Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Кацнельсон, В. Е. Назайкинский, Эффект Ааронова–Бома для безмассовых дираковских фермионов и спектральный поток операторов типа Дирака с классическими граничными условиями, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 437–453

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:34:30

© 2012 г. М. И. Кацнельсон*, В. Е. Назайкинский^{†‡§}

ЭФФЕКТ ААРОНОВА–БОМА ДЛЯ БЕЗМАССОВЫХ ДИРАКОВСКИХ ФЕРМИОНОВ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОТОК ОПЕРАТОРОВ ТИПА ДИРАКА С КЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В топологических терминах вычислен спектральный поток произвольного семейства самосопряженных операторов типа Дирака с классическими (локальными) граничными условиями на компактном римановом многообразии с краем в предположении, что начальный и конечный операторы семейства сопряжены с помощью некоторого автоморфизма расслоения, в котором они действуют. С помощью этого результата исследованы условия существования ненулевого спектрального потока семейства самосопряженных операторов типа Дирака с локальными граничными условиями в двумерной области с нетривиальной топологией. Обсуждаются возможные физические реализации ненулевого спектрального потока.

Ключевые слова: эффект Ааронова–Бомы, безмассовые дираковские фермионы, графен, топологические изоляторы, самосопряженный оператор Дирака, классическая краевая задача, спектральный поток, теорема Атьи–Зингера об индексе, теорема Атьи–Ботта об индексе, принцип локальности индекса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вслед за физикой высоких энергий и квантовой теорией поля в физике конденсированного состояния все активнее используются идеи современной геометрии и топологии [1]–[9]. В частности, теорема Атьи–Зингера об индексе [10] объясняет топологическую устойчивость нулевого уровня Ландау и аномалии квантового эффекта Холла в графене [6], [7]. Топологически защищенные нулевые моды играют существенную роль в движении вихрей в сверхтекучем He^3 [5], [11]. Квантовый эффект

*Institute for Molecules and Materials, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands. E-mail: m.katsnelson@science.ru.nl

[†]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: nazay@ipmnet.ru

[‡]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия

[§]Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия

Холла [2], [3] и топологические изоляторы [8], [9] представляют собой особые состояния с топологическим параметром порядка.

Открытие эффекта Ааронова–Бома (ЭАБ) [12], [13], в сущности, положило начало этим исследованиям. Поток магнитного поля, локализованный в области, полностью недоступной для квантовой частицы (например, окруженный бесконечно высоким барьером), влияет, тем не менее, на ее движение, изменяя геометрию квантового пространства. Ярким проявлением ЭАБ является периодическая зависимость энергетических уровней электронов в кольце от магнитного потока через кольцо, приводящая к появлению спонтанного недиссипативного тока (см., например, работу [14] и цитированную в ней литературу). Когда поток меняется на целое число квантов потока, энергетический спектр системы должен вернуться в исходное состояние. Вплоть до недавнего времени основное внимание уделялось ЭАБ для обычных нерелятивистских электронов, описываемых уравнением Шредингера.

Недавно ЭАБ для ультрарелятивистских электронов, описываемых уравнением Дирака с нулевой массой, привлек внимание в связи с исследованиями графена [15]–[17]. С математической точки зрения это гораздо более богатая ситуация. Оператор Дирака не является полуограниченным, и потому, вообще говоря, его спектральный поток [18] может быть отличен от нуля. Отметим, что ненулевой спектральный поток оператора Дирака уже обсуждался в контексте физики конденсированного состояния. Именно он приводит к появлению дополнительных сил (“сил Копнина”), действующих на вихри в сверхтекучем He^3 [5], [11]. В случае ЭАБ это означает, что возвращение энергетического спектра в целом к исходному через целое число квантов потока не обязательно предполагает периодичность каждого собственного значения по отдельности. Ненулевой спектральный поток физически соответствует ситуации, когда адиабатически медленно меняющееся магнитное поле приводит к рождению электронно-дырочных пар (в более общих терминах – пар частица–античастица) из вакуума: “позитронные” уровни пересекают линию нулевой энергии, превращаясь в электронные. Эффекты “перестройки вакуума” обсуждались в физике сверхтекучего He^3 [5] и в физике графена [7], но вне всякой связи с ЭАБ. В настоящей работе мы исследуем условия существования ненулевого спектрального потока семейства самосопряженных операторов типа Дирака с локальными граничными условиями в области с нетривиальной топологией.

В ограниченной области $X \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂X (см. рис. 1) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ в } X, \quad (n_y - in_x)u_1 = Bu_2 \text{ на } \partial X, \quad (1)$$

где n_x, n_y – компоненты внутренней нормали, а B – не обращающаяся в нуль вещественная функция на границе (краевые условия такого рода впервые рассматривались Берри и Мондрагоном [19]). Соответствующий этой задаче оператор D_0 самосопряжен и фредгольмов в $L^2(X, \mathbb{C}^2)$. Далее, пусть μ – гладкая функция в области X и $|\mu| = 1$. “Калибровочное преобразование” $D_0 \rightarrow \mu D_0 \mu^{-1}$ переводит оператор D_0 в оператор $D_1 = D_0 + Q_1$ (где Q_1 – самосопряженная матричная функция) с теми же граничными условиями. В физических терминах градиент фазы μ есть абелево ($U(1)$) калибровочное поле – электромагнитный векторный потенциал. Мы рассматриваем двумерную область с $m - 1$ дырками, пронизанными трубками магнитного

Рис. 1. Пример области X с $m = 5$ компонентами границы. Жирными линиями выделены компоненты границы $\partial^+ X = \partial X_1 \cup \partial X_4 \cup \partial X_5$, на которых $B > 0$ в краевом условии из задачи (1) (только эти компоненты и дают вклад в спектральный поток согласно формуле (3)). Стрелки указывают положительное направление обхода при вычислении числа вращения калибровочного преобразования μ вдоль соответствующей компоненты границы.

поля. Случай, когда все магнитные потоки через дырки равны целому числу квантов потока, соответствует значению $\mu = 1$. Соединим Q_1 с $Q_0 = 0$ непрерывным семейством Q_t , $t \in [0, 1]$, самосопряженных матричных функций. Спектральный поток $\text{sf}\{D_t\}$ семейства

$$D_t = D_0 + Q_t \quad (2)$$

– число собственных значений оператора D_t , изменивших знак с минуса на плюс при изменении параметра t от нуля до единицы, минус число собственных значений, изменивших знак с плюса на минус, – не меняется при непрерывных деформациях семейства, не нарушающих изоспектральности операторов D_0 и D_1 . Насколько известно авторам, задача о вычислении этого спектрального потока (также и для операторов Дирака более общего вида) была впервые поставлена и частично решена Прохоровой [20], которая вычислила спектральный поток с точностью до целочисленного множителя c_m , зависящего от числа m компонент границы. Далее, в [20] было показано, что $c_2 = 1$, и была выдвинута гипотеза, что $c_m = 1$ для всех m . В настоящей работе мы устанавливаем общий результат (см. ниже теорему 2), из которого, в частности, вытекает справедливость этой гипотезы. Таким образом, теорема 1 работы [20] приобретает следующий вид.

ТЕОРЕМА 1. *Спектральный поток семейства (2) можно вычислить по формуле*

$$\text{sf } D_t = \text{wind}_{\partial^+ X} \mu, \quad (3)$$

где $\partial^+ X$ – та часть границы ∂X , на которой $B > 0$, а

$$\text{wind}_{\partial^+ X} \mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial^+ X} \frac{d\mu}{\mu}$$

– число вращения ограничения функции μ на $\partial^+ X$. (Множество $\partial^+ X$ является объединением конечного числа окружностей; положительным направлением при

определении числа вращения считается то, при котором область X остается слева по ходу движения.)

Эта теорема показывает, что коэффициенты c_m , оставшиеся невычисленными в теореме 1 работы [20], равны единице при всех m . То же самое относится и к теоремам 2 и 3 упомянутой работы – фигурирующие там неопределенные коэффициенты c_m равны единице.

Теорема 1 вытекает из установленного здесь общего результата: мы вычисляем в топологических терминах спектральный поток произвольного семейства $\{D_t\}$, $t \in [0, 1]$, самосопряженных операторов типа Дирака с локальными граничными условиями на компактном римановом многообразии X с краем ∂X в предположении, что $D_1 = UD_0U^{-1}$, где U – некоторый автоморфизм расслоения, в котором действуют операторы D_t . (При этом, в отличие от [20], мы не предполагаем, ни что главная часть оператора D_t не зависит от t , ни даже что главные части операторов D_0 и D_1 совпадают.) Именно, мы доказываем (см. ниже теорему 2), что

$$\text{sf}\{D_t\} = \text{ind}\left(\frac{\partial}{\partial t} + D\right), \quad (4)$$

где в правой части стоит индекс эллиптического оператора с граничными условиями на многообразии $X \times S^1$ с краем, причем t – координата на окружности S^1 , а оператор D получается из семейства $\{D_t\}$ сцеплением операторов D_0 и D_1 по автоморфизму U (напомним, что равенство (4) для семейств самосопряженных эллиптических операторов на замкнутом многообразии X установлено в [18]). Правая часть равенства (4) может быть вычислена по формуле Атьи–Ботта [21] (см. также [22], раздел 20.3).

Заметим, однако, что в доказательстве теоремы 1 формулу Атьи–Ботта мы не используем: равенство (4) спектрального потока индексу позволяет использовать метод локализации (см. [23]–[25]) и, разрезая область на части, свести дело к случаю области с одним отверстием ($m = 2$), для которого в работе [20] проделано явное вычисление. Отметим также, что метод локализации оказывается важным техническим инструментом и при доказательстве самого равенства (4), которое во многом аналогично доказательству (см. [26], предложение 5.6) формулы спектрального потока для эллиптических с параметром в смысле Аграновича–Вишика семейств дифференциальных операторов на замкнутом многообразии без края, но содержит ряд новых моментов, связанных с наличием граничных условий.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОТОК

Напомним определение спектрального потока в форме, приведенной в [26] (см. также [27]). Пусть $\{B_t\}$, $t \in [0, 1]$, – непрерывное в смысле равномерной резольвентной сходимости семейство неограниченных самосопряженных операторов с чисто дискретным спектром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существуют разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$ отрезка $[0, 1]$ и вещественные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ такие, что точка γ_j не лежит в спектре $\text{Spec}(B_t)$ оператора B_t при $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $\gamma_1 = \gamma_{n+1} \leq 0$, и если $\gamma_1 < 0$, то полуинтервал $[\gamma_1, 0)$ не содержит точек спектра операторов B_0 и B_1 .

Рис. 2. Определение спектрального потока. Вклад в спектральный поток дают три собственных значения $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2, 3$. И вычисление в соответствии с определением, и подсчет числа прохождений (с учетом направления) через нуль дают для спектрального потока значение -1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [26], определение A.18). *Спектральным потоком* семейства $\{B_t\}$, $t \in [0, 1]$, называется число¹⁾

$$\text{sf}\{B_t\} = \sum_{j=1}^n m_j \text{sign}(\gamma_j - \gamma_{j+1}), \quad (5)$$

где m_j – количество собственных значений (с учетом кратности) оператора B_{t_j} в интервале между γ_j и γ_{j+1} .

Это определение проиллюстрировано на рис. 2, из которого, помимо всего прочего, становится ясно, почему это определение согласуется с определением спектрального потока как числа прохождений собственных значений через нуль (с учетом направления).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть E – четномерное эрмитово векторное расслоение над компактным римановым многообразием X с краем, и пусть

$$A: C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, E) \quad (6)$$

¹⁾Правая часть формулы (5) не зависит от выбора разбиения $\{t_j\}$ и чисел γ_j согласно теореме A.19 из [26].

– формально самосопряженный оператор типа Дирака²⁾. Далее, пусть в сужении E_Y расслоения E на край $Y = \partial X$ многообразия X задано подрасслоение $L \subset E_Y$ размерности $\dim L = (\dim E)/2$ такое, что

$$(\sigma_A(x, \mathbf{n}(x))L_x) \perp L_x \quad \forall x \in Y, \quad (7)$$

где L_x – слой расслоения L в точке x , а $\mathbf{n}(x)$ – единичный вектор внутренней нормали к границе. Рассмотрим оператор (6) на множестве сечений $u \in C^\infty(X, E)$, удовлетворяющих однородному граничному условию

$$\pi_L(u|_Y) = 0, \quad \text{где } \pi_L: E_Y \longrightarrow E_Y/L \text{ – естественная проекция} \quad (8)$$

(иными словами, $u(x) \in L_x$ при $x \in Y$). Такой вид имеет, в частности, граничное условие в задаче (1). Хорошо известно (см. [29], а также гл. 18 и 19 в [28]), что граничное условие (8) является эллиптическим, оператор (6) с областью определения, задаваемой этим условием, существенно самосопряжен в $L^2(X, E)$, а его замыкание A_L представляет собой неограниченный фредгольмов самосопряженный оператор в $L^2(X, E)$ с дискретным спектром и с областью определения, состоящей из сечений u из пространства Соболева $H^1(X, E)$, удовлетворяющих условию (8) (в котором $u|_Y$ понимается как элемент пространства Соболева $H^{1/2}(Y, E_Y)$, полученный из u ограничением на Y в силу теоремы о следах, а π_L – как отображение $\pi_L: H^{1/2}(Y, E_Y) \longrightarrow H^{1/2}(Y, E_Y/L)$).

Пусть теперь и оператор A типа Дирака (6), и подрасслоение L непрерывно зависят от параметра $t \in [0, 1]$ (а именно, коэффициенты оператора A и оператора π_L зависят от t непрерывно вместе со всеми своими производными³⁾), т. е. $A = A(t)$, $L = L(t)$, причем при каждом t выполнено условие (7). Тогда по теореме 7.16 из работы [30] оператор $A(t)_{L(t)}$ непрерывно зависит от t в топологии равномерной резольвентной сходимости, и определение 1 задает спектральный поток $\text{sf}\{A(t)_{L(t)}\}$ семейства $\{A(t)_{L(t)}\}$, $t \in [0, 1]$.

Далее, пусть задан автоморфизм $U: E \rightarrow E$ расслоения E такой, что

$$A(1) = UA(0)U^{-1}, \quad U(L(0)) = L(1). \quad (9)$$

Тогда $UA(0)_{L(0)}U^{-1} = A(1)_{L(1)}$, т. е. операторы $A(0)_{L(0)}$ и $A(1)_{L(1)}$ подобны и, следовательно, изоспектральны, так что спектральный поток семейства $\{A(t)_{L(t)}\}$ является гомотопическим инвариантом (в классе семейств, удовлетворяющих условию вида (9)), и поэтому естественно поставить задачу о его вычислении в топологических терминах.

Чтобы решить эту задачу, введем вспомогательную эллиптическую краевую задачу на прямом произведении $X \times S^1$ многообразия X на окружность S^1 (см. рис. 3). Именно, определим расслоение $\mathcal{E}$ на $X \times S^1$, поднимая расслоение E на произведение

²⁾Напомним, что линейный дифференциальный оператор первого порядка (6) называется оператором типа Дирака, если его главный символ $\sigma_A(x, \xi)$ удовлетворяет условию $(\sigma_A(x, \xi))^2 = \sum g^{jk}(x)\xi_j\xi_k I$, где I – тождественный оператор в слое E_x , а $g^{jk}(x)$ – (контравариантные) компоненты метрического тензора (см. [28]). Формальная самосопряженность оператора A понимается в стандартном смысле как выполнение тождества $(u, Av) = (Au, v)$ для любых сечений $u, v \in C_0^\infty(X \setminus \partial X, E)$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(X, E) \equiv L^2(X, E, d \text{ vol})$. Здесь $d \text{ vol}$ – элемент риманова объема на многообразии X .

³⁾Достаточно, судя по всему, и одной производной, но не будем мелочиться.

Рис. 3. Многообразие $X \times S^1$, полученное склейкой “торцов” $t = 0$ и $t = 1$ произведения $X \times [0, 1]$, с оператором $\partial/\partial t + A(t)$.

$X \times [0, 1]$ с помощью естественной проекции $\pi: X \times [0, 1] \rightarrow X$ и затем производя сечение⁴⁾ по автоморфизму $U: (\pi^*E)_{X \times \{0\}} \rightarrow (\pi^*E)_{X \times \{1\}}$. В силу условий (9) семейство $\{A(t)\}$ корректно определяет дифференциальный оператор в пространстве сечений расслоения $\mathcal{E}$, а семейство подрасслоений $L(t)$ определяет подрасслоение $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}_{Y \times S^1}$ в сужении расслоения $\mathcal{E}$ на край $Y \times S^1$ многообразия $X \times S^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Оператор*

$$\frac{\partial}{\partial t} + A(t): C^\infty(X \times S^1, \mathcal{E}) \longrightarrow C^\infty(X \times S^1, \mathcal{E}) \quad (10)$$

эллиптический, и граничные условия

$$\pi_{\mathcal{L}}(u|_{Y \times S^1}) = 0, \quad \text{где } \pi_{\mathcal{L}}: \mathcal{E}_{Y \times S^1} \longrightarrow \mathcal{E}_{Y \times S^1}/\mathcal{L} \text{ — естественная проекция,} \quad (11)$$

задаваемые подрасслоением $\mathcal{L}$, являются для оператора (10) эллиптическими. Замыкание $(\partial/\partial t + A(t))_{\mathcal{L}}$ оператора (10) с области, задаваемой условиями (11), представляет собой неограниченный фредгольмов оператор в $L^2(X \times S^1, \mathcal{E})$ с областью определения $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}}$, состоящей из сечений $u \in H^1(X \times S^1, \mathcal{E})$, удовлетворяющих условию (11).

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива формула*

$$\text{sf}\{A(t)_{L(t)}\} = \text{ind}\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(t)\right)_{\mathcal{L}}. \quad (12)$$

Правая часть формулы (12) представляет собой *аналитический индекс* оператора $(\partial/\partial t + A(t))_{\mathcal{L}}$, т. е. разность размерностей его ядра и коядра, который может быть выражен в топологических терминах по формуле Атьи–Ботта [21] (см. также [22], раздел 20.3).

⁴⁾Мы считаем, что окружность S^1 получена из отрезка $[0, 1]$ склеиванием концов.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial t} + A(t) \\ -\frac{\partial}{\partial t} + A(t) & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(X \times S^1, \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}) \longrightarrow C^\infty(X \times S^1, \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}). \quad (13)$$

Это “полный” формально самосопряженный оператор типа Дирака на $X \times S^1$ с символом

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(x, t, \xi, \xi_0) = \begin{pmatrix} 0 & i\xi_0 I + \sigma_{A(t)}(x, \xi) \\ -i\xi_0 I + \sigma_{A(t)}(x, \xi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где ξ_0 – переменная, двойственная к $t \in S^1$, и оператор $\partial/\partial t + A(t)$ является его киральной частью. Подрасслоение $\mathfrak{L} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L} \subset (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})_{Y \times S^1}$ удовлетворяет условию вида (7) относительно $\sigma_{\mathfrak{A}}$ и тем самым задает самосопряженные эллиптические условия для $\mathfrak{A}$. Действительно, вектор конормали к границе многообразия $X \times S^1$ в произвольной точке $(x, t) \in Y \times S^1$ имеет вид $\mathbf{n}(x, t) = (0, \mathbf{n}(x))$, где $\mathbf{n}(x)$ – вектор конормали к границе самого многообразия X , а $\mathcal{L}_{(x,t)} = L(t)_x$, поэтому для любых

$$v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathfrak{L}_{(x,t)}, \quad w = {}^t(w_1, w_2) \in \mathfrak{L}_{(x,t)}, \quad \text{т. е.} \quad v_1, v_2, w_1, w_2 \in L(t)_x,$$

имеем

$$(v, \sigma_{\mathfrak{A}}(x, t, \mathbf{n}(x, t))w) = (v_1, \sigma_{A(t)}(x, \mathbf{n}(x))w_2) + (v_2, \sigma_{A(t)}(x, \mathbf{n}(x))w_1) = 0,$$

поскольку условие (7) выполнено для $A(t)$ и расслоения $L(t)$. Отсюда, опять в силу результатов из [29] и гл. 18 и 19 в [28], получаем утверждение предложения сначала для оператора $\mathfrak{A}$, а затем, как следствие, и для его киральной части $\partial/\partial t + A(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Без ограничения общности будем предполагать, что $0 \notin \text{Срес}(A(0)_{L(0)})$ (в противном случае можно заменить оператор $A(t)$ на $A(t) + \varepsilon$ с малым вещественным ε , что не меняет ни правую, ни левую часть формулы (12)).

Также без ограничения общности будем всюду далее считать, что подрасслоение $L(t)$ не зависит от параметра t , $L(t) = L(0) \equiv L$, $t \in [0, 1]$. Действительно, пусть $V(t): E_Y \rightarrow E_Y$ – семейство унитарных автоморфизмов расслоения E_Y такое, что $V(0) = I$ и $L(t) = V(t)L$, $t \in [0, 1]$ (такое семейство легко построить, решая задачу Коши $\dot{V} = [P, \dot{P}]V$, $V(0) = I$, где $P = P(t)$ – проектор на $L(t)$ в E_Y). Это семейство продолжается (гомотопией к тождественному отображению по нормальной к границе переменной) до семейства унитарных автоморфизмов $W(t): E \rightarrow E$ такого, что $W(t)|_Y = V(t)$. Положим

$$\tilde{A}(t) = W^{-1}(t)A(t)W(t),$$

тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} W^{-1}(1)U\tilde{A}(0)(W^{-1}(1)U)^{-1} &= W^{-1}(1)U\tilde{A}(0)U^{-1}W(1) = W^{-1}(1)A(1)W(1) = \tilde{A}(1), \\ W^{-1}(1)UL &\equiv W^{-1}(1)UL(0) = W^{-1}(1)L(1) = L(0) \equiv L, \end{aligned}$$

т. е. условия вида (9) выполнены для семейства $\{\tilde{A}(t)\}$ и постоянного семейства подпространств $\tilde{L}(t) = L$, если взять автоморфизм $\tilde{U} = W^{-1}(1)U$. Кроме того,

$$\text{sf}\{A(t)_{L(t)}\} = \text{sf}\{\tilde{A}(t)_L\} \quad (15)$$

в силу подобия операторов $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$. Далее, семейство $W(t)$ порождает изоморфизм расслоений $\mathcal{W}: \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$, где расслоение $\tilde{\mathcal{E}}$ над $X \times S^1$, аналогично $\mathcal{E}$, получается из поднятия на $X \times [0, 1]$ расслоения E сцеплением по автоморфизму $\tilde{U}$. Оператор

$$\mathcal{W}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(t) \right)_{\mathcal{L}} \mathcal{W} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}(t) - W^{-1}(t) \frac{\partial W}{\partial t}(t) \right)_{\tilde{\mathcal{L}}} \quad (16)$$

имеет тот же индекс, что и $(\partial/\partial t + A(t))_{\mathcal{L}}$, и действует в пространстве сечений расслоения $\tilde{\mathcal{E}}$, удовлетворяющих граничному условию, порожденному подрасслоением $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{W}^{-1}|_{Y \times S^1} \mathcal{L}$, для которого $\tilde{\mathcal{L}}_t = V(t)^{-1} L(t) = L$ при всех $t \in S^1$. Наконец, гомотопия

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}(t) - \lambda W^{-1}(t) \frac{\partial W}{\partial t}(t) \right)_{\tilde{\mathcal{L}}}, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (17)$$

в классе фредгольмовых операторов приводит оператор (16) при $\lambda = 0$ к $(\partial/\partial t + \tilde{A}(t))_{\tilde{\mathcal{L}}}$, так что

$$\text{ind} \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(t) \right)_{\mathcal{L}} = \text{ind} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}(t) \right)_{\tilde{\mathcal{L}}},$$

что вместе с (15) и завершает редукцию к случаю не зависящего от t расслоения $L(t) = L$. Тильду над буквами в дальнейшем опускаем.

Теперь для доказательства нам потребуется вспомогательное семейство операторов на бесконечном цилиндре $X \times \mathbb{R}$. Поднятия расслоений E с X на $X \times \mathbb{R}$ и L с Y на $Y \times \mathbb{R}$ обозначим теми же буквами E и L , это не должно привести к путанице. Координату на прямой $\mathbb{R}$ обозначим через t . Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ введем весовые пространства $L^2_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E)$ и $H^1_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E)$ сечений u расслоения E с конечной нормой

$$\|u\|_{0,\alpha\beta} = \left\{ \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|_{L^2(X,E)}^2 e^{2\alpha t} dt + \int_0^{\infty} \|u(t)\|_{L^2(X,E)}^2 e^{2\beta t} dt \right\}^{1/2}$$

и

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\alpha\beta} = & \left\{ \int_{-\infty}^0 \left(\left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(X,E)}^2 + \|u(t)\|_{H^1(X,E)}^2 \right) e^{2\alpha t} dt + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \left(\left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(X,E)}^2 + \|u(t)\|_{H^1(X,E)}^2 \right) e^{2\beta t} dt \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

соответственно. В частности, $H^1_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E) \subset L^2_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E)$. Через $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$ обозначим замкнутое подпространство в $H^1_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E)$, состоящее из сечений, удовлетворяющих граничным условиям, задаваемым подрасслоением L , т. е.

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta} = \{u \in H^1_{\alpha\beta}(X \times \mathbb{R}, E): \pi_L u = 0\}. \quad (18)$$

Пусть $0 \leq \theta \leq 1$. Положим⁵⁾

$$\tau(t, \theta) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t, & 0 \leq t \leq \theta, \\ \theta, & \theta \leq t. \end{cases}$$

⁵⁾Здесь, так же как и выше и ниже, при описании конструкции гомотопий во избежание громоздких формул мы опускаем стандартную процедуру сглаживания, устраняющую разрывы производных, в данном случае при $t = 0$ и $t = \theta$.

Рис. 4. Оператор $\mathcal{A}(\theta, \gamma) = \partial/\partial t + A(\tau(t, \theta))$ на бесконечном цилиндре $X \times \mathbb{R}$.

Для $\gamma \in \mathbb{R}$ пусть

$$\mathcal{A}(\theta, \gamma) = \frac{\partial}{\partial t} + A(\tau(t, \theta)): L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E) \longrightarrow L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E) \quad (19)$$

– оператор с областью определения $\mathfrak{D}_{0\gamma}$ (см. рис. 4). Сформулируем ряд свойств операторов $\mathcal{A}(\theta, \gamma)$.

ЛЕММА 1. Оператор $\mathcal{A}(\theta, \gamma)$ является фредгольмовым при тех θ , при которых $\gamma \notin \text{Spec}(A(\theta)_L)$, и $\text{ind } \mathcal{A}(\theta, \gamma)$ – локально постоянная функция от θ на множестве таких значений θ .

ЛЕММА 2. Если $\gamma, \tilde{\gamma} \notin \text{Spec}(A(\theta)_L)$ и $\gamma > \tilde{\gamma}$, то разность $\text{ind } \mathcal{A}(\theta, \tilde{\gamma}) - \text{ind } \mathcal{A}(\theta, \gamma)$ равна числу собственных значений (с учетом кратности) оператора $A(\theta)_L$ в интервале $(\tilde{\gamma}, \gamma)$.

ЛЕММА 3. $\text{ind } \mathcal{A}(0, 0) = 0$.

ЛЕММА 4. $\text{ind } \mathcal{A}(1, 0) = \text{ind}(\partial/\partial t + A(t))_{\mathcal{L}}$.

Доказательство лемм 1–4 будет дано ниже. Сейчас покажем, что из этих лемм следует утверждение теоремы. Спектральный поток семейства $\{A(t)_L\}$ дается определением 1 для некоторого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ и вещественных чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1} = \gamma_1$, причем можно считать, что $\gamma_1 = 0$ (так как мы предположили, что $0 \notin \text{Spec}(A(0)_L)$). Пусть m_j – количество собственных значений (с учетом кратности) оператора $A(t_j)_L$ в интервале между γ_j и γ_{j+1} . Из леммы 1 следует, что оператор $\mathcal{A}(\theta, \gamma_j)$ фредгольмов при $\theta \in [t_{j-1}, t_j]$ и

$$\text{ind } \mathcal{A}(t_j, \gamma_j) - \text{ind } \mathcal{A}(t_{j-1}, \gamma_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (20)$$

Согласно лемме 2

$$\text{ind } \mathcal{A}(t_j, \gamma_{j+1}) - \text{ind } \mathcal{A}(t_j, \gamma_j) = m_j \text{sign}(\gamma_j - \gamma_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Суммируя равенства (20) и (21) по всем соответствующим j , складывая результаты между собой и учитывая лемму 3 и равенство $\gamma_1 = \gamma_n = 0$, получаем

$$\text{ind } \mathcal{A}(1, 0) = \text{ind } \mathcal{A}(1, 0) - \text{ind } \mathcal{A}(0, 0) = \sum_{j=1}^n m_j \text{sign}(\gamma_j - \gamma_{j+1}) = \text{sf}\{A(t)_L\}. \quad (22)$$

Остается применить лемму 4.

Докажем теперь леммы 1–4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Чтобы доказать, что оператор $\mathcal{A}(\theta, \gamma)$ является фредгольмовым, достаточно построить его регуляризатор, т. е. оператор

$$\mathcal{R}: L_{0\gamma}^2(X \times \mathbb{R}, E) \longrightarrow \mathfrak{D}_{0\gamma}$$

такой, что операторы $I - \mathcal{A}(\theta, \gamma)\mathcal{R}$ и $I - \mathcal{R}\mathcal{A}(\theta, \gamma)$ компактны в пространствах $L_{0\gamma}^2(X \times \mathbb{R}, E)$ и $\mathfrak{D}_{0\gamma}$ соответственно. Это можно сделать стандартным в эллиптической теории методом замораживания коэффициентов (в данном случае по переменной t). Для этого при фиксированных $\tau \in [0, 1]$, $\nu \in \mathbb{R}$ рассмотрим оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + A(\tau): L_{\nu\nu}^2(X \times \mathbb{R}, E) \longrightarrow L_{\nu\nu}^2(X \times \mathbb{R}, E) \quad \text{с областью определения } \mathfrak{D}_{\nu\nu}. \quad (23)$$

Оператор (23) обратим при условии, что $\nu \notin \text{Spec}(A(\tau)_L)$. Обратный оператор, который мы обозначим через $R_\nu(\tau)$, задается формулой

$$[R_\nu(\tau)u](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{Im } p = \nu} e^{ipt} (ip + A(\tau)_L)^{-1} \tilde{u}(p) dp, \quad u \in L_{\nu\nu}^2(X \times \mathbb{R}, E), \quad (24)$$

где $\tilde{u}(p)$, $\text{Im } p = \nu$, – преобразование Фурье функции u по переменной t . Рассмотрим конечное покрытие $\{U_j\}_{j=1}^s$ отрезка $[0, 1]$ интервалами такими, что $\nu_j \notin \text{Spec}(A(\tau(t, \theta))_L)$ при $t \in U_j$ для некоторых вещественных чисел ν_j , пусть $U_0 = (-\infty, 0)$, $\nu_0 = 0$, $U_{s+1} = (1, \infty)$, $\nu_{s+1} = \gamma$ и пусть $1 = \sum_{j=0}^{s+1} \psi_j^2$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию прямой $\mathbb{R}$ множествами U_j , $j = 0, \dots, s+1$. Тогда оператор $\mathcal{R}$ можно задать формулой

$$[\mathcal{R}u](t) = \sum_{j=0}^{s+1} \psi_j(t) [\mathcal{R}_{\nu_j}(\tau)(\psi_j u)](t) \Big|_{\tau=\tau(t, \theta)}.$$

(Заметим, что оператор $\mathcal{R}$ корректно определен как оператор из $L_{0\gamma}^2(X \times \mathbb{R}, E)$ в $\mathfrak{D}_{0\gamma}$, поскольку оператор умножения на ψ_j непрерывно действует из $L_{0\gamma}^2(X \times \mathbb{R}, E)$ в $L_{\nu_j\nu_j}^2(X \times \mathbb{R}, E)$ и из $\mathfrak{D}_{\nu_j\nu_j}$ в $\mathfrak{D}_{0\gamma}$; при $j \neq 0, s+1$ это следует из компактности носителя функции ψ_j , при $j = 0$ – из того, что $\nu_0 = 0$ и функция ψ_0 равна нулю при $t > 0$, а при $j = s+1$ – из того, что $\nu_{s+1} = \gamma$ и функция ψ_{s+1} равна нулю при $t < 0$.) Теперь непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta, \gamma)\mathcal{R}u(t) &= \\ &= u(t) + \sum_{j=0}^{s+1} \left[\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t}(t) \mathcal{R}_{\nu_j}(\tau) + \psi_j(t) \frac{\partial \tau}{\partial t}(t, \theta) \frac{\partial \mathcal{R}_{\nu_j}}{\partial \tau}(\tau) \right) (\psi_j u) \right](t) \Big|_{\tau=\tau(t, \theta)}. \end{aligned}$$

Поскольку функции $(\partial\psi_j/\partial t)(t)$ и $(\partial\tau/\partial t)(t, \theta)$ финитны, стандартные утверждения о вложениях пространств Соболева показывают, что второе слагаемое в правой части задает компактный оператор в $L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E)$. Аналогичным образом рассматривается и композиция $\mathcal{R}\mathcal{A}(\theta, \gamma)$.

Локальное постоянство индекса оператора $\mathcal{A}(\theta, \gamma)$ как функции от θ следует из того, что этот оператор непрерывно зависит от θ в операторной норме как оператор из $\mathfrak{D}_{0\gamma}$ в $L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Утверждение леммы – это частный случай обратимости оператора (23) при $\nu = 0$ и $\tau = 0$.

Доказательство лемм 2 и 4 опирается на метод локализации (принцип локальности индекса; см. теорему 4.10 в [26], а также [23]–[25] и цитированную там литературу). Для наших целей сформулируем утверждение теоремы 4.10 из [26] в простейшем частном случае.

Пусть $N_1, N_2 \subset M$ – непересекающиеся замкнутые подмножества многообразия M , и пусть $D: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ – ограниченный фредгольмов оператор, действующий в некоторых гильбертовых пространствах сечений расслоений над многообразием M . Далее, пусть $\varkappa: M \rightarrow [0, 1]$ – гладкое отображение такое, что $N_1 \subset f^{-1}(0)$ и $N_2 \subset f^{-1}(1)$, и пусть $\mathcal{C} \subset C^\infty(M)$ – некоторая подалгебра алгебры гладких функций на M , состоящая из функций, постоянных на N_1 и на N_2 , и содержащая все функции вида $\psi(x) = \varphi(\varkappa(x))$, где φ – гладкая функция на отрезке $[0, 1]$. Предположим, что коммутатор оператора D с оператором умножения на любую функцию из $\mathcal{C}$ компактен. Тогда приращения индекса, возникающие при изменении оператора D на N_1 и N_2 с сохранением фредгольмовости и компактности коммутаторов⁶⁾, независимы:

$$\Delta_{N_1 \sqcup N_2} = \Delta_{N_1} + \Delta_{N_2},$$

где Δ_{N_1} – приращение индекса при изменении оператора только на N_1 , Δ_{N_2} – приращение индекса при изменении оператора только на N_2 , $\Delta_{N_1 \sqcup N_2}$ – приращение индекса при одновременном изменении оператора и на N_1 , и на N_2 .

Практическое применение метода локализации к доказательству лемм 2 и 4 выглядит следующим образом. Мы хотим вычислить, как изменяется индекс некоего оператора D при заданном его изменении на множестве N_1 , но подсчитать такое приращение сложно из-за сложной структуры оператора D вне N_1 . Изменим оператор D на некотором множестве N_2 , не пересекающемся с N_1 , так, чтобы получился оператор $\tilde{D}$ более простой структуры, приращение индекса которого при рассматриваемом изменении на N_1 уже удастся подсчитать. Это приращение совпадает с требуемым приращением для исходного оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. В качестве многообразия M возьмем $X \times \mathbb{R}$, в качестве множества $N_1 \subset M$ – множество $\{t \geq 2\}$, в качестве множества $N_2 \subset M$ – множество $\{t \leq 1\}$, а в качестве алгебры функций $\mathcal{C}$ – алгебру бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ от переменной $t \in \mathbb{R}$, постоянных на N_1 и на N_2 . Исходный

⁶⁾Изменение может затрагивать не только сам оператор, но и пространства, в которых он действует, и даже само многообразие (например, отрезание одних частей и приклеивание других); все эти изменения должны происходить строго внутри соответствующего множества N_j , т. е. на $M \setminus N_j$ все должно оставаться неизменным.

оператор D – это оператор $A(\theta, \gamma)$, который будем рассматривать как ограниченный фредгольмов оператор в пространствах

$$D = A(\theta, \gamma): \mathfrak{D}_{0\gamma} \longrightarrow L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E); \quad (25)$$

требуется подсчитать приращение его индекса при замене γ на $\tilde{\gamma}$. Заметим, что коммутатор оператора (25) с гладкой функцией $\varphi \in \mathcal{C}$ есть оператор умножения на финитную функцию $\varphi'(t)$, который компактен как оператор из $\mathfrak{D}_{0\gamma}$ в $L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}^1, E)$, так что мы находимся как раз в ситуации, в которой применим метод локализации. Замена γ на $\tilde{\gamma}$ изменяет оператор D только на множестве N_1 (выражение, задающее оператор, и граничные условия остаются прежними, но пространства, в которых он действует, меняются, причем это изменение касается только допустимого роста функций при $t \rightarrow +\infty$, т. е., в частности, сужение этих пространств на $M \setminus N_1$ вообще не изменяется). Подменим теперь оператор D оператором

$$\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + A(\theta): \mathfrak{D}_{\gamma\gamma} \longrightarrow L^2_{0\gamma}(X \times \mathbb{R}, E). \quad (26)$$

Этот оператор отличается от D (как дифференциальным выражением, так и пространствами, в которых он действует) только на подмножестве N_2 . Таким образом, достаточно посчитать приращение индекса этого оператора при таком же, как у D , изменении на N_1 . Оператор $\tilde{D}$ обратим, так что $\text{ind } \tilde{D} = 0$. Его изменение на N_1 приводит к оператору

$$\frac{\partial}{\partial t} + A(\theta): \mathfrak{D}_{\gamma\tilde{\gamma}} \longrightarrow L^2_{\gamma\tilde{\gamma}}(X \times \mathbb{R}, E); \quad (27)$$

осталось, таким образом, подсчитать индекс последнего. Для этого удобно трактовать оператор (27) как неограниченный фредгольмов оператор в $L^2_{\gamma\tilde{\gamma}}(X \times \mathbb{R}, E)$ с областью определения $\mathfrak{D}_{\gamma\tilde{\gamma}}$. Сопряженный оператор тогда имеет вид $-\partial/\partial t + A(\theta)$ и действует в сопряженном пространстве $L^2_{-\gamma, -\tilde{\gamma}}(X \times \mathbb{R}, E)$ с областью определения $\mathfrak{D}_{-\gamma, -\tilde{\gamma}}$. Элементы ядра оператора (27) должны иметь вид $v(x)e^{-\lambda t}$, где λ – собственные значения оператора $A(\theta)_L$, а $v(x)$ – соответствующие собственные функции. Из условия принадлежности этих элементов весовому пространству $L^2_{\gamma\tilde{\gamma}}(X \times \mathbb{R}, E)$ вытекает, что $\tilde{\gamma} < \lambda < \gamma$. Таким образом, размерность ядра равна числу собственных значений (с учетом кратности) оператора $A(\theta)_L$ в интервале $(\tilde{\gamma}, \gamma)$. Элементы ядра сопряженного оператора должны иметь вид $v(x)e^{\lambda t}$ и принадлежать весовому пространству $L^2_{-\gamma, -\tilde{\gamma}}(X \times \mathbb{R}, E)$. Отсюда вытекает, что $\gamma < \lambda < \tilde{\gamma}$, но это невозможно, ибо $\gamma > \tilde{\gamma}$. Итак, ядро сопряженного оператора тривиально, индекс оператора (27) совпадает с размерностью его ядра, и мы получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Нам необходимо доказать равенство индексов операторов

$$A(1, 0): \mathfrak{D}_{00} \longrightarrow L^2(X \times \mathbb{R}, E) \quad (28)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(t) \right)_{\mathcal{L}}: \mathfrak{D}_{\mathcal{L}} \longrightarrow L^2(X \times S^1, \mathcal{E}). \quad (29)$$

Будем считать (этого можно всегда добиться гомотопией), что $A(t) = A(1)$ при $t \geq 1 - 2\varepsilon$ и $A(t) = A(0)$ при $t \leq 2\varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Положим

$$N_1 = \{t \in (-\infty, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, \infty)\}, \quad N_2 = \{t \in [2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]\}.$$

В качестве алгебры функций $\mathcal{C}$ снова возьмем алгебру бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ от переменной t , постоянных на N_1 и на N_2 . Оператор (29) получается из оператора (28) следующим изменением на множестве N_1 : бесконечные “полуцилиндры” $X \times (-\infty, 0)$ и $X \times (1, \infty)$ отрезаются и выбрасываются, а торцы $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ оставшегося произведения $X \times [0, 1]$ склеиваются, причем расслоение E склеивается в расслоение $\mathcal{E}$ сцеплением по автоморфизму $U: E|_{t=0} \rightarrow E|_{t=1}$.

Итак, мы должны показать, что приращение индекса при таком изменении оператора на N_1 равно нулю. Для этого подменим оператор (28) оператором

$$\mathcal{A}(0, 0): \mathfrak{D}_{00} \rightarrow L^2(X \times \mathbb{R}, E). \quad (30)$$

Оператор (30) будет отличаться от оператора (28) только на N_2 , если записать его в эквивалентной форме

$$\mathcal{A}(0, 0) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} + A(0) & \text{при } t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} + A(1) & \text{при } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (31)$$

где подразумевается, что расслоение E при $t = 1/2$ склеено сцеплением по автоморфизму

$$U^{-1}: E|_{t=1/2+0} \rightarrow E|_{t=1/2-0}.$$

(Переход от (30) к (31) есть, по существу, не что иное, как просто запись оператора $\mathcal{A}(0, 0)$ при $t \geq 1/2$ в “новых координатах” в слоях расслоения E .)

Применим теперь к оператору (30), записанному в форме (31), то же изменение на N_1 , что было ранее применено к оператору (28). Полученный в результате оператор на $X \times S_1$ имеет вид (31), причем расслоение, в котором он действует, получено из E сцеплением по автоморфизмам

$$U: E|_{t=0} \rightarrow E|_{t=1}, \quad U^{-1}: E|_{t=1/2+0} \rightarrow E|_{t=1/2-0}.$$

Нетрудно видеть, что это расслоение изоморфно поднятию расслоения E на $X \times S_1$, а сам полученный оператор есть не что иное, как $(\partial/\partial t + A(0))_L$, и его индекс равен нулю (так как он инвариантен относительно вращений вдоль S^1). Индекс оператора (28) также равен нулю (он обратим), так что приращение индекса равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 2 показывает, что для спектрального потока семейства (2) справедлив принцип локализации: любые модификации, которые мы применим к рассматриваемому оператору Дирака (1) в плоской области X и к входящей в граничные условия функции B , автоматически поднимаются на $X \times S_1$, превращаясь там в модификации оператора $\partial/\partial t + D_t$, а для них справедлив принцип локальности индекса (см. теорему 4.10 в [26]), который в силу теоремы 2 равен спектральному потоку.

Принцип локализации позволяет разбивать область с дырами на части, содержащие меньшее число дыр. Покажем это на примере. На рис. 5 слева показана область X с двумя дырами. Покажем, что вычисление спектрального потока для семейства операторов Дирака с локальными краевыми условиями в такой области

Рис. 5. Разрезание на части области с дырами.

Рис. 6. Разрезание на части области без дыр.

сводится к вычислению для областей с одной дырой. Действительно, пусть N_1 – множество, заштрихованное на рис. 5 слева, а N_2 – дополнение к малой окрестности множества N_1 . Изменим область внутри N_1 , как показано на рис. 5 справа, так, что из исходной области получаются две области с гладкой границей. Функция $B(x)$, входящая в граничные условия, может быть продолжена непрерывным образом на возникшие внутри области N_1 новые участки границы как не обращающаяся в нуль вещественная функция, так как ее знак на всей внешней границе исходной области один и тот же. Таким образом, область распалась на две не связанные между собой части, и чтобы доказать, что спектральный поток для семейства операторов Дирака в исходной области совпадает с суммой спектральных потоков, отвечающих двум вновь возникшим областям, нужно показать, что приращение спектрального потока при такой модификации области равно нулю. Для доказательства воспользуемся методом локализации. Изменим исходное семейство, изменив область в N_2 (так, что получится область, показанная на рис. 6 слева) и продолжая $B(x)$ непрерывным образом на возникший внутри N_2 новый участок границы как не обращающуюся в нуль вещественную функцию. Для нового семейства спектральный поток и до, и после модификации, показанной на рис. 6, равен нулю, поскольку области на этом рисунке стягиваемы и калибровочное преобразование μ в них гомотопно тривиальному. Итак, разрезая область на части, можно свести дело к случаю области с одной дырой, а для таких областей формула (3) была доказана в работе [20]. (Разумеется, можно было бы доказать ее и непосредственно с помощью теоремы 2, но необходимости в этом нет, и мы не приводим соответствующие выкладки за недостатком места.)

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим возможную физическую реализацию ненулевого спектрального потока. Начнем со случая графена. Следует иметь в виду, что в графене имеется две дираковские подсистемы электронов (две долины) и, вообще говоря, рассеяние на границах образца смешивает долины [7], [31]. Исключение составляет случай, когда при приближении к границе достаточно плавно открывается энергетическая щель в электронном энергетическом спектре. Такая ситуация естественно имеет место при химической функционализации границ, которая модифицирует электронную структуру в достаточно большой области пространства [32]. В результате рассеянием между долинами можно пренебречь, и мы имеем граничное условие в задаче (1), впервые предложенное Берри и Мондрагоном [19]. Детальный микроскопический вывод граничного условия, начинающийся с дискретной решеточной модели, дан в работе [31] (см. также главу 5 в [7] и цитированную там литературу). Знак константы B при этом определяется знаком появляющегося массового члена в уравнении Дирака, а это, в свою очередь, определяется тем, как именно расположатся на границе химические группы. Можно надеяться, что в части образцов (если приготовить графеновое кольцо) знаки константы B будут разными на внутреннем и внешнем краях кольца, что необходимо для ненулевого спектрального потока. Такой случай, однако, трудно реализовать контролируемым образом. Видимо, больше возможностей предоставляют топологические изоляторы. Во-первых, двумерная дираковская система реализуется на поверхности трехмерных топологических изоляторов, таких как Bi_2Se_3 , причем дираковский конус в этом случае может быть один [8], [9]. Для открытия щели (появления массового члена) нужно покрыть поверхность магнитным слоем, причем знак массы определяется направлением намагниченности [8], [9]. Это открывает возможность манипулирования знаком константы B . Во-вторых, двумерные безмассовые дираковские электроны могут быть реализованы в слое бесщелевого полупроводника HgTe , зажатого между двумя слоями CdTe , при некоторой критической толщине слоя [8], [9]. Недавно такая возможность была продемонстрирована экспериментально [33]. Если толщина слоя плавно меняется в пространстве, отклоняясь от критического значения, можно реализовать как положительные, так и отрицательные значения массового члена. В данный момент эта возможность реализации рассмотренной нами ситуации ненулевого спектрального потока выглядит самой привлекательной.

Благодарности. Исследования В. Е. Назайкинского были поддержаны РФФИ (грант № 11-01-00973). Авторы признательны С. Ю. Доброхотову и А. И. Шафаревичу за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] N. D. Mermin, *Rev. Modern Phys.*, **51**:3 (1979), 591–648.
- [2] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.*, **49**:6 (1982), 405–408.
- [3] J. Bellisard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, *J. Math. Phys.*, **35**:10 (1994), 5373–5451, arXiv: cond-mat/9411052.
- [4] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990.

- [5] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, International Series of Monographs on Physics, **117**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
- [6] M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, F. Guinea, *Phys. Rep.*, **496**:4–5 (2010), 109–148, arXiv:1003.5179.
- [7] M. I. Katsnelson, *Graphene. Carbon in Two Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [8] M. Z. Hasan, C. L. Kane, *Rev. Modern Phys.*, **82**:4 (2010), 3045–3067, arXiv:1002.3895.
- [9] X.-L. Qi, S.-C. Zhang, *Rev. Modern Phys.*, **83**:4 (2011), 1057–1110.
- [10] M. F. Atiyah, I. M. Singer, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 422–433.
- [11] N. B. Kopnin, *Rep. Prog. Phys.*, **65**:11 (2002), 1633–1678.
- [12] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [13] S. Olariu, I. I. Popescu, *Rev. Modern Phys.*, **57**:2 (1985), 339–436.
- [14] Y. Avishai, Y. Hatsugai, M. Kohmoto, *Phys. Rev. B*, **47**:15 (1993), 9501–9512.
- [15] P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, Ya. M. Blanter, C. W. J. Beenakker, A. F. Morpurgo, *Phys. Rev. B*, **76**:23 (2007), 235404, 6 pp.
- [16] R. Jackiw, A. I. Milstein, S.-Y. Pi, I. S. Terekhov, *Phys. Rev. B*, **80**:3 (2009), 033413, 3 pp., arXiv:0904.2046.
- [17] M. I. Katsnelson, *Europhys. Lett.*, **89**:1 (2010), 17001, 3 pp., arXiv:0911.3263.
- [18] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **79**:1 (1976), 71–99.
- [19] M. Berry, R. J. Mondragon, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **412**:1842 (1987), 53–74.
- [20] M. Prokhorova, *The spectral flow for Dirac operators on compact planar domains with local boundary conditions*, arXiv:1108.0806.
- [21] M. F. Atiyah, R. Bott, “The index problem for manifolds with boundary”, *Proceedings of the Bombay Colloquium on Differential Analysis* (Bombay, India, January 7–14, 1964), Oxford Univ. Press, Oxford, 1964, 175–186.
- [22] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **274**, Springer, Berlin, 1985.
- [23] В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, *Докл. РАН*, **370**:1 (2000), 19–23.
- [24] В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 37–52.
- [25] V. Nazaikinskii, B. Sternin, *Abstr. Appl. Anal.*, **2006** (2006), 98081, 16 pp.
- [26] V. E. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, Differential and Integral Equations and Their Applications, **7**, CRC Press, Boca Raton, FL, 2006.
- [27] B. Booß-Bavnbek, M. Lesch, J. Phillips, *Canad. J. Math.*, **57**:2 (2005), 225–250.
- [28] B. Booß-Bavnbek, K. P. Wojciechowski, *Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators*, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [29] J. Brüning, M. Lesch, *J. Funct. Anal.*, **185**:1 (2001), 1–62.
- [30] B. Booß-Bavnbek, M. Lesch, C. Zhu, *J. Geom. Phys.*, **59**:7 (2009), 784–826, arXiv:0803.4160.
- [31] A. R. Akhmerov, C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B*, **77**:8 (2008), 085423, 10 pp., arXiv:0710.2723.
- [32] D. W. Boukhvalov, M. I. Katsnelson, *Nano Lett.*, **8**:12 (2008), 4373–4379, arXiv:0807.3855.
- [33] B. Büttner, C. X. Liu, G. Tkachov, E. G. Novik, C. Brune, H. Buhmann, E. M. Hankiewicz, P. Recher, B. Trauzettel, S. C. Zhang, L. W. Molenkamp, *Nature Physics*, **7**:5 (2011), 418–422, arXiv:1009.2248.