hat{\mathbf{A}}x)}{(\hat{\mathbf{A}}x, x)}.$$

Задача имеет четыре интеграла

$$\hat{H}_1 = (M, \hat{\mathbf{A}}M), \quad \hat{H}_2 = (M, M) - (x, x)^{-1}(x, M)^2, \quad \hat{H}_3 = (x, x), \quad \hat{H}_4 = (x, \omega)$$

и инвариантную меру

$$\mu_{\text{ves}} = \hat{g} dx dM, \quad \hat{g}(x) = (x, \hat{\mathbf{A}}x)^{1/2}. \quad (5.3)$$

Интегралы движения находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\}_{ag} &= \frac{\varepsilon_{ijk}}{a_i a_j} \left(a_k \hat{g}^{-1} M_k + x_k \sum_{m=1}^3 a_m M_m \partial_m \hat{g}^{-1} \right), \\ \{M_i, x_j\}_{ag} &= \varepsilon_{ijk} \hat{g}^{-1} a_i^{-1} x_k, \quad \{x_i, x_j\}_{ag} = 0, \end{aligned}$$

при выполнении условия (5.1). Данные скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{ag}$ приводятся к скобкам Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (3.7), (4.11) преобразованием

$$M \rightarrow \hat{\mathbf{A}}^{-1} M, \quad g \rightarrow \hat{g}^{-1}. \quad (5.4)$$

Приведение скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{ag}$ к каноническим скобкам Ли–Пуассона и эквивалентность данной неголономной системы шару Чаплыгина без верчения обсуждаются в работе [2]. В следующем пункте мы докажем более сильный вариант этого утверждения.

5.1. Эквивалентность системы Веселовой и шара Чаплыгина. В работах [2], [15] “математические” уравнения (5.2) на алгебре Ли переписаны в более “физической” форме:

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + \lambda x, \quad \dot{x} = x \times \omega,$$

где $\mathbf{I} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}$ – тензор инерции тела, а неопределенный множитель Лагранжа выводится из механических соображений:

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{I}^{-1}x, \mathbf{I}\omega \times \omega)}{(\mathbf{I}^{-1}x, x)}.$$

Связь между соответствующими динамическими системами подробно обсуждается в работе [2].

Здесь мы продолжим исследовать уравнения движения (5.2) в их первоначальной форме, приведенной в работе [10]. Легко проверить, что в этом случае исходные уравнения движения (5.2) остаются интегрируемыми, если вместо (5.1) положить [15]

$$(\omega, x) = b, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Более того, если следовать работе [15] и вместо M ввести постоянный в пространстве вектор K по правилу

$$K = M - \frac{((\mathbf{E} - \hat{\mathbf{A}})M, x)}{(x, x)}, \quad (x, K) = (x, \omega) = b,$$

то исходные уравнения движения (5.2) для системы Веселовой примут вид

$$\dot{K} = K \times \omega, \quad \dot{x} = x \times \omega, \quad (5.6)$$

где $\omega = \hat{\mathbf{A}}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как якобиан преобразования координат пропорционален инвариантной мере в исходной задаче Веселовой:

$$\left| \frac{\partial(x, M)}{\partial(x, K)} \right| = \hat{g}^2(x) = (x, \hat{\mathbf{A}}x),$$

данное преобразование координат обратимо везде, где существует инвариантная мера и, следовательно, корректно определена замена времени, позволяющая проинтегрировать уравнения движения [9].

В новых переменных инвариантная мера имеет вид

$$\mu = \hat{g}^{-1} dx dK, \quad \hat{g}(x) = (x, \hat{\mathbf{A}}x)^{1/2}, \quad (5.7)$$

а интегралы движения равны

$$\hat{H}_1 = (K, \hat{\mathbf{A}}_g K), \quad \hat{H}_2 = (K, K), \quad \hat{H}_3 = (x, x), \quad \hat{H}_4 = (x, K), \quad (5.8)$$

где

$$\hat{\mathbf{A}}_g = \hat{\mathbf{A}} - \hat{g}^{-2}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{A}})(x \otimes x)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{A}}).$$

Интегралы движения находятся в инволюции относительно скобок Пуассона

$$\begin{aligned} \{K_i, K_j\}_v &= \varepsilon_{ijk} \hat{g} K_k + \varepsilon_{ijk} x_k \left(\sum_{m=1}^3 K_m \partial_m \hat{g} - \frac{b}{\hat{g}} \right), \\ \{K_i, x_j\}_v &= \varepsilon_{ijk} \hat{g} x_k, \quad \{x_i, x_j\}_v = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

для которых (x, x) и (x, K) являются функциями Казимира. Уравнения движения (5.6)

$$\frac{d}{dt} z_i = \hat{g}^{-1}(x) \{H, z_i\}_v, \quad H = \frac{\hat{H}_1}{2}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.10)$$

становятся гамильтоновыми после замены времени $dt \rightarrow \hat{g} dt$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_v$ (5.9) и инвариантная мера μ (5.7) для системы Веселовой совпадают со скобками Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_g$ (4.7) и инвариантной мерой μ_{ch} (4.6) для шара Чаплыгина, если $(x, x) = 1$ и параметры задач связаны соотношением

$$\hat{a}_i = 1 - da_i, \quad (5.11)$$

а интегралы движения $\hat{H}_i$ (5.8) системы Веселовой выражаются через интегралы движения H_i (4.5) системы Чаплыгина

$$\hat{H}_1 = H_2 - dH_1, \quad \hat{H}_2 = H_2, \quad \hat{H}_3 = H_3, \quad \hat{H}_4 = H_4. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке соотношений (5.12) и соответствующих скобок Пуассона.

Если $(x, x) \neq 1$, то связь между параметрами задач (5.11) можно записать как $\hat{a}_i = (x, x)^{-1} - da_i$, $\hat{H}_1 = (x, x)^{-1}H_2 - dH_1$.

Как следствие, скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_v$ для системы Веселовой приводятся к каноническим скобкам Пуассона на алгебре $e^*(3)$ преобразованием (5.13), совпадающим с преобразованием (4.18), с точностью до замены параметров (5.11):

$$\begin{aligned} L_1 &= \hat{g}^{-1} \left(K_1 - \frac{bx_1}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{cx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_2 &= \hat{g}^{-1} \left(K_2 - \frac{bx_2}{(x, x)} \left(1 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \right) + \frac{cx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ L_3 &= \hat{g}^{-1} \left(K_3 - \frac{bx_3}{(x, x)} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu} \right) \right), \quad \nu = \hat{a}_1 x_1^2 + \hat{a}_2 x_2^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Обратное отображение также совпадает с отображением для системы Чаплыгина (4.19) после замены параметров (5.11).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При $c = 0$ преобразование (5.13) отображает систему Веселовой в ту же самую интегрируемую систему на сфере, что и для задачи Чаплыгина (4.20), с интегралами движения

$$\hat{H}_1 = \tilde{H}_2 - d\tilde{H}_1, \quad \hat{H}_2 = \tilde{H}_2, \quad (5.14)$$

если параметры этих систем связаны соотношением (5.11).

Таким образом, система Веселовой эквивалентна и системе Чаплыгина, и соответствующей интегрируемой гамильтоновой системе на сфере. Эти три системы на симплектических листах общего положения пуассонова многообразия $e^*(3)$ обладают общим слоением совместной поверхности интегралов движения на торы Лиувилля и общими траекториями, если рассматривать их в непараметрической форме.

Естественная гипотеза состоит в том, что это же верно и для многомерных обобщений этих систем на алгебрах $e^*(n)$.

Список литературы

- [1] С. А. Чаплыгин, “О катании шара по горизонтальной плоскости.”, *Собрание сочинений*, т. 1: *Теоретическая механика. Математика*, ОГИЗ, М.–Л., 1948, 76–101.
- [2] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:5 (2008), 443–490.

- [3] K. Ehlers, J. Koiller, R. Montgomery, P. Rios, “Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization”, *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry. Festschrift in Honor of Alain Weinstein*, Progress in Mathematics, **232**, eds. J. E. Marsden, T. S. Ratiu, Birkhäuser, Boston, 2005, 75–120.
- [4] Yu. N. Fedorov, B. Jovanović, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4–5 (2009), 495–505.
- [5] S. Hochgerner, *Differ. Geom. Appl.*, **28**:4 (2010), 436–453.
- [6] B. Jovanović, *J. Nonlin. Sci.*, **20**:5 (2010), 569–593.
- [7] M. de León, J. C. Marrero, D. M. de Diego, *J. Geom. Mech.*, **2**:2 (2010), 159–198.
- [8] T. Ohsawa, O. E. Fernandez, A. M. Bloch, D. V. Zenkov, *J. Geom. Phys.*, **61**:8 (2011), 1263–1291, arXiv: 1102.4361.
- [9] Л. Е. Веселова, “Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи”, *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*, Изд-во МГУ, М., 1986, 64–68.
- [10] А. П. Веселов, Л. Е. Веселова, *Матем. заметки*, **44**:5 (1988), 604–619.
- [11] А. П. Веселов, *Вестн. МГУ. Сер. 1*, **42**:5 (1987), 25–29.
- [12] С.-М. Marle, *A property of conformally Hamiltonian vector fields; application to the Kepler problem*, 2010, arXiv: 1011.5731.
- [13] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 793–795.
- [14] А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев, *Нелинейная динам.*, **7**:2 (2011), 313–338.
- [15] Ю. Н. Федоров, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, **44**:4 (1989), 38–41.
- [16] A. V. Tsiganov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **17**:1 (2012), 72–96, arXiv: 1106.1952.
- [17] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, РХД, Москва–Ижевск, 2003.
- [18] A. V. Bolsinov, B. Jovanović, *Math. Z.*, **246**:1–2 (2004), 213–236.
- [19] А. В. Болсинов, “Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, *Тр. сем. по векторному и тензорному анализу*, **26**, Изд-во МГУ, М., 2005, 87–109.
- [20] F. J. Turiel, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **301**:20 (1985), 923–925.
- [21] A. V. Bolsinov, B. Jovanović, *Comment. Math. Helv.*, **83**:3 (2008), 679–700.
- [22] A. V. Tsiganov, *J. Math. Phys.*, **40**:1 (1999), 279–298.
- [23] О. И. Богоявленский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 899–915.
- [24] S. Wojciechowski, *Phys. Lett. A*, **107**:3 (1985), 106–111.
- [25] A. V. Tsiganov, *J. Geom. Mech.*, **3**:3 (2011), 337–362.
- [26] В. Г. Марихин, В. В. Соколов, *Нелинейная динам.*, **4**:3 (2008), 313–332.

Поступила в редакцию 13.03.2012,
после доработки 9.04.2012