Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Асимптотики малых уклонений для гауссовской меры Боголюбова в L^p -норме, $2 \leq p \leq \infty$, ТМФ, 2012, том 173, номер 3, 453–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:36:23

© 2012 г.

В. Р. Фаталов*

АСИМПТОТИКИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ БОГОЛЮБОВА В L^p -НОРМЕ, $2 \leq p \leq \infty$

Доказаны результаты о точных асимптотиках малых уклонений в L^p -норме при $2 \leq p \leq \infty$ для гауссовского стационарного процесса Боголюбова $\xi(t)$. Установлено свойство взаимной абсолютной непрерывности условной меры Боголюбова и условной меры Винера, вычислена производная Радона–Никодима.

Ключевые слова: малые уклонения, меры Боголюбова, условная мера Винера.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследуя функциональные интегралы, введенные в работах Боголюбова [1], [2], Санкович доказал, [3]–[5], что указанные функциональные интегралы берутся по особой гауссовской мере, которая названа в работе [4] *гауссовской мерой Боголюбова*. Дадим описание этой меры, придерживаясь работ [3]–[5].

Гауссовский процесс Боголюбова – стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, со средним, равным нулю, и ковариационной функцией

$$B(t-s) \equiv B(t,s) := \mathbf{E} \xi(t) \xi(s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh}(\beta\omega/2)} \operatorname{ch} \left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right), \quad t, s \in [0, \beta]. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже $\mathbf{E}$ – оператор математического ожидания, взятый относительно вероятности $\mathbf{P}$, $m > 0$ – масса частицы, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора [4]. Согласно одному из общих результатов теории гауссовских процессов [6], процесс Боголюбова $\xi(t)$ имеет п. н. непрерывные траектории на отрезке $[0, \beta]$. Используя формулу (1.1), находим $\mathbf{E}[\xi(\beta) - \xi(0)]^2 = 0$, следовательно, $\xi(0) = \xi(\beta)$ п. н. Учитывая вышеизложенное, заключаем, что траектории гауссовского процесса Боголюбова принадлежат п. н. пространству $C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций $x(t)$ с равномерной метрикой, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$. Распределение μ_B процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, \beta]$ и называется *гауссовской мерой Боголюбова*.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

Как указано в работе [4], мера Боголюбова и интегралы по ней имеют важное значение в ряде областей современной теоретической физики при применении подхода, основанного на методе функционального интегрирования. Среди других здесь можно указать ряд задач квантовой теории поля (представление функции Грина), квантовой электродинамики (модель Блоха–Нордсика), статистической механики (модель полярона) и др. (см. книги [7]–[9]). Таким образом, актуальными являются две следующие задачи: вычисление различных интегралов по мере Боголюбова и вычисление боголюбовской меры множеств в функциональных пространствах – таких множеств, например, как большие и малые L^p -шары.

В работе [4] даны приближенные квадратурные формулы для некоторых функциональных интегралов по мере Боголюбова; эти формулы точны для функциональных многочленов. В дополнение к результатам работы [4] в статье [10] были получены приближенные асимптотические формулы для одного класса функциональных интегралов типа Лапласа, взятых по мере Боголюбова, и доказаны теоремы о точных асимптотиках больших шаров. В качестве основного функционала в работе [10] была взята L^p -норма для значений $p > 0$, а также были доказаны утверждения об асимптотиках моментов распределений L^p -функционалов для гауссовского процесса Боголюбова, когда порядок момента стремится к бесконечности.

В работе [11] получены результаты о точных асимптотиках боголюбовской меры малых L^2 -шаров. В настоящей работе мы докажем теоремы о точных асимптотиках малых боголюбовских шаров в L^p -норме при $2 \leq p \leq \infty$.

Опишем типичные задачи теории малых уклонений гауссовских мер. Пусть $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ – банахово сепарабельное пространство, μ – гауссовская мера, заданная на борелевской σ -алгебре подмножеств $\mathbf{B}$ [12], [13], D – некоторая область пространства $\mathbf{B}$, например $D = D_0 := \{x \in \mathbf{B} \mid \|x\| \leq 1\}$. Основные задачи теории малых уклонений гауссовских мер связаны с исследованием асимптотического поведения вероятностей

$$\mu(\varepsilon D), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Чрезвычайно важной задачей здесь является задача вычисления точной (или хотя бы логарифмической) асимптотики вероятности (1.2), а также получение верхних и нижних оценок для указанной вероятности при малых $\varepsilon > 0$. С современным состоянием интенсивно развивающейся теории малых уклонений гауссовских мер можно ознакомиться в работах [13]–[19]. общепринятый термин “малые уклонения” отражает то обстоятельство, что вероятности (1.2) изучаются при малых значениях параметра сжатия $\varepsilon > 0$. Часто в качестве множества D берется единичный шар D_0 , в этом случае задачу о малых уклонениях называют также *проблемой малых шаров*. Среди задач физики, где возникают асимптотики малых уклонений гауссовских процессов, укажем следующие: оценка правдоподобия некоторых космологических моделей [20], изучение решений невязкого уравнения Бюргерса со случайными начальными данными [21], применение метода ренормализационной группы в статистической механике [22].

Перейдем к точной формулировке полученных результатов. Введем некоторые определения и объекты, характеризующие асимпотику малых уклонений в случае винеровского процесса и L^p -функционалов [17].

Пусть $\kappa_0 \equiv \kappa_0(p) > 0$ – минимальное собственное число самосопряженного оператора Шредингера $\mathcal{S}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, имеющего вид [23]

$$\mathcal{S}y(t) := -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t). \quad (1.3)$$

Определим параметры

$$\lambda_0 := \left(\frac{2\kappa_0}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad b_p := \frac{p}{2}\lambda_0, \quad \sigma_p^2 = \frac{p\lambda_0}{2+p}. \quad (1.4)$$

Некоторые свойства и оценки собственных чисел $\kappa_0(p)$ описаны в работе [18]. В настоящей работе мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1 (точная асимптотика малых уклонений в L^p -норме). Пусть p – фиксированное число, $2 \leq p < \infty$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \right\} = \exp \left\{ -\frac{b_p \beta^{(p+2)/p}}{m \varepsilon^2} \right\} \varepsilon \frac{\sqrt{2m} \operatorname{sh}(\beta\omega/2)}{\sqrt{\pi} \sigma_p \beta^{(p+2)/(2p)}} (1 + o(1)). \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 2 (точная асимптотика малых уклонений в норме типа супремума). При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, \beta]} |\xi(t)| \leq \varepsilon \right\} = e^{-\pi^2 \beta / 8m \varepsilon^2} 2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} (1 + o(1)). \quad (1.6)$$

Используя результаты работы [17] и формулу (1.5), получим при $p = 2$ следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1 (малые уклонения в L^2 -норме). При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta \xi^2(t) dt \leq \varepsilon^2 \right\} = e^{-\beta^2 / 8m \varepsilon^2} \varepsilon \frac{4\sqrt{2m} \operatorname{sh}(\beta\omega/2)}{\sqrt{\pi} \beta} (1 + o(1)). \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) при $m = \beta = 1$ было получено ранее в работе [11] методами гильбертова пространства.

2. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ УСЛОВНОЙ МЕРЫ БОГОЛЮБОВА И УСЛОВНОЙ МЕРЫ ВИНЕРА

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на следующем методе сравнения с винеровским процессом (ср. с работой [19]).

Метод сравнения. В случае L^p -функционалов вычисление точных асимптотик малых уклонений для некоторых гауссовских или марковских процессов, распределения которых эквивалентны распределению процесса типа винеровского, можно проводить на основе результатов типа теорем из работы [17] для винеровского процесса и теоремы Радона–Никодима об абсолютной непрерывности.

Покажем, как метод сравнения можно применить в случае гауссовского процесса Боголюбова.

2.1. Масштабное свойство процесса Боголюбова. При работе с интегральными функционалами и функционалами типа супремума для упрощения вычислений и записи доказательств полезно использовать масштабное свойство процесса Боголюбова, доказанное ранее в работе [10].

Назовем процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, рассмотренный в разделе 1, процессом Боголюбова с параметрами (m, β, ω) . Определим гауссовский процесс

$$\eta(t) := \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\beta}} \xi(\beta t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (масштабное свойство процесса Боголюбова). *Гауссовский процесс (2.1) представляет собой процесс Боголюбова с параметрами $(1, 1, \omega_1)$, где*

$$\omega_1 := \beta\omega > 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, для $t, s \in [0, 1]$ справедливы равенства

$$\mathbf{E}\eta(t) = 0, \quad \mathbf{E}\eta(t)\eta(s) = \frac{1}{2\omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1/2)} \operatorname{ch}\left(\omega_1|t-s| - \frac{\omega_1}{2}\right).$$

Несложно убедиться, что в силу предложения 1 теоремы типа 1, 2 достаточно доказать для процесса Боголюбова $\eta(t)$.

2.2. Абсолютная непрерывность условной меры Боголюбова и условной меры Винера. На протяжении всей работы $w(t)$, $t \geq 0$, $w(0) = 0$, будут обозначать стандартный винеровский процесс. Пусть

$$w_0(t) := \{w(t) \mid w(0) = w(1) = 0\}, \quad t \in [0, 1],$$

обозначает стандартный броуновский мост [24]. Как известно, $w_0(t)$ – гауссовский процесс с п. н. непрерывными траекториями, средним, равным нулю, и ковариационной функцией $\mathbf{E}w_0(t)w_0(s) = \min(t, s) - ts$, $t, s \in [0, 1]$. Обозначим через P_{w_0} распределение процесса $w_0(t)$ в пространстве $C[0, 1]$. Легко видеть, что гауссовская мера P_{w_0} сосредоточена на подпространстве $C^0[0, 1] := \{x \in C[0, 1] : x(0) = x(1) = 0\}$ пространства $C[0, 1]$. По аналогии обозначим через

$$\eta_0(t) := \{\eta(t) \mid \eta(0) = \eta(1) = 0\}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.3)$$

гауссовский условный процесс Боголюбова. Пусть P_{η_0} обозначает распределение процесса $\eta_0(t)$ в пространстве $C[0, 1]$. Очевидно, что гауссовская мера P_{η_0} также сосредоточена на подпространстве $C^0[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3 (об абсолютной непрерывности). *Гауссовские меры P_{η_0} и P_{w_0} взаимно абсолютно непрерывны, и производная Радона–Никодима имеет вид*

$$\frac{dP_{\eta_0}(x)}{dP_{w_0}(x)} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} \omega_1}}{\sqrt{\omega_1}} \exp \left\{ -\frac{\omega_1^2}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \right\}. \quad (2.4)$$

Доказательство теоремы 3 длинное, и мы разобьем его на несколько пунктов.

2.3. Один общий результат об абсолютной непрерывности гауссовских мер в гильбертовом пространстве. Следуя книге [25], приведем один нужный нам результат.

Пусть $L^2 = L^2[0, 1]$ обозначает обычное гильбертово пространство измеримых функций, интегрируемых в квадрате на $[0, 1]$, со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt$, $x, y \in L^2$. Ниже I обозначает тождественный оператор в L^2 , $\text{Ran}(A)$ – область значений оператора A , A^{-1} – обратный оператор к оператору A . Ядерные операторы и детерминанты операторов рассмотрены в книгах [12] и [23].

ТЕОРЕМА 4. Пусть μ_1, μ_2 – гауссовские меры в гильбертовом пространстве L^2 со средним, равным нулю, и инъективными ковариационными операторами A_1, A_2 соответственно. Предположим, что линейный оператор

$$V = A_1 A_2^{-1} - I \quad (2.5)$$

является ограниченным ядерным оператором в L^2 и точка -1 не является точкой спектра оператора V . Тогда гауссовская мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 , и производная Радона–Никодима имеет вид

$$\frac{d\mu_2(x)}{d\mu_1(x)} = \sqrt{\det(A_1 A_2^{-1})} e^{-\langle (A_2^{-1} - A_1^{-1})x, x \rangle / 2}. \quad (2.6)$$

Утверждение теоремы 4 выводится непосредственно из результатов книги [25].

2.4. Характеризация условной меры Боголюбова и распределения броуновского моста. В дальнейшем изложении нам понадобится процесс более общего вида чем $\eta_0(t)$. Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ определим условный случайный процесс

$$\eta_y(t) := \{\eta(t) \mid \eta(0) = \eta(1) = y\}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.7)$$

Процесс $\eta_y(t)$ представляет собой гауссовский процесс, выходящий в нулевой момент времени из точки y и приходящий в момент времени $t = 1$ также в точку y . Очевидно, что при $y = 0$ процесс (2.7) совпадает с процессом (2.3).

ЛЕММА 1. 1. Гауссовский процесс $\eta_y(t)$ совпадает по распределению с процессом

$$\zeta_y(t) := \{\eta(t) \mid \eta(0) = y\}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

2. Гауссовский процесс $\eta_y(t)$ имеет среднее значение и ковариационную функцию следующего вида:

$$m_y \equiv m_y(t) \equiv \mathbf{E}\eta_y(t) = y \frac{e^{\omega_1 t} + e^{\omega_1(1-t)}}{1 + e^{\omega_1}}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} R_0(t, s) &\equiv \mathbf{E}[\eta_y(t) - m_y(t)][\eta_y(s) - m_y(s)] = \\ &= \frac{1}{2\omega_1 \text{sh}(\omega_1/2)} \left[\text{ch} \left(\omega_1 |t - s| - \frac{\omega_1}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{ch}(\omega_1 t - \omega_1/2) \text{ch}(\omega_1 s - \omega_1/2)}{\text{ch}(\omega_1/2)} \right], \quad t, s \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Гауссовские процессы $\{\eta_y(t), t \in [0, 1]\}$ и $\{\eta_0(t) + m_y(t), t \in [0, 1]\}$ имеют одинаковые распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы вытекает непосредственно из равенства $\eta(0) = \eta(1)$ п. н. Второе утверждение получаем, используя предложение 1, равенство (2.8) и общие формулы для условного среднего и условной ковариации гауссовских распределений [26]. Докажем третье утверждение. Отметим, что выражение справа в формуле (2.10) для ковариационной функции не зависит от y , а среднее (2.9) зависит линейно от y , причем $m_0(t) = 0$. Учитывая эти факты и второе утверждение леммы, заключаем, что гауссовские процессы $\{\eta_y(t), t \in [0, 1]\}$ и $\{\eta_0(t) + m_y(t), t \in [0, 1]\}$ имеют одно и то же среднее значение $m_y(t)$ и одну и ту же ковариационную функцию $R_0(t, s)$. Отсюда, очевидно, следует третье утверждение леммы. Лемма доказана.

Для применения методов гильбертова пространства мы будем рассматривать гауссовскую меру P_{η_0} , полагая ее заданной в пространстве L^2 и имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. Как известно, в этом случае мера P_{η_0} имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_{\eta_0}: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа,

$$A_{\eta_0}x(t) = \int_0^1 R_0(t, s)x(s) ds, \quad x \in L^2, \quad (2.11)$$

где функция $R_0(t, s)$ задана формулой (2.10) [12]. Пусть $C^2[0, 1]$ обозначает множество дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций.

ЛЕММА 2. Область значений ковариационного оператора A_{η_0} , определенного формулой (2.11), имеет вид

$$\text{Ran}(A_{\eta_0}) = \{x \in C^2[0, 1] \mid x(0) = x(1) = 0\}. \quad (2.12)$$

Оператор A_{η_0} является инъективным, обратный оператор задается формулой

$$[A_{\eta_0}^{-1}z](t) = -z''(t) + \omega_1^2 z(t), \quad z \in \text{Ran}(A_{\eta_0}), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы получаем в результате двукратного дифференцирования по t равенства $z(t) = A_{\eta_0}x(t)$.

Мы будем также рассматривать гауссовскую меру P_{w_0} , полагая ее заданной в пространстве L^2 и имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, 1]$. В этом случае гауссовская мера P_{w_0} имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_{w_0}: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа,

$$A_{w_0}x(t) = \int_0^1 [\min(t, s) - ts]x(s)ds, \quad x \in L^2. \quad (2.14)$$

Утверждения следующей леммы можно получить, рассуждая так же, как в книге [25].

ЛЕММА 3. Область значений ковариационного оператора A_{w_0} , определенного формулой (2.14), имеет вид

$$\text{Ran}(A_{w_0}) = \{x \in C^2[0, 1] \mid x(0) = x(1) = 0\}. \quad (2.15)$$

Оператор A_{w_0} является инъективным, обратный оператор задается формулой

$$[A_{w_0}^{-1}z](t) = -z''(t), \quad z \in \text{Ran}(A_{w_0}), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.16)$$

Собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ковариационного оператора A_{w_0} имеют следующий вид:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

ЛЕММА 4. Справедливы равенства $\text{Ran}(A_{\eta_0}) = \text{Ran}(A_{w_0})$,

$$A_{\eta_0}^{-1} = A_{w_0}^{-1} + \omega_1^2 I. \quad (2.18)$$

Эти утверждения вытекают непосредственно из формул (2.12), (2.13), (2.15), (2.16).

2.5. Доказательство теоремы 3. Применим теорему 4, в которой положим $\mu_1 = P_{w_0}$, $\mu_2 = P_{\eta_0}$, $A_1 = A_{w_0}$, $A_2 = A_{\eta_0}$. В этом случае в силу равенства (2.18) линейный оператор V , заданный формулой (2.5), имеет вид

$$V = A_{w_0} A_{\eta_0}^{-1} - I = \omega_1^2 A_{w_0}. \quad (2.19)$$

Оператор (2.19) является ядерным положительным оператором в L^2 , и точка -1 не является точкой спектра этого оператора. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4. Применяя ее, заключаем, что гауссовская мера P_{η_0} абсолютно непрерывна относительно гауссовской меры P_{w_0} , и производная Радона–Никодима имеет вид

$$\frac{dP_{\eta_0}(x)}{dP_{w_0}(x)} = \sqrt{\det(A_{w_0} A_{\eta_0}^{-1})} e^{-\langle (A_{\eta_0}^{-1} - A_{w_0}^{-1})x, x \rangle / 2}. \quad (2.20)$$

Используя формулы (2.17), (2.19) и соотношение 4.5.68 из справочника [27], убеждаемся, что выполнены равенства

$$\det(A_{w_0} A_{\eta_0}^{-1}) = \det[I + \omega_1^2 A_{w_0}] = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\omega_1}{\pi^2 k^2} \right] = \frac{\text{sh } \omega_1}{\omega_1}. \quad (2.21)$$

Используя формулу (2.18) и определение скалярного произведения в L^2 , получаем равенства

$$\langle (A_{\eta_0}^{-1} - A_{w_0}^{-1})x, x \rangle = \omega_1^2 \langle x, x \rangle = \omega_1^2 \int_0^1 x^2(t) dt. \quad (2.22)$$

Из соотношений (2.20)–(2.22) вытекают формула (2.4) и утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Нам понадобится один результат, относящийся к винеровскому процессу.

Пусть $y_0(t)$ – нормированная положительная собственная функция, соответствующая минимальному собственному числу $\kappa_0(p) > 0$ самосопряженного оператора Шредингера (1.3). Таким образом, $\mathcal{S}y_0(t) = \kappa_0 y_0(t)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} y_0^2(x) dx = 1$. Учитывая обозначения (1.4), определим функцию

$$v_0(x) := \lambda_0^{1/[2(2+p)]} y_0(\lambda_0^{1/(2+p)} x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

В обозначениях (1.4) справедливо следующее утверждение, доказанное в работе [18].

ТЕОРЕМА 5 (точные асимптотики малых уклонений винеровского процесса для L^p -функционалов, условная версия). Для фиксированных $p > 0$, $z \in \mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |w(t) + \varepsilon z|^p dt \leq \varepsilon^p \mid w(0) = w(1) = 0\right\} = e^{-b_p/\varepsilon^2} \frac{v_0^2(z)}{\sigma_p} (1 + o(1)), \quad (3.2)$$

при этом соотношение (3.2) справедливо равномерно по $z \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 6 (формула сдвига Камерона–Мартина). Пусть μ_1, μ_2 – гауссовские меры в гильбертовом пространстве L^2 со средними $0 \in L^2$ и $a \in L^2$ соответственно и одним и тем же инъективным ковариационным оператором A . Предположим, что

$$a \in \text{Ran}(A). \quad (3.3)$$

Тогда гауссовские меры μ_1 и μ_2 взаимно абсолютно непрерывны, и производная Радона–Никодима имеет вид

$$\frac{d\mu_2(x)}{d\mu_1(x)} = e^{-\langle a, A^{-1}a \rangle/2} e^{\langle x, A^{-1}a \rangle/2}. \quad (3.4)$$

Утверждение теоремы 6 выводится с учетом условия (3.3) из общей формулы Камерона–Мартина [12].

Обозначим через $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$, банахово пространство интегрируемых в p -й степени функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}. \quad (3.5)$$

Положим также $\|x\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, $x \in C[0, 1]$. Из приведенных определений и неравенства Гельдера [28] следует оценка

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_p, \quad x \in C[0, 1], \quad 2 \leq p \leq \infty. \quad (3.6)$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

ЛЕММА 5. Для любых $p > 0$, $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \leq \varepsilon^p\right\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \leq \delta^p\right\}, \quad \delta = \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{\beta^{(2+p)/(2p)}}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в первом из интегралов (4.1) замену переменной $t = \beta s$ и используя формулу (2.1), получаем равенство (4.1).

Таким образом, в силу леммы 5 нам достаточно доказать вариант теоремы 1 для процесса Боголюбова (2.1) с параметрами $(1, 1, \omega_1)$ и малым параметром $\delta \rightarrow 0$.

4.1. Доказательство теоремы 1 для процесса Боголюбова $\eta(t)$. Зафиксируем число $p \geq 2$. Случайная величина $\eta(0)$ является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2\omega_1 \operatorname{th}(\omega_1/2)} = \frac{e^{\omega_1} + 1}{2\omega_1(e^{\omega_1} - 1)}. \quad (4.2)$$

Применяя формулу полной вероятности относительно случайной величины $\eta(0)$, получаем с учетом (3.5) и леммы 1 (п. 2) следующее равенство для любого $\delta > 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \leq \delta^p\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} J_\delta(y) e^{-y^2/2\sigma_0^2} dy, \quad (4.3)$$

где

$$J_\delta(y) := \mathbf{P}\{\|\eta\|_p \leq \delta \mid \eta(0) = \eta(1) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Обозначим через P_{η_y} распределение гауссовского процесса $\eta_y(t)$, $t \in [0, 1]$, в пространстве L^2 , имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C[0, 1]$. В силу утверждения 3 леммы 1 для любого $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$dP_{\eta_y}(x) = dP_{\eta_0}(x - m_y). \quad (4.5)$$

Пусть $I_C(x)$ обозначает индикаторную функцию множества C , т. е. $I_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $I_C(x) = 0$, если $x \notin C$. Тогда, используя соотношения (3.5), (4.4), (4.5), убеждаемся, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} J_\delta(y) &= \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x) dP_{\eta_y}(x) = \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x) dP_{\eta_0}(x - m_y) = \\ &= \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x + m_y) dP_{\eta_0}(x), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$D(\delta) := \{x \in L^2 \mid \|x\|_p \leq \delta\}. \quad (4.7)$$

С учетом выражения (2.9) рассмотрим следующий элемент пространства L^2 :

$$a \equiv a(t) := m_y(t) - y = y \frac{e^{\omega_1 t} + e^{\omega_1(1-t)}}{1 + e^{\omega_1}} - y, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.8)$$

Легко видеть, что $a(0) = a(1) = 0$. Таким образом, в силу формулы (2.12) справедливо включение $a \in \text{Ran}(A_{\eta_0})$. Гауссовские меры $dP_{\eta_0}(x)$ и $dP_{\eta_0}(x - a)$ имеют средние значения 0 и a соответственно и один и тот же инъективный ковариационный оператор A_{η_0} . Отсюда согласно теореме 6 и формуле (3.4) следует, что эти две меры взаимно абсолютно непрерывны, и производная Радона–Никодима имеет вид

$$\frac{dP_{\eta_0}(x - a)}{dP_{\eta_0}(x)} = e^{-\langle a, A_{\eta_0}^{-1} a \rangle / 2} e^{\langle x, A_{\eta_0}^{-1} a \rangle}. \quad (4.9)$$

Используя формулу (4.8), получаем следующее соотношение для второй производной:

$$a''(t) = \omega_1^2(a(t) + y), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Учитывая формулы (2.13) и (4.10), находим

$$A_{\eta_0}^{-1} a = -a''(t) + \omega_1^2 a(t) = -\omega_1^2 y. \quad (4.11)$$

В силу формулы (4.11) выполнены следующие равенства:

$$\langle a, A_{\eta_0}^{-1} a \rangle = -\omega_1^2 y \langle a, \mathbf{1} \rangle = -\omega_1^2 y^2 \left[2 \frac{e^{\omega_1} - 1}{\omega_1(e^{\omega_1} + 1)} - 1 \right], \quad (4.12)$$

$$\langle x, A_{\eta_0}^{-1} a \rangle = -\omega_1^2 y \langle x, \mathbf{1} \rangle = -\omega_1^2 y \int_0^1 x(t) dt, \quad (4.13)$$

где $\mathbf{1}$ обозначает функцию, тождественно равную 1 на отрезке $[0, 1]$.

Принимая во внимание соотношения (4.6)–(4.9), (4.12), (4.13), заключаем, что для любого $\delta > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} J_\delta(y) &= \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x + a + y) dP_{\eta_0}(x) = \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x + y) dP_{\eta_0}(x - a) = \\ &= \exp \left\{ \omega_1^2 y^2 \left[\frac{e^{\omega_1} - 1}{\omega_1(e^{\omega_1} + 1)} - \frac{1}{2} \right] \right\} \int_{L^2} I_{D(\delta)}(x + y) \exp \left\{ -\omega_1^2 y \int_0^1 x(t) dt \right\} dP_{\eta_0}(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Применяя теорему 3 к последнему интегралу формулы (4.14), получаем с учетом (4.7) следующее равенство для любого $\delta > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J_\delta(y) &= \frac{\sqrt{\text{sh } \omega_1}}{\sqrt{\omega_1}} \exp \left\{ \frac{\omega_1^2 y^2 (e^{\omega_1} - 1)}{\omega_1(e^{\omega_1} + 1)} \right\} \times \\ &\times \int_{\{x: \|x+y\|_p \leq \delta\}} \exp \left\{ -\frac{\omega_1^2}{2} \int_0^1 [x(t) + y]^2 dt \right\} dP_{w_0}(x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Используя оценку (3.6) и вид подынтегрального выражения в (4.15) для любых $\delta > 0$ и $y \in \mathbb{R}$, получаем следующие неравенства:

$$e^{-\omega_1^2 \delta^2 / 2} M_\delta(y) \leq J_\delta(y) \leq M_\delta(y), \quad (4.16)$$

где

$$M_\delta(y) := \frac{\sqrt{\text{sh } \omega_1}}{\sqrt{\omega_1}} \exp \left\{ \frac{\omega_1^2 y^2 (e^{\omega_1} - 1)}{\omega_1(e^{\omega_1} + 1)} \right\} \mathbf{P} \{ \|w + y\|_p \leq \delta \mid w(0) = w(1) = 0 \}. \quad (4.17)$$

Легко видеть, что в силу формулы (4.2) справедливо равенство

$$\frac{\sqrt{\text{sh } \omega_1}}{\sqrt{2\pi\omega_1\sigma_0}} = \frac{\sqrt{2} \text{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.18)$$

Выполняя почленное интегрирование и учитывая равенство (4.18), заключаем, что из формул (4.2), (4.3), (4.16) вытекают следующие неравенства для любого $\delta > 0$:

$$e^{-\omega_1^2 \delta^2 / 2} \frac{\sqrt{2} \text{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi}} K(\delta) \leq \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |\eta(t)|^p dt \leq \delta^p \right\} \leq \frac{\sqrt{2} \text{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi}} K(\delta), \quad (4.19)$$

где

$$K(\delta) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P} \{ \|w + y\|_p \leq \delta \mid w(0) = w(1) = 0 \} dy. \quad (4.20)$$

Сделаем в интеграле в (4.20) замену переменной $y = \delta z$ и применим теорему 5. Тогда, учитывая, что соотношение (3.2) справедливо равномерно по $z \in \mathbb{R}$, получаем при $\delta \rightarrow 0$

$$K(\delta) = e^{-b_p/\delta^2} \frac{\delta}{\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(z) dz (1 + o(1)). \quad (4.21)$$

В силу формулы (3.1) и равенства $\int_{-\infty}^{\infty} y_0^2(x) dx = 1$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(z) dz = 1.$$

Отсюда и из формул (4.19), (4.21) вытекает асимптотическое соотношение при $\delta \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |\eta(t)|^p dt \leq \delta^p\right\} = e^{-b_p/\delta^2} \delta \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi} \sigma_p} (1 + o(1)). \quad (4.22)$$

Легко видеть, что формула (4.22) совпадает с формулой (1.5), если в (1.5) положить $m = \beta = 1$, $\omega = \omega_1$, $\varepsilon = \delta$, так как в этом случае в силу формул (2.1), (2.2) процесс ξ совпадает с процессом η . Таким образом, теорема 1 доказана для гауссовского процесса Боголюбова $\eta(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 для процесса Боголюбова $\xi(t)$ получаем при помощи соотношений (4.1) и (4.22). Теорема 1 полностью доказана.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУПРЕМУМА УСЛОВНОГО ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Для вывода аналога теоремы 5 для винеровского процесса в случае функционала супремума нам понадобится следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть фиксированы числа $y > 0$ и x такие, что $|x| < y$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |w(t) + x| \leq y \mid w(0) = w(1) = 0\right\} &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{-8k^2 y^2} - e^{-2(x+(2k+1)y)^2}] = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(k+1)^2/8y^2} \left[1 - \cos\left\{(k+1)\pi \frac{x+y}{y}\right\}\right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем числа $y > 0$ и x такие, что $|x| < y$. В данном доказательстве мы будем рассматривать винеровский процесс как марковский и использовать обозначение $\mathbf{P}_x$, принятое в теории марковских процессов. Имеют место очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |w(t) + x| \leq y \mid w(0) = w(1) = 0\right\} &= \mathbf{P}_x\left\{\sup_{t \in [0,1]} |w(t)| \leq y \mid w(1) = x\right\} = \\ &= \mathbf{P}_x\left\{\inf_{t \in [0,1]} w(t) \geq -y, \sup_{t \in [0,1]} w(t) \leq y \mid w(1) = x\right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Далее, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\left\{\inf_{t \in [0,1]} w(t) \geq -y, \sup_{t \in [0,1]} w(t) \leq y \mid w(1) = x\right\} &= \\ &= \frac{\mathbf{P}_x\{\inf_{t \in [0,1]} w(t) \geq -y, \sup_{t \in [0,1]} w(t) \leq y, w(1) \in dz\}_{z=x}}{\mathbf{P}_x\{w(1) \in dz\}_{z=x}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Знаменатель дроби в правой части формулы (5.3) вычисляется просто. Действительно, поскольку

$$\mathbf{P}_x\{w(1) \in dz\} = \mathbf{P}_0\{w(1) + x \in dz\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-x)^2/2} dz, \quad (5.4)$$

то

$$\mathbf{P}_x\{w(1) \in dz\} \Big|_{z=x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx. \quad (5.5)$$

Для вычисления числителя дроби в правой части формулы (5.3) применим известную формулу из справочника [29], полагая в ней $a = -y$, $b = y$, $t = 1$. В результате для всех z таких, что $|z| < y$, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \left\{ \inf_{t \in [0,1]} w(t) \geq -y, \sup_{t \in [0,1]} w(t) \leq y, w(1) \in dz \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{-(z-x+4yk)^2/2} - e^{-(z+x+2y(2k+1))^2/2}] dz. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.2)–(5.6) вытекает первое равенство из формулы (5.1).

Для доказательства второго равенства из (5.1) применим формулу суммирования Пуассона [30]. Возьмем в качестве функции $f(x)$ стандартную одномерную гауссовскую плотность, а в качестве функции $\varphi(t)$ – ее характеристическую функцию,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \varphi(t) = e^{-t^2/2}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

а также положим $\zeta = 2\lambda$. В результате для $\lambda, s \in \mathbb{R}$ получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda^2(k+1)^2} \cos(2(k+1)\lambda s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(\pi k/\lambda+s)^2/2}. \quad (5.7)$$

Положив в равенстве (5.7) $\lambda = \pi/t$, получаем тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(kt+s)^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2(k+1)^2\pi^2/t^2} \cos\left(2(k+1)\frac{\pi s}{t}\right), \quad (5.8)$$

$t, s \in \mathbb{R}$. Взяв в тождестве (5.8) $s = 0$, $t = 4y$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-8k^2y^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(k+1)^2/8y^2}. \quad (5.9)$$

Взяв в тождестве (5.8) $s = 2(x+y)$, $t = 4y$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2(x+(2k+1)y)^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(k+1)^2/8y^2} \cos\left\{(k+1)\pi \frac{x+y}{y}\right\}. \quad (5.10)$$

Из соотношений (5.9), (5.10) вытекает второе равенство в формуле (5.1). Теорема 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что при $x = 0$ формула (5.1) совпадает с известной формулой Колмогорова [16]. Сама формула (5.1) нам в литературе не встречалась.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Аналог леммы 5 для функционала супремума имеет следующий вид.

ЛЕММА 6. Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, \beta]} |\xi(t)| \leq \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, 1]} |\eta(t)| \leq \delta\right\}, \quad \delta = \frac{\varepsilon \sqrt{m}}{\sqrt{\beta}}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, сделав замену переменной $t = \beta s$ и используя формулу (2.1).

Таким образом, в силу леммы 6 нам достаточно доказать вариант теоремы 2 для процесса Боголюбова (2.1) с параметрами $(1, 1, \omega_1)$ и малым параметром $\delta \rightarrow 0$.

6.1. Доказательство теоремы 2 для процесса Боголюбова $\eta(t)$. Как уже было сказано, $\eta(0)$ является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией (4.2). Применяя формулу полной вероятности относительно случайной величины $\eta(0)$, получаем с учетом (3.5) при $p = \infty$ и леммы 1 (п. 1), следующее равенство для любого $\delta > 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, 1]} |\eta(t)| \leq \delta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\delta}^{\delta} J_{\delta}(x) e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx, \quad (6.2)$$

где теперь

$$J_{\delta}(x) := \mathbf{P}\{\|\eta\|_{\infty} \leq \delta \mid \eta(0) = \eta(1) = x\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Рассуждения, проведенные при выводе формул (4.5)–(4.20) для функционала $\|\cdot\|_p$, остаются в силе и для функционала $\|\cdot\|_{\infty}$. Учитывая это замечание, а также формулы (6.2) и (6.3), заключаем, что для любого $\delta > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$e^{-\omega_1^2 \delta^2 / 2} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi}} K(\delta) \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, 1]} |\eta(t)| \leq \delta\right\} \leq \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega_1/2)}{\sqrt{\pi}} K(\delta), \quad (6.4)$$

где теперь

$$K(\delta) := \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{P}\{\|w + x\|_{\infty} \leq \delta \mid w(0) = w(1) = 0\} dx. \quad (6.5)$$

Применяя теорему 7 при $y = \delta > 0$ и $x \in (-\delta, \delta)$, для любого $\delta > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|w + x\|_{\infty} \leq \delta \mid w(0) = w(1) = 0\} &= \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\delta} e^{\pi^2/8\delta^2} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{x + \delta}{\delta}\right)\right] + R(\delta, x), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$R(\delta, x) := \frac{\sqrt{2\pi}}{4\delta} \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{-\pi^2(k+1)^2/8\delta^2} \left[1 - \cos\left\{(k+1)\pi \frac{x + \delta}{\delta}\right\}\right], \quad (6.7)$$

$\mathcal{K} = \{1, 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$. Для $\delta > 0$ и $x \in (-\delta, \delta)$ справедлива равномерная по x оценка

$$|R(\delta, x)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2\delta} \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{-\pi^2(k+1)^2/8\delta^2} = O\left(\frac{1}{\delta} e^{-\pi^2/2\delta^2}\right), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (6.8)$$

Используя формулы (6.4)–(6.8), убеждаемся, что при $\delta \rightarrow 0$ выполнено следующее асимптотическое соотношение:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |\eta(t)| \leq \delta\right\} = \frac{\operatorname{sh}(\omega_1/2)}{\delta} e^{-\pi^2/8\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{x+\delta}{\delta}\right)\right] dx (1 + o(1)). \quad (6.9)$$

Из формулы (6.9) с учетом равенства $\int_{-\delta}^{\delta} [1 - \cos(\pi(x+\delta)/\delta)] dx = 2\delta$ вытекает следующее асимптотическое соотношение при $\delta \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |\eta(t)| \leq \delta\right\} = 2 \operatorname{sh} \frac{\omega_1}{2} e^{-\pi^2/8\delta^2} (1 + o(1)). \quad (6.10)$$

Легко видеть, что формула (6.10) совпадает с формулой (1.6), если в последней положить $m = \beta = 1$, $\omega = \omega_1$, $\varepsilon = \delta$, так как в этом случае в силу (2.1), (2.2) процесс ξ совпадает с процессом η . Таким образом, теорема 2 доказана для гауссовского процесса Боголюбова $\eta(t)$.

6.2. Доказательство теоремы 2 для процесса Боголюбова $\xi(t)$ получаем при помощи соотношений (6.1) и (6.10) Теорема 2 полностью доказана.

Благодарности. Работа над статьей выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00050).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, *ДАН СССР*, **99:2** (1954), 225–226.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Аспекты теории полярона*, Сообщения ОИ-ЯИ, P17–81–65, ОИЯИ, Дубна, 1981.
- [3] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **119:2** (1999), 345–352.
- [4] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **126:1** (2001), 149–163.
- [5] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **127:1** (2001), 125–142.
- [6] Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969.
- [7] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, М., 1976.
- [8] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure and Applied Mathematics, **86**, Acad. Press, New York, 1979.
- [9] Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием континуальных интегралов*, Мир, М., 1984.
- [10] В. Р. Фаталов, *ТМФ*, **168:2** (2011), 299–340.
- [11] Р. С. Пусев, *ТМФ*, **165:1** (2010), 134–144.
- [12] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [13] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995.
- [14] M. A. Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, Berlin, 2012.
- [15] W. V. Li, Q.-M. Shao, *Stochastic Processes: Theory and Methods*, Handbook of Statistics, **19**, eds. D. N. Shanbhag and C. R. Rao, North-Holland, Amsterdam, 2001, 533–597.
- [16] В. Р. Фаталов, *УМН*, **58:4(352)** (2003), 89–134.
- [17] В. Р. Фаталов, *Матем. сб.*, **196:4** (2005), 135–160.
- [18] В. Р. Фаталов, *Пробл. передачи информ.*, **44:2** (2008), 75–95.
- [19] В. Р. Фаталов, *Пробл. передачи информ.*, **46:1** (2010), 68–93.
- [20] L. A. Khalfin, *Internat. J. Theor. Phys.*, **28:9** (1989), 1109–1123.

- [21] G. Molchan, A. V. Khokhlov, *J. Statist. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 923–946.
- [22] Я. Г. Синай, *УМН*, **52**:2(314) (1997), 119–138.
- [23] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [24] Т. Хида, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987.
- [25] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, Наука, М., 1971.
- [26] В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, Наука, М., 1985.
- [27] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [28] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [29] А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000.
- [30] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.

Поступила в редакцию 21.03.2012