Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Пронин, К. В. Степаньянц, Однопетлевые контрчлены в теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 137–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 07:51:28

© 1998 г.

П. И. Пронин*, К. В. Степаньянц†

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ КОНТРЧЛЕНЫ В ТЕОРИЯХ, РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ВЫСШИМИ КОВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Показано, что выражения для однопетлевых логарифмических расходимостей в произвольной модели теории поля, регуляризованной высшими ковариантными производными, согласуются с результатами вычислений при размерной регуляризации вне зависимости от конкретного вида регуляризующих членов. Таким образом, явно проверена самосогласованность метода на однопетлевом уровне. Приведены результаты вычислений для теории Янга–Миллса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наличие ультрафиолетовых (УФ) расходимостей является характерным свойством большинства моделей квантовой теории поля. При работе с расходящимися выражениями необходимо вначале сделать их конечными с использованием какой-либо регуляризации. Наиболее часто используется размерная регуляризация [1]. Однако для суперсимметричных и киральных теорий она не применима. Здесь было бы значительно удобнее использовать регуляризацию высшими ковариантными производными [2], поскольку с ее помощью, например, проще доказать отсутствие вклада высших петель в киральные аномалии. Поэтому было бы интересно применить данный метод для конкретных вычислений, т.к. до недавнего времени он использовался, как правило, только для формальных аргументов.

Первая попытка вычислить β -функцию теории Янга–Миллса с помощью регуляризации высшими производными была сделана в работе [3]. Результат оказался отличным от стандартного, что было истолковано авторами как несостоятельность метода. Однако вскоре было показано [4], что различие связано с сингулярным характером калибровки Ландау $\alpha = 0$. Вопрос о состоятельности метода был детально исследован в [5], где были предложены небольшие модификации исходной схемы для преодоления проблемы перекрывающихся расходимостей [6].

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: pronin@theor.phys.msu.su

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: stepan@theor.phys.msu.su

Однако до сих пор не было проведено конкретных вычислений, подтверждающих корректность метода, доказанную формально в [4, 5]. Поэтому мы решили явно найти вид контрчленов на однопетлевом уровне и проверить их согласие с известными результатами. Кроме того, выполнение данной программы могло бы стать исходной точкой для приложения метода к вычислениям в высших петлях.

В данной работе мы предлагаем способ вычисления фейнмановских диаграмм при использовании регуляризации высшими ковариантными производными и показываем, что результаты вычислений согласуются с хорошо известными выражениями для однопетлевых расходимостей в рамках размерной регуляризации [7, 8]. Установлено, что результаты не зависят от конкретной формы слагаемого, содержащего высшие производные. Таким образом, корректность метода явно подтверждается однопетлевыми вычислениями.

В разделе 2 дается краткий обзор применения метода высших ковариантных производных к теории Янга–Миллса. Затем в разделе 3 анализ обобщается на случай произвольной квантово-полевой модели в плоском пространстве и показывается, что результат вычислений логарифмических расходимостей согласуется со случаем размерной регуляризации с точностью до замены $1/\epsilon \rightarrow \ln \Lambda$. Здесь же найдены контрчлены для теории Янга–Миллса. Краткий обзор результатов дается в заключении. В приложении А явно проверено сокращение остаточных расходимостей при конечном Λ , а в приложении Б дан детальный анализ вычисления однопетлевых диаграмм.

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЫСШИМИ КОВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим теорию Янга–Миллса в плоском 4-мерном пространстве, описываемую действием

$$S_{\text{ЯМ}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = \frac{1}{4g^2} \text{tr} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = -ig F_{\mu\nu}^a t^a, \\ \text{tr}(t^a t^b) &= \delta^{ab}, \quad [t^a, t^b] = if^{abc} t^c, \\ D_\mu &= \partial_\mu + A_\mu. \end{aligned}$$

Здесь A_μ^a – калибровочное поле, g – константа связи, t^a – генераторы калибровочной группы, f^{abc} – структурные константы и D_μ – ковариантная производная.

К действию должны быть добавлены члены, фиксирующие калибровку, и духи Фаддеева–Попова

$$S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \bar{c}^a \partial_\mu (D^\mu c)^a.$$

Тогда производящий функционал принимает вид

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int DA D\bar{c} Dc \exp\{i(S + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + JA + \bar{c}\eta + \bar{\eta}c)\},$$

где

$$JA = \int d^4x J^{\mu a} A_{\mu}^a \quad \text{и т.п.}$$

Индекс расходимости для фейнмановской диаграммы с E_A внешними линиями калибровочного поля и E_c внешними духовыми линиями есть

$$\omega = 4 - E_A - \frac{3}{2}E_c$$

и не зависит от количества петель.

Добавим теперь к функции Лагранжа слагаемые, содержащие высшие степени ковариантных производных,

$$L \rightarrow L^{\Lambda} = \frac{1}{4g^2} \text{tr} \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^{2n}} F^{\mu\nu} D^{2n} F_{\mu\nu} \right)$$

с тем, чтобы получить в пропагаторе большие степени петлевого импульса.

В этом случае индекс расходимости, как несложно показать, будет иметь следующий вид:

$$\omega_{\Lambda} = 4 - 2n(L - 1) - E_A - \left(\frac{3}{2} + n \right) E_c,$$

где L — количество петель.

Таким образом, расходимости присутствуют только в однопетлевых диаграммах¹⁾, если $n \geq 2$. Для их регуляризации добавляются поля Паули–Вилларса (ПВ) с большими массами M_i . Рассмотрим это более подробно.

Для вычислений мы будем использовать метод фонового поля [9]. В соответствии с ним представим калибровочное поле как сумму классической и квантовой частей

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + B_{\mu},$$

где B_{μ} — квантовое поле, A_{μ} — классический фон.

В качестве калибровочного условия мы выбираем регуляризованную фоновую α -калибровку

$$S_{\text{gf}}^{\Lambda} = \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \left(\frac{1}{\Lambda^{2n}} (D^n D_{\mu} B^{a\mu})^2 + (D_{\mu} B^{a\mu})^2 \right),$$

где $D_{\mu} = D_{\mu}(A)$.

Тогда производящий функционал примет вид

$$Z[J] = \int DB \exp \{ i(S^{\Lambda}(A + B) + S_{\text{gf}}^{\Lambda} + JB) \} \det(D^2) \det^{1/2} \left(1 + \frac{D^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right).$$

¹⁾И, следовательно, пертурбативный вклад в аксиальную аномалию для киральных теорий дает только однопетлевое приближение.

Для регуляризации оставшихся однопетлевых расходимостей добавляются поля ПВ, так что

$$Z[J] = \int DB \exp\{i(S^\Lambda(A+B) + S_{\text{gf}}^\Lambda + JB)\} \det G^\Lambda \prod_i \det^{-a_i/2} D_{M_i}^\Lambda \det^{b_i} G_{m_i}^\Lambda, \quad (1)$$

где были введены обозначения

$$\begin{aligned} D_{ab}^{\Lambda\mu\nu} &= \frac{\delta^2 S^\Lambda}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b}, \\ D_{M_i}^{\Lambda\mu\nu} &= \frac{1}{\Lambda^{2n}} \frac{\delta^2 S_0^\Lambda}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} - g_{\mu\nu} \delta^{ab} M_i^2, \\ G^{\Lambda ab} &= \left(\left(1 + \frac{D^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right)^{1/2} G \right)^{ab}, \\ G_{m_i}^{\Lambda ab} &= \left(\left(1 + \frac{D^{2n}}{\Lambda^{2n}} \right)^{1/2} (G^\Lambda - m_i^2) \right)^{ab}, \end{aligned}$$

$G = D^2$ – духовый детерминант без регуляризации, а сам регуляризующий член обозначен через $S_0^\Lambda / \Lambda^{2n}$.

Коэффициенты a_i должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_i a_i &= -1, & \sum_i b_i &= -1, \\ \sum_i a_i M_i^2 &= 0, & \sum_i b_i m_i^2 &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу данных условий детерминанты с высшими производными для духовых полей в (1) полностью сокращаются и могут быть отброшены.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ

На однопетлевом уровне, используя (1), мы легко получаем расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия

$$\Gamma_\infty^{(1)} = \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left(D^\Lambda \prod_i (D_{M_i}^\Lambda)^{a_i} \right) - i \text{tr} \ln \left(G \prod_i (G_{m_i})^{b_i} \right). \quad (2)$$

В данном разделе мы явно вычислим логарифмически расходящуюся часть (2) и покажем, что она согласуется с известными результатами [7, 8]. Мы не будем ограничиваться только теорией Янга–Миллса, а рассмотрим наиболее общую полевую модель

с действием, зависящим от полей ϕ в плоском пространстве. При этом (2) также имеет место, если

$$\begin{aligned} D^\Lambda{}_I{}^J &= \frac{\delta^2 S^\Lambda}{\delta\phi^I \delta\phi_J}, \\ D^\Lambda{}_{M_i I}{}^J &= \frac{1}{\Lambda^{2n}} \frac{\delta^2 S_0^\Lambda}{\delta\phi^I \delta\phi_J} - \delta_I{}^J M_i^2, \\ G_{m_i}{}^{ij} &= G_i{}^{ij} - \delta_i{}^j m_i^2, \end{aligned}$$

где учтено сокращение духовых детерминантов с высшими производными. Заглавные буквы здесь относятся к полям ϕ , а строчные – к духовым полям.

Перейдем теперь к построению диаграммной техники. Явно выделяя в действии регуляризующее слагаемое в виде

$$S^\Lambda = S + \frac{1}{\Lambda^{2n}} S_0^\Lambda, \quad (3)$$

можно записать, что

$$D^\Lambda = D + \frac{1}{\Lambda^{2n}} D_0^\Lambda.$$

Наиболее общий вид дифференциальных операторов D и D_0^Λ есть

$$\begin{aligned} D_I{}^J &= K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L}{}_I{}^J \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-1}}{}_I{}^J \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} + \\ &+ W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-2}}{}_I{}^J \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} + N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-3}}{}_I{}^J \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} + \\ &+ M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-4}}{}_I{}^J \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots, \end{aligned}$$

где ∇_μ – ковариантная производная:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^\beta{}_I{}^J &= \partial_\alpha T^\beta{}_I{}^J + \omega_{\alpha I}{}^K T^\beta{}_K{}^J - T^\beta{}_I{}^K \omega_{\alpha K}{}^J, \\ \nabla_\mu \Phi_I &= \partial_\mu \Phi_I + \omega_{\mu I}{}^J \Phi_J, \end{aligned}$$

а $\omega_{\mu I}{}^J$ – связность в главном расслоении. В данной работе мы рассматриваем только случай плоского пространства.

Регуляризация высшими производными подразумевает, что $L^\Lambda > L + 4$, где L^Λ есть порядок операторов D^Λ и D_0^Λ , а L – порядок оператора D . Таким образом, согласно общему анализу, проведенному в [8], оставшиеся однопетлевые расходимости (до взятия предела $\Lambda \rightarrow 0$) определяются только формой регуляризующего слагаемого D_0^Λ и поэтому полностью сокращаются вкладом ПВ-полей. Это иллюстрируется в приложении А явным вычислением для теории Янга–Миллса.

Представим (2) как сумму однопетлевых диаграмм. Для этого выделим члены с максимальным количеством производных из D и D_0^Λ и воспользуемся разложением

$$\frac{i}{2} \text{tr} \ln D^\Lambda = \frac{i}{2} \text{tr} \ln ((K^\Lambda \partial) + V^\Lambda) = \frac{i}{2} \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{(K^\Lambda \partial)} V^\Lambda \right)^k,$$

где

$$K^\Lambda = \frac{1}{\Lambda^{2n}} K_0^\Lambda + K,$$

$$V^\Lambda \equiv D^\Lambda - (K^\Lambda \partial) = \frac{1}{\Lambda^{2n}} V_0^\Lambda + V,$$

а K_0^Λ получается из разложения регуляризующего слагаемого S_0 в (3).

Для ПВ-детерминантов соответствующее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln D_M^\Lambda &= \frac{i}{2} \operatorname{tr} \ln ((K_0^\Lambda \partial) / \Lambda^{2n} - M^2) + V^\Lambda = \\ &= \frac{i}{2} \operatorname{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{(K_0^\Lambda \partial) / \Lambda^{2n} - M^2} V^\Lambda \right)^k. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждой из диаграмм с обычными полями имеются соответствующие диаграммы с полями ПВ. Как мы упоминали выше, их сумма является конечной. Это явно проверено в приложении А. Результат интегрирования по петлевому импульсу, конечно, зависит от способа перехода к пределу $M \rightarrow \infty$, $\Lambda \rightarrow \infty$. Тем не менее ренормгрупповые функции от этого не зависят [3]. Поэтому мы будем использовать наиболее простое предписание $M_i / \Lambda = \theta_i = \text{const}$.

Здесь необходимо заметить, что при регуляризации высшими ковариантными производными (в отличие от размерной регуляризации) квадратично расходящиеся диаграммы дают нетривиальный вклад в эффективное действие. В данной работе мы не ставим своей задачей найти способ вычисления этих расходимостей. Поэтому мы ограничимся только проверкой того, что логарифмически расходящиеся члены воспроизводят известные результаты, полученные в рамках размерной регуляризации.

В приложении Б проведен анализ логарифмически расходящихся диаграмм и сформулировано следующее правило для вычисления контрчленов: необходимо удалить регуляризующие члены, разложить оставшееся выражение по степеням внешних импульсов и в нем произвести формальную замену

$$\int d^4 k \frac{1}{k^4} \rightarrow -2i\pi^2 \ln \Lambda.$$

Заметим, что практически то же самое правило было найдено для размерной регуляризации [10]. Единственное отличие заключается в том, что формальная замена в этом случае имеет вид

$$\int d^d k \frac{1}{k^4} \rightarrow -\frac{2i\pi^2}{d-4} \equiv -\frac{2i\pi^2}{\epsilon}.$$

В [8] данное правило было использовано для вычисления расходящейся части эффективного действия. Поэтому для регуляризации высшими ковариантными производными все вычисления можно считать выполненными и записать логарифмически расходящиеся слагаемые для теории произвольного вида. Например, если

$$D_i^j = \delta_i^j \square + S^\mu{}_i{}^j \nabla_\mu + W_i^j,$$

то

$$\Gamma_{\infty, \ln}^{(1)} = \ln \Lambda^2 \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{12} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} + \frac{1}{2} X^2 \right),$$

где

$$Y_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu S_\nu - \frac{1}{2} \nabla_\nu S_\mu + \frac{1}{4} S_\mu S_\nu - \frac{1}{4} S_\nu S_\mu + F_{\mu\nu},$$

$$X = W - \frac{1}{2} \nabla_\mu S^\mu - \frac{1}{4} S_\mu S^\mu.$$

Для более сложных случаев необходимо произвести замену $1/\epsilon$ на $\ln \Lambda$ в общих выражениях, полученных в [8].

Итак, логарифмически расходящаяся часть эффективного действия полностью совпадает с результатом ее вычислений в размерной регуляризации, что и доказывает самосогласованность метода высших ковариантных производных на однопетлевом уровне.

Конечно, необходимо заметить, что во всех наших рассуждениях мы предполагали $\alpha \neq 0$. Следовательно, согласно [4] полученный результат вполне согласуется с формальной теорией²⁾.

Теперь легко можно найти логарифмически расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия для теорий Янга–Миллса. Для этого наиболее удобно вычислить вторую вариацию нерегуляризованного действия и воспользоваться алгоритмами из [8] с учетом модификации, сформулированной выше.

Тогда для теории Янга–Миллса в α -калибровке мы получаем дифференциальный оператор

$$D_\alpha^\beta = \square \delta_\alpha^\beta - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \nabla_\alpha \nabla^\beta + 2F_\alpha^\beta,$$

а результат с учетом духового вклада принимает стандартный вид

$$\Gamma_{\infty, \ln}^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} \ln \Lambda^2 \frac{11}{3} C_1 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

и не зависит от калибровочного параметра.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы явно проверили самосогласованность метода регуляризации высшими ковариантными производными на однопетлевом уровне и его применимость для вычисления квантовых поправок. Для произвольного лагранжиана показано, что логарифмически расходящаяся часть эффективного действия совпадает с результатом, полученным в рамках размерной регуляризации с точностью до замены $1/\epsilon \rightarrow \ln \Lambda$.

Анализ структуры остаточных расхождений для теории Янга–Миллса после введения в действие слагаемых с высшими ковариантными производными продемонстрировал, что эти расхождения зависят от степени вводимых производных и сокращаются в конечном ответе за счет вкладов полей ПВ.

²⁾ В конечном результате уже можно делать переход к пределу $\alpha \rightarrow 0$.

Полученный результат не зависит от выбора регуляризующих членов и калибровочного условия (за исключением сингулярных калибровок), что находится в полном соответствии с результатами работ [4, 5].

Также следует заметить, что применение метода высших ковариантных производных позволяет вычислять квадратичные расходимости, структура которых в данной работе не изучалась.

В заключение мы хотели бы поблагодарить А. А. Славнова за многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе. Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. В. Асадову за финансовую поддержку исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисление расходящейся части регуляризованного детерминанта для теории Янга–Миллса

Сейчас мы хотим явно вычислить остаточные расходимости для теории Янга–Миллса и проверить их сокращение при добавлении в теорию полей ПВ.

Для простоты рассмотрим случай $n = 2$, что соответствует регуляризованному лагранжиану

$$L^\Lambda = \frac{1}{4g^2} \text{tr} \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} F^{\mu\nu} D^4 F_{\mu\nu} \right).$$

Разлагая действие в ряд по квантовым полям, приходим к следующему выражению для второй вариации действия:

$$\begin{aligned} B^{\alpha a} \delta^2 S^\Lambda B_{\beta b} = & -\frac{1}{2\Lambda^4} \left[(D^2(D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu) + (D_\alpha B_\alpha) F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} (D_\alpha B_\alpha) + \right. \\ & + 2B_\alpha (D_\alpha F_{\mu\nu}) - 2(D_\alpha F_{\mu\nu}) B_\alpha)_a^2 + (D^2 F_{\mu\nu})_a (B \delta^2 (D^2 F_{\mu\nu}))_a \left. \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[(D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu)_a^2 + 4F_{\mu\nu}^a (B_\mu B_\nu)_a \right]. \end{aligned}$$

После добавления слагаемых, фиксирующих калибровку в виде

$$L_{\text{gf}}^\Lambda = \frac{1}{\Lambda^4} (D^2 D_\mu B^{a\mu})^2 + (D_\mu B^{a\mu})^2,$$

и с учетом правил коммутации ковариантных производных вторая вариация действия приводится к минимальному оператору вида

$$\begin{aligned} D_i^j = & \delta_i^j \square^l + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-1}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-1}} + W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-2}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-2}} + \\ & + N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-3}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-3}} + M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2l-4}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \dots, \end{aligned}$$

где

$$l = 3,$$

$$S^{\mu\nu\gamma\delta\sigma} \alpha^\beta = 0,$$

$$W^{\mu\nu\gamma\delta} \alpha^\beta = g f^{acb} (g^{(\mu\nu} g^{\gamma\delta)}) F_{\alpha\beta}^c + 5 F_{\alpha}^c (\nu g^{\gamma\delta} g^{\mu\beta}) - 5 F_{\beta}^c (\nu g^{\gamma\delta} g^{\mu\alpha}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} \alpha^\beta = & g^2 f^{acd} f^{deb} (-2\delta_\alpha^\beta g^{\mu\nu} F_{\gamma\delta}^c F^{e\gamma\delta} - 4\delta_\alpha^\beta F^{c\mu}{}_\gamma F^{e\nu\gamma} + 2\delta_\alpha^\nu F^{c\beta}{}_\gamma F^{e\mu\gamma} - \\ & - \delta_\alpha^\mu g^{\beta\nu} F_{\gamma\delta}^c F^{e\gamma\delta} + 2F^{e\mu}{}_\alpha F^{c\beta\nu} - g^{\mu\nu} F_{\alpha\gamma}^e F^{c\beta\gamma}) + \Lambda^4 g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta \delta_a^b, \end{aligned}$$

круглые скобки в (4) обозначают симметризацию по индексам, находящимся между ними.

Вычисление остаточных расходимостей легко производится при помощи алгоритма, построенного в [8], и приводит к следующему результату:

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \left(-\frac{23}{4}g^2 C_1 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - 4\Lambda^4 N \right),$$

где

$$f^{acd}f^{bcd} = C_1 \delta^{ab},$$

а N – размерность калибровочной группы.

Кроме того, необходимо добавить сюда вклад духов Фаддеева–Попова, для которых

$$L_{\text{gh}} = \bar{c}^a (D^2 c)^a.$$

Этот вклад равен

$$\Gamma_{\infty, \text{gh}}^{(1)} = -2 \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \left(-\frac{1}{12}g^2 C_1 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \right),$$

а окончательный результат для остаточных расходимостей примет вид

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \left(-\frac{67}{12}g^2 C_1 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - 4\Lambda^4 N \right).$$

Заметим, что в (4) параметры исходного лагранжиана не входят в члены, определяющие расходимости, за исключением постоянного вклада в M_{α}^{β} . Поэтому данный вклад с точностью до постоянной, пропорциональной Λ^4 , компенсируется полями ПВ, для которых параметры в операторе имеют тот же самый вид, что и (4), за исключением

$$\begin{aligned} (M^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta})_{\text{ПВ}} = & g^2 f^{acd} f^{deb} (-2\delta_{\alpha}^{\beta} g^{\mu\nu} F_{\gamma\delta}^c F^{e\gamma\delta} - 4\delta_{\alpha}^{\beta} F^{c\mu}{}_{\gamma} F^{e\nu\gamma} + 2\delta_{\alpha}^{\nu} F^{c\beta}{}_{\gamma} F^{e\mu\gamma} - \\ & - \delta_{\alpha}^{\mu} g^{\beta\nu} F_{\gamma\delta}^c F^{e\gamma\delta} + 2F^{e\mu}{}_{\alpha} F^{c\beta\nu} - g^{\mu\nu} F_{\alpha\gamma}^e F^{c\beta\gamma}), \end{aligned}$$

а также

$$(W_a{}^b)_{\text{ПВ}} = \delta_a{}^b m_i^2$$

для духовых полей.

При повышении порядка регуляризующих членов Λ уйдет даже из M_{α}^{β} , в результате чего сокращение остаточных расходимостей в основном вкладе будет уже полным. Немного более сложно показать сокращение расходимостей в духовом вкладе. Для этого заметим, что в случае, когда лагранжиан духов имеет второй порядок по производным,

$$W_{\text{ПВ}} = W + \text{const} \cdot m_i^2,$$

и, следовательно, дополнительный вклад в эффективное действие будет состоять из постоянной, пропорциональной Λ^4 (из $(m_i^2)^2$), а также членов, сумма которых содержит множитель

$$\sum_i b_i m_i^2 = 0.$$

Таким образом, в данном случае сокращение остаточных расходимостей происходит с точностью до несущественной постоянной.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Примеры вычисления фейнмановских диаграмм

Рассмотрим выражения для фейнмановских диаграмм с учетом вклада полей ПВ:

$$\frac{i}{2} \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left(-\frac{1}{(K^\Lambda \partial)} V^\Lambda \right)^k + \sum_i a_i \left(-\frac{1}{(K_0^\Lambda \partial)/\Lambda^{2n} - \theta_i^2 \Lambda^2} V^\Lambda \right)^k \right\}.$$

Мы показали, что при конечном Λ данное выражение является УФ-конечным. Выделим теперь из этой суммы слагаемые, которые расходятся при $\Lambda = \infty$. Перейдем в них к импульсному представлению и разложим подынтегральное выражение по степеням внешнего импульса. В данной работе мы рассматриваем только члены с логарифмическими расходимостями по петлевому импульсу³⁾. При $\Lambda \neq \infty$ их суммарный вклад конечен в УФ-области. Однако расходимости присутствуют при малых импульсах. Они регуляризуются при помощи обрезания

$$\int_0^\infty dk \rightarrow \int_m^\infty dk.$$

В силу логарифмической расходимости при $\Lambda \rightarrow \infty$ и масштабной инвариантности результат вычисления диаграмм будет пропорционален $\ln(\Lambda/m)$. Таким образом, вместо того чтобы вычислять УФ-асимптотику, мы можем вычислить инфракрасную асимптотику, что значительно проще (конечно, необходимо сохранить только члены, расходящиеся при $m \rightarrow 0$). Действительно, при $k \rightarrow 0$ можно отбросить регуляризующие слагаемые, идущие из S_0^Λ при условии, что $n \geq 2$, т.к. тогда они значительно меньше вклада, идущего из исходного действия. ПВ-диаграммы в данном пределе вообще оказываются пропорциональными

$$\int d^4k \frac{1}{M^4}$$

и в члены порядка $\ln m$ никакого вклада не дают.

Таким образом, мы должны отбросить регуляризующее слагаемое, ПВ-диаграммы и вычислить асимптотику остающихся логарифмически расходящихся интегралов

$$\left(\int d^4k \frac{1}{k^4} \right)_{\text{reg}} = -2i\pi^2 \int_m^\infty dk \frac{1}{k} = 2i\pi^2 \ln m,$$

³⁾ Конечно, они могут возникать и из диаграмм с более чем логарифмической суммарной степенью расходимости, детальное обсуждение может быть найдено в [8].

где множитель $-i$ возникает при переходе от пространства Минковского к пространству Евклида. Конечно, обрезание по модулю импульса производится только после поворота Вика.

Учитывая, что результат пропорционален $\ln(\Lambda/m)$, мы приходим к правилу для получения логарифмически расходящихся контричленов: следует отбросить регуляризующее слагаемое и ПВ-диаграммы, разложить оставшееся выражение по степеням внешнего импульса и заменить оставшийся интеграл

$$\int d^4k \frac{1}{k^4} \quad \text{на} \quad -2i\pi^2 \ln \Lambda.$$

Конечно, это не значит, что члены с высшими производными или ПВ-поля здесь не-существенны, т.к. они обеспечили УФ-конечность суммы диаграмм, которая играла решающую роль при вычислениях. Отсутствие же зависимости результата от конкретной формы регуляризующего слагаемого вполне естественно и должно было ожидаться изначально.

Список литературы

- [1] *G. 't'Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 10. P. 189.
- [2] *A. A. Slavnov.* Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 301.
- [3] *C. P. Martin, F. Ruiz-Ruiz.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 645.
- [4] *M. Asorey, F. Falceto.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 5290.
- [5] *T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [6] *A. A. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [7] *G. 't'Hooft, M. Veltman.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 1974. V. 20. P. 69.
- [8] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 517.
- [9] *Б. С. ДеВитт.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [10] *П. И. Пронин, К. В. Степаньянц.* ТМФ. 1996. Т. 109. С. 215.

Поступила в редакцию 24.VI.1997 г.