Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Огиевецкий, Л. Пулэн д'Андеси, Индуктивный
подход к представлениям групп комплексных отраже-
ний $G(m, 1, n)$, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 109–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:58:26

© 2013 г. О. В. Огиевский^{*†}, Л. Пулэн д'Андеси^{*}

ИНДУКТИВНЫЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ГРУПП КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ $G(m, 1, n)$

Предложен индуктивный подход к теории представлений цепи групп комплексных отражений $G(m, 1, n)$. Элементы Юциса–Мэрфи группы $G(m, 1, n)$ получены из элементов Юциса–Мэрфи циклотомической алгебры Гекке; их общий спектр изучен с помощью представлений вырожденной аффинной циклотомической алгебры Гекке. Представления группы $G(m, 1, n)$ строятся с помощью новой ассоциативной алгебры на тензорном произведении группового кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и свободной ассоциативной алгебры, порожденной стандартными m -таблицами.

Ключевые слова: башни групп, группы отражений, алгебры Гекке, максимальные коммутативные подалгебры, диаграммы Юнга, таблицы Юнга.

DOI: 10.4213/tmf8343

1. ВВЕДЕНИЕ

Группы комплексных отражений – обобщения групп Кокстера; полный список неприводимых конечных групп комплексных отражений состоит из серии групп, обозначаемых $G(m, p, n)$, где m, p, n – натуральные числа такие, что p делит m , и из тридцати четырех исключительных групп [1]. Для всякой конечной группы комплексных отражений имеются аналоги алгебры Гекке и группы кос.

Алгебра Гекке группы $G(m, 1, n)$, которую мы обозначаем $H(m, 1, n)$, была введена в работах [2]–[4] и называется циклотомической алгеброй Гекке. При $m = 1$ это алгебра Гекке типа А, при $m = 2$ – алгебра Гекке типа В. Теория представлений алгебры $H(m, 1, n)$ была разработана в работе [2] (и в диссертации [5] для алгебры Гекке типа В). Индуктивный подход в духе Окунькова–Вершика [6] к теории представлений цепи (по n) алгебр $H(m, 1, n)$ был предложен в работе [7]. Настоящая работа посвящена индуктивному подходу в духе работы [6] к теории представлений цепи групп комплексных отражений $G(m, 1, n)$.

Мы строим представления группы $G(m, 1, n)$ с помощью некоторой ассоциативной алгебры, которая обозначается далее через $\mathfrak{T}$; как векторное пространство, $\mathfrak{T}$ – тензорное произведение группового кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и свободной алгебры, порожденной стандартными m -таблицами формы $\lambda^{(m)}$ для всех m -разбиений $\lambda^{(m)}$

^{*}Centre de Physique Théorique Campus de Luminy, Marseille, France.
E-mail: oleg.ogievetsky@gmail.com

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

числа n . Существование алгебры $\mathfrak{T}$ представляет самостоятельный интерес, и построение представлений, изложенное здесь, выглядит новым.

Теория представлений сплетений конечных групп с симметрическими группами хорошо известна [8] (см. также книги [9], [10]); в работе [11] предложен индуктивный подход. Группа $G(m, 1, n)$ – сплетение циклической группы C_m с симметрической группой S_n , и ее теория представлений, таким образом, известна (для групп Кокстера типа B , т. е. для групп $G(2, 1, n)$, теория представлений была разработана в работе [12]). Цепь групп $G(m, 1, n)$ – простейший пример цепи сплетений $A \wr S_n$ с простым ветвлением. Ветвление цепи сплетений $A \wr S_n$, где A – конечная группа, просто, если и только если группа A абелева.

Кроме того, теория представлений $G(m, 1, n)$ может быть непосредственно выведена из теории представлений алгебры $H(m, 1, n)$ взятием пределов

$$v_i \rightarrow \xi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad q \rightarrow \pm 1 \quad (1)$$

в формулах (см., например, работу [7]) для матричных элементов образующих алгебры $H(m, 1, n)$; здесь $\{\xi_i, i = 1, \dots, m\}$ – множество различных корней степени m из единицы. Параметры $q, v_1, \dots, v_m$ входят в определение циклотомической алгебры Гекке следующим образом: алгебра $H(m, 1, n)$ порождается элементами $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & i, j &= 1, \dots, n-1, \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i^2 &= (q - q^{-1}) \sigma_i + 1, & i &= 1, \dots, n-1, \\ \tau \sigma_1 \tau \sigma_1 &= \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau, \\ \tau \sigma_i &= \sigma_i \tau, & i &> 1, \\ (\tau - v_1) \dots (\tau - v_m) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Переходя к пределу (1) в определяющих отношениях (2), мы получаем стандартное копредставление группы $G(m, 1, n)$ (см. формулы (4), (5) в разделе 2; образующие $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ алгебры $H(m, 1, n)$ стремятся соответственно к $t, s_1, \dots, s_{n-1}$ в классическом пределе).

Представляет интерес независимая разработка индуктивного подхода к теории представлений групп $G(m, 1, n)$. Подчеркнем, что наши подходы к группам $G(m, 1, n)$ и к алгебрам $H(m, 1, n)$ параллельны. В частности, доказательства “классических” утверждений проводятся по той же схеме, что и доказательства аналогичных утверждений в q -деформированной ситуации, что позволяет нам сэкономить место, опуская, в основном, доказательства. Работа [13] содержит соответствующие определения и результаты об $H(m, 1, n)$. Кроме того, важные объекты – такие, как элементы Юиса–Мэрфи (ЮМ) и сплетающие операторы – могут быть получены с помощью классического предела; мы описываем необходимые предельные процедуры. Как мы увидим, при переходе к классической “групповой” ситуации возникают определенные тонкости (следует быть осторожным с порядком взятия пределов и т.д.). Как это часто бывает, классическая ситуация сложнее, чем квантовая.

Индуктивный подход к теории представлений алгебр Гекке $H(m, 1, n)$ использует для всех m изучение представлений одной и той же аффинной алгебры Гекке типа A . Оказывается, что в классическом пределе в роли классического аналога

аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_n$ выступает версия вырожденной циклотомической аффинной алгебры Гекке, которую мы обозначаем через $\mathfrak{A}_{m,n}$. Алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$ для всех $m = 1, 2, \dots$ могут быть получены с помощью определенной предельной процедуры из одной и той же аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_n$. Важный инструмент в нашем подходе – сюръективный морфизм $\mathfrak{A}_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}G(m, 1, n)$, служащий классическим аналогом сюръективного морфизма из $\hat{H}_n$ в $H(m, 1, n)$. Возникающие алгебры и соотношения между ними можно проиллюстрировать следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}_n & \longrightarrow & H(m, 1, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{A}_{m,n} & \longrightarrow & \mathbb{C}G(m, 1, n). \end{array} \quad (3)$$

Здесь горизонтальные стрелки – сюръективные морфизмы, а столбцы соответствуют предельным переходам.

Наш подход начинается с описания классических элементов ЮМ группы $G(m, 1, n)$ (мы объясняем, как они могут быть получены как классические пределы выражений, связанных с элементами ЮМ алгебры $H(m, 1, n)$; аналогичный процесс используется в работе [14] для групп Вейля). Элементы ЮМ были определены в работах [11], [15] для сплетения любой конечной группы A с симметрической группой. Элементы ЮМ, полученные с помощью предельного перехода, совпадают с элементами из работ [11], [15], когда в качестве A выбирается циклическая группа. Как и в невырожденной ситуации, элементы ЮМ служат основным инструментом при построении теории представлений.

Мы показываем, что элементы ЮМ группы $G(m, 1, n)$ суть образы “универсальных” элементов ЮМ, живущих в алгебре $\mathfrak{A}_{m,n}$. Мы проверяем на классическом уровне коммутативность двойного набора $\{x_1, \tilde{x}_1, \dots, x_n, \tilde{x}_n\}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$. Алгебра $\mathfrak{A}_{m,n}$ – частный случай сплетенной алгебры Гекке, определенной в работе [16] (см. также работу [17]). Мы не включаем коммутативность набора $\{x_1, \tilde{x}_1, \dots, x_n, \tilde{x}_n\}$ в список определяющих соотношений алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$ в отличие от алгебры из работы [16]; в силу доказанных здесь результатов две алгебры на самом деле изоморфны.

Теория представлений алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$ – простейшей нетривиальной вырожденной аффинной циклотомической алгебры Гекке – несет важную информацию о рекуррентных свойствах элементов ЮМ группы $G(m, 1, n)$. Мы приводим список неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$ с диагонализруемыми $x_1, \tilde{x}_1, x_2$ и $\tilde{x}_2$ и затем используем его для изучения спектра элементов ЮМ. В частности, мы характеризуем множества общих собственных значений элементов ЮМ группы $G(m, 1, n)$ и устанавливаем их взаимосвязи с m -разбиениями и m -таблицами. После построения представлений группы $G(m, 1, n)$ мы проверяем, подсчитывая размерности, что все неприводимые представления получаются в рамках этого подхода.

Представления $G(m, 1, n)$, построенные с помощью алгебры $\mathfrak{T}$ (тензорного произведения алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и свободной ассоциативной алгебры, порожденной стандартными m -таблицами, соответствующими m -разбиениям числа n), суть аналоги, для $G(m, 1, n)$, полунормальных представлений симметрической группы. Мы определяем инвариантное эрмитово скалярное произведение в пространствах представлений и описываем аналоги ортогональных представлений симметрической группы.

Опишем кратко содержание настоящей работы. В разделе 2 мы напоминаем стандартное представление группы комплексных отражений $G(m, 1, n)$ и определяем с помощью предельной процедуры элементы ЮМ кольца $CG(m, 1, n)$. В разделе 3 мы описываем вырожденную циклотомическую аффинную алгебру Гекке $\mathfrak{A}_{m,n}$ и показываем, что элементы ЮМ группы $G(m, 1, n)$ суть образы “универсальных” элементов ЮМ, живущих в $\mathfrak{A}_{m,n}$. В разделе 4 изучается спектр элементов ЮМ группы $G(m, 1, n)$ и устанавливается связь со стандартными m -таблицами. Представления группы $G(m, 1, n)$ строятся в разделе 5 с помощью алгебры $\mathfrak{T}$. Изучение теории представлений группы $G(m, 1, n)$ завершается в разделе 6, который содержит результат о полноте и некоторые следствия. В приложении изучаются сплетающие операторы (введенные в работе [16]) в вырожденной циклотомической аффинной алгебре Гекке, которые дают некоторую информацию о спектре элементов ЮМ. Мы объясняем, как получить эти сплетающие операторы с помощью классического предела соответствующих сплетающих операторов невырожденной аффинной алгебры Гекке.

В настоящей работе основное поле – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Спектр оператора T обозначается $\text{Spec}(T)$. Для двух целых чисел $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$, обозначим через $[k, l]$ множество целых чисел $\{k, k+1, \dots, l-1, l\}$.

2. ГРУППЫ КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ $G(m, 1, n)$ И ЭЛЕМЕНТЫ ЮЦИСА–МЭРФИ

Группа $G(m, 1, n)$ порождается элементами $t, s_1, \dots, s_{n-1}$ с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ s_i s_j &= s_j s_i, & i, j &= 1, \dots, n-1, \quad |i-j| > 1, \\ s_i^2 &= 1, & i &= 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$ts_1 ts_1 = s_1 ts_1 t, \quad ts_i = s_i t, \quad i > 1, \quad t^m = 1. \quad (5)$$

Группа $G(m, 1, n)$ изоморфна группе $C_m \wr S_n$, сплетению циклической группы из m элементов C_m с симметрической группой S_n . Порядок группы $G(m, 1, n)$ равен $m^n n!$. Подгруппа группы $G(m, 1, n)$, порожденная элементами $s_1, \dots, s_{n-1}$, изоморфна симметрической группе S_n .

Напомним, что элементы ЮМ J_i в $H(m, 1, n)$ определяются начальным условием $J_1 = \tau$ и рекурсией $J_{i+1} = \sigma_i J_i \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Определим следующие классические аналоги элементов J_i :

$$j_i := \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{v_i \rightarrow \xi_i} J_i, \quad (6)$$

$$\tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{v_i \rightarrow \xi_i} \frac{J_i^m - 1}{q - q^{-1}}. \quad (7)$$

Внимание: здесь важен порядок взятия пределов – сначала мы переходим к пределу по параметрам v_i , а затем – по параметру q ; может быть, более поучительно записать определение (7) в виде

$$\tilde{j}_i := \frac{1}{m} \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{v_i \rightarrow \xi_i} \frac{(J_i^m - 1)}{q - q^{-1}}.$$

3. ВЫРОЖДЕННАЯ ЦИКЛОТОМИЧЕСКАЯ АФФИННАЯ АЛГЕБРА ГЕККЕ

Элементы ЮМ циклотомической алгебры Гекке $H(m, 1, n)$ – образы “универсальных” элементов ЮМ аффинной алгебры Гекке. Похожим образом элементы j_i и $\tilde{j}_i$ суть образы некоторых элементов “универсальной” вырожденной циклотомической аффинной алгебры Гекке, которую мы сейчас опишем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $\mathfrak{A}_{m,n}$ алгебру, порожденную элементами $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$ и еще двумя элементами, x_1 и $\tilde{x}_1$; определяющие соотношения введем в три этапа. Во-первых, имеются соотношения между образующими $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1} \bar{s}_i &= \bar{s}_{i+1} \bar{s}_i \bar{s}_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \\ \bar{s}_i \bar{s}_j &= \bar{s}_j \bar{s}_i, & i, j &= 1, \dots, n-1, \quad |i-j| > 1, \\ \bar{s}_i^2 &= 1, & i &= 1, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (8)$$

во-вторых, есть соотношения, связанные с добавлением образующей x_1 :

$$x_1 \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 = \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 x_1, \quad x_1 \bar{s}_i = \bar{s}_i x_1, \quad i > 1, \quad x_1^m = 1; \quad (9)$$

третья группа отношений связана с добавлением последней образующей $\tilde{x}_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 \left(\bar{s}_1 \tilde{x}_1 \bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p \bar{s}_1 x_1^{-p} \right) &= \left(\bar{s}_1 \tilde{x}_1 \bar{s}_1 + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_1^p \bar{s}_1 x_1^{-p} \right) \tilde{x}_1, \\ \tilde{x}_1 \bar{s}_i &= \bar{s}_i \tilde{x}_1, \quad i > 1, \quad \tilde{x}_1 x_1 = x_1 \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 = \bar{s}_1 x_1 \bar{s}_1 \tilde{x}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Алгебру $\mathfrak{A}_{m,n}$ мы будем называть *вырожденной циклотомической аффинной алгеброй Гекке*.

Благодаря соотношениям (8), (9) имеется гомоморфизм

$$\hat{\iota}: \mathbb{C}G(m, 1, n) \rightarrow \mathfrak{A}_{m,n}, \quad \hat{\iota}(s_i) = \bar{s}_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \hat{\iota}(t) = x_1. \quad (11)$$

Зададим отображение π из множества образующих $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}, x_1, \tilde{x}_1\}$ в $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ по правилу

$$\pi: \bar{s}_i \mapsto s_i \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x_1 \mapsto t, \quad \tilde{x}_1 \mapsto 0. \quad (12)$$

Ясно, что π продолжается до гомоморфизма, который мы обозначим тем же символом π , из алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$ в $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ (гомоморфизм π определен корректно, так как соотношения (10) тривиально выполнены для $\tilde{x}_1$, равного нулю). Кроме того, композиция $\pi \circ \hat{\iota}$ оставляет на месте образующие группы $G(m, 1, n)$, поэтому $\pi \circ \hat{\iota}$ совпадает с тождественным гомоморфизмом алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$; в частности, отображение $\hat{\iota}$ инъективно или, что эквивалентно, подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$, порожденная элементами $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}$ и x_1 , изоморфна алгебре $\mathbb{C}G(m, 1, n)$.

Определим “высшие” элементы x_i и $\tilde{x}_i$, $i = 2, \dots, n$, формулами

$$x_{i+1} = \bar{s}_i x_i \bar{s}_i, \quad \tilde{x}_{i+1} = \bar{s}_i \tilde{x}_i \bar{s}_i + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x_i^p \bar{s}_i x_i^{-p}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

Первое из соотношений (9) и первое и четвертое из соотношений (10) могут быть переписаны соответственно в виде

$$x_1 x_2 = x_2 x_1, \quad \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2 \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 x_2 = x_2 \tilde{x}_1. \quad (14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеем*

$$\pi(x_i) = j_i, \quad \pi(\tilde{x}_i) = \tilde{j}_i. \quad (15)$$

Поскольку элементы ЮМ J_i коммутируют в алгебре $H(m, 1, n)$, из определений (6) и (7) следует, что элементы j_i , $i = 1, \dots, n$, и элементы $\tilde{j}_i$, $i = 1, \dots, n$, вместе образуют коммутативное множество. Мы не включили коммутативность соответствующего множества, состоящего из элементов x_i , $i = 1, \dots, n$, и элементов $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, в набор определяющих соотношений алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$: коммутативность этого множества (и, следовательно, по предложению 1, его образа при отображении π , т. е. множества, состоящего из элементов j_i , $i = 1, \dots, n$, и $\tilde{j}_i$, $i = 1, \dots, n$) следует, как мы сейчас увидим, из соотношений (8)–(10).

ЛЕММА 1. *Из соотношений (8)–(10) следует, что x_i и $\tilde{x}_i$ коммутируют с $\bar{s}_k$ при $k > i$ или $k < i - 1$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Из соотношений (8)–(10) следует, что*

$$x_k x_l = x_l x_k, \quad \tilde{x}_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l \tilde{x}_k, \quad x_k \tilde{x}_l = \tilde{x}_l x_k \quad (16)$$

для всех $k, l = 1, \dots, n$.

4. СПЕКТР ЭЛЕМЕНТОВ ЮМ

4.1. Представления алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$. Важный шаг в понимании спектра элементов ЮМ и в построении представлений заключается в анализе представлений наименьшей нетривиальной вырожденной циклотомической аффинной алгебры Гекке $\mathfrak{A}_{m,2}$. Здесь мы приводим список неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$, для которых $x_1, \tilde{x}_1, x_2$ и $\tilde{x}_2$ диагонализуются.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_{m,2}$, порожденную элементами $x, y, \tilde{x}, \tilde{y}$ и s с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} xy = yx, \quad \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{y}\tilde{x}, \quad x\tilde{x} = \tilde{x}x, \quad y\tilde{y} = \tilde{y}y, \\ y = sxs, \quad x^m = 1, \quad \tilde{y} = s\tilde{x}s + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m x^p s x^{m-p}, \quad s^2 = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Для всех $i = 1, \dots, n - 1$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$, порожденная $j_i, j_{i+1}, \tilde{j}_i, \tilde{j}_{i+1}$ и s_i , есть фактор-алгебра алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$. При $m = 1$ алгебра $\mathfrak{A}_{m,2}$ – вырожденная аффинная алгебра Гекке, используемая в работе [6] для теории представлений симметрических групп S_n .

Четыре элемента $x, y, \tilde{x}$ и $\tilde{y}$ попарно коммутируют (см. предложение 2). Изучая неприводимые представления алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$ с диагонализруемыми $x, y, \tilde{x}$ и $\tilde{y}$, мы получаем следующую классификацию.

- Одномерные представления. Действие образующих задается формулами

$$x \mapsto a, \quad y \mapsto a, \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{a}, \quad \tilde{y} \mapsto \tilde{a} + \epsilon, \quad s \mapsto \epsilon, \quad (18)$$

где $a^m = 1$ и $\epsilon^2 = 1$.

• Два типа двумерных представлений. Матрицы образующих алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$ для представлений первого типа имеют вид

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $a^m = b^m = 1$ и $a \neq b$. Для второго типа представлений матрицы образующих алгебры $\mathfrak{A}_{m,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} s &\mapsto \begin{pmatrix} (\tilde{b} - \tilde{a})^{-1} & 1 - (\tilde{b} - \tilde{a})^{-2} \\ 1 & -(\tilde{b} - \tilde{a})^{-1} \end{pmatrix}, & x, y &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ \tilde{x} &\mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}, & \tilde{y} &\mapsto \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $a^m = 1$ и $\tilde{b} \neq \tilde{a}$. Представление (20) неприводимо, если и только если $\tilde{b} \neq \tilde{a} \pm 1$.

4.2. Классический спектр. Мы начнем с построения представлений кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$, удовлетворяющих двум условиям. Во-первых, классические элементы ЮМ $j_1, \dots, j_n, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n$ представлены полупростыми (диагонализуемыми) операторами. Во-вторых, для каждого $i = 1, \dots, n-1$ действие подалгебры, порожденной $j_i, j_{i+1}, \tilde{j}_i, \tilde{j}_{i+1}$ и s_i , вполне приводимо. Мы будем называть такие представления C -представлениями (C – первая буква в “completely reducible”). В конце мы увидим, что все неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ оказываются C -представлениями.

Обозначим через $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ множество общих собственных значений элементов $j_1, \tilde{j}_1, \dots, j_n, \tilde{j}_n$ в C -представлениях:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^{(\Lambda)}, & \dots, & a_n^{(\Lambda)} \\ \tilde{a}_1^{(\Lambda)}, & \dots, & \tilde{a}_n^{(\Lambda)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

принадлежит $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{pmatrix}$, если в пространстве некоторого C -представления существует вектор e_Λ такой, что $j_i(e_\Lambda) = a_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ и $\tilde{j}_i(e_\Lambda) = \tilde{a}_i^{(\Lambda)} e_\Lambda$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Элементы j_i и $\tilde{j}_i$ коммутируют с s_k при $k > i$ или $k < i-1$ (см. лемму 1), откуда следует, что действие элемента s_k на $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{pmatrix}$ “локально” в том смысле, что $s_k(e_\Lambda)$ равно линейной комбинации векторов $e_{\Lambda'}$ таких, что $a_i^{(\Lambda')} = a_i^{(\Lambda)}$ и $\tilde{a}_i^{(\Lambda')} = \tilde{a}_i^{(\Lambda)}$ при $i \neq k, k+1$.

Будем называть $(2 \times n)$ -массивы (21) строками, сохраняя название “строка”, использующееся для набора общих собственных значений элементов ЮМ алгебры $H(m, 1, n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_i, & a_{i+1}, & \dots, & a_n \\ \tilde{a}_1, & \dots, & \tilde{a}_i, & \tilde{a}_{i+1}, & \dots, & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, & \dots, & j_n \\ \tilde{j}_1, & \dots, & \tilde{j}_n \end{pmatrix}$$

и e_Λ – соответствующий вектор. Тогда:

- 1) $a_i^m = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$; если $a_i = a_{i+1}$, то $\tilde{a}_i \neq \tilde{a}_{i+1}$;

- 2) если $a_{i+1} = a_i$ и $\tilde{a}_{i+1} = \tilde{a}_i + \epsilon$, где $\epsilon = \pm 1$, то $s_i(e_\Lambda) = \epsilon e_\Lambda$;
 3) если $a_{i+1} \neq a_i$ или $a_{i+1} = a_i$ & $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, то

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_{i+1}, & a_i, & \dots, & a_n \\ \tilde{a}_1, & \dots, & \tilde{a}_{i+1}, & \tilde{a}_i, & \dots, & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \in \text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, & \dots, & j_n \\ \tilde{j}_1, & \dots, & \tilde{j}_n \end{pmatrix}.$$

Кроме того, если $a_{i+1} \neq a_i$, то вектор $s_i(e_\Lambda)$ соответствует строке Λ' (см. матрицы (19) при $a = a_i$, $b = a_{i+1}$, $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ и $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$); если $a_{i+1} = a_i$ и $\tilde{a}_{i+1} \neq \tilde{a}_i \pm 1$, то вектор $s_i(e_\Lambda) - e_\Lambda / (\tilde{a}_{i+1} - \tilde{a}_i)$ соответствует строке Λ' (см. матрицы (20) при $a = a_i = a_{i+1}$, $\tilde{a} = \tilde{a}_i$ и $\tilde{b} = \tilde{a}_{i+1}$).

4.3. Классические строки содержаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Классическая строка содержаний $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ есть строка колонок чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\tilde{a}_1 = 0$ и $a_i^n = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- 2) для $j > 1$: если $\tilde{a}_j \neq 0$, то найдется $i < j$ такое, что $a_i = a_j$ и $\tilde{a}_i \in \{\tilde{a}_j - 1, \tilde{a}_j + 1\}$;
- 3) если $a_j = a_k$ и $\tilde{a}_j = \tilde{a}_k$ для $j, k, j < k$, то найдутся $i_1, i_2 \in [j + 1, k - 1]$ такие, что $a_{i_1} = a_{i_2} = a_j = a_k$, $\tilde{a}_{i_1} = \tilde{a}_j - 1$ и $\tilde{a}_{i_2} = \tilde{a}_j + 1$.

Обозначим через $\text{cCont}_m(n)$ множество классических строк содержаний.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Предположим, что строка колонок чисел $\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \end{pmatrix}$ принадлежит множеству $\text{Spec} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{pmatrix}$. Тогда она принадлежит множеству $\text{cCont}_m(n)$.

4.4. Классическое содержание клетки в m -диаграмме Юнга. Напомним, что m -диаграммой Юнга, или m -разбиением, называется набор из m диаграмм Юнга $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Размер $|\lambda|$ диаграммы Юнга λ есть число клеток диаграммы. Размером m -диаграммы $\lambda^{(m)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ называется число $|\lambda^{(m)}| := |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m|$.

Пусть размер m -диаграммы равен n . Разместим числа $1, \dots, n$ в клетках этих диаграмм таким образом, что в каждой диаграмме числа в клетках идут в порядке возрастания по строкам и столбцам в направлениях вправо и вниз. Это стандартная m -таблица Юнга формы $\lambda^{(m)}$.

Классическим содержанием клетки, лежащей в r -й строке и s -м столбце диаграммы Юнга, называется число $(s - r)$. Чтобы дать соответствующее определение для m -диаграмм Юнга, мы должны указать, в какой из диаграмм m -диаграммы лежит данная клетка; таким образом, содержание клетки m -диаграммы Юнга – пара чисел: первое число указывает диаграмму (в которой лежит клетка) в m -диаграмме, а второе равно содержанию клетки в указанной диаграмме. Чтобы связать эту информацию со спектрами элементов ЮМ, выберем (произвольно) взаимно однозначное соответствие между множеством $\{1, \dots, m\}$ и множеством различных корней степени m из единицы. Обозначим через ξ_k корень из единицы, отвечающий номеру $k \in \{1, \dots, m\}$ при этой биекции. Определим классическое содержание клетки, которая находится в r -й строке и s -м столбце k -й диаграммы в m -диаграмме, колонкой $\begin{pmatrix} \xi_k \\ s-r \end{pmatrix}$.

Стандартной m -таблице Юнга размера n сопоставим строку колонок чисел

$$\begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_n \\ \tilde{a}_1, & \dots, & \tilde{a}_n \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} a_i \\ \bar{a}_i \end{pmatrix}$ – классическое содержание клетки m -таблицы, в которой находится число i . Это сопоставление приводит к биекции, сформулированной в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Множество стандартных m -таблиц Юнга размера n находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\text{cCont}_m(n)$.*

Вот пример стандартной 2-таблицы Юнга с $n = 10$:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 10 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Этой стандартной 2-таблице Юнга отвечает строка

$$\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_1, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_1, & \xi_2 \\ 0, & 1, & 0, & 2, & -1, & -1, & -2, & 1, & 0, & 2 \end{pmatrix},$$

где $\{\xi_1, \xi_2\}$ – множество различных квадратных корней из единицы.

5. ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В настоящем разделе мы описываем аналог (на классическом уровне) конструкции [7], [13] представлений алгебры $H(m, 1, n)$: мы определяем структуру алгебры на тензорном произведении алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и свободной ассоциативной алгебры, порожденной стандартными m -таблицами, отвечающими m -разбиениям числа n . Далее, используя (справа) простейшее одномерное представление группы $G(m, 1, n)$, мы строим представления.

5.1. Произведение алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и свободной ассоциативной алгебры, порожденной стандартными m -таблицами, отвечающими m -разбиениям числа n . Пусть $\lambda^{(m)}$ – m -разбиение числа n . Рассмотрим множество свободных образующих, помеченных стандартными m -таблицами формы $\lambda^{(m)}$, и обозначим через $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ образующую, соответствующую стандартной m -таблице $X_{\lambda^{(m)}}$.

Будем обозначать через $\begin{pmatrix} p(X_{\lambda^{(m)}}|i) \\ c(X_{\lambda^{(m)}}|i) \end{pmatrix}$ колонку содержания клетки, в которой находится число i , стандартной m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$.

Для любой m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ и любой перестановки $\pi \in S_n$ определим $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ как m -таблицу, полученную из m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ применением перестановки π к числам, расположенным в клетках m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$; например, $X_{\lambda^{(m)}}^{s_i}$ получается из m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ перестановкой чисел i и $(i + 1)$ в m -таблице $X_{\lambda^{(m)}}$.

Для стандартной m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ m -таблица $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ не обязательно стандартна. Что касается образующих свободной алгебры, мы используем символ $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi$ для образующей, отвечающей m -таблице $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$, если m -таблица $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ стандартна. Если m -таблица $X_{\lambda^{(m)}}^\pi$ нестандартна, положим $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^\pi = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Соотношения*

$$(t - p(X_{\lambda^{(m)}}|1)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = 0, \quad (22)$$

$$s_i \cdot \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}} = \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}^{s_i} \cdot s_i \quad (23)$$

при $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ и

$$\begin{aligned} & \left(s_i + \frac{1}{c(X_{\lambda(m)}|i) - c(X_{\lambda(m)}|i+1)} \right) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = \\ & = \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \cdot \left(s_i + \frac{1}{c(X_{\lambda(m)}|i+1) - c(X_{\lambda(m)}|i)} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

при $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+1)$ совместны с определяющими соотношениями для образующих $t, s_1, \dots, s_{n-1}$ группы $G(m, 1, n)$.

Поясним смысл слова “совместны” в формулировке предложения. Пусть $\mathcal{F}$ – свободная ассоциативная алгебра, порожденная $\tilde{t}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1}$. Группа $G(m, 1, n)$ – естественная фактор-группа группы $\mathcal{F}$. Пусть также $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ – свободная ассоциативная алгебра с образующими $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$, отвечающими всем стандартным m -таблицам формы $\lambda^{(m)}$ для всех m -разбиений $\lambda^{(m)}$ числа n .

Рассмотрим структуру алгебры на пространстве $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$, для которой: 1) отображение $\iota_1: x \mapsto x \otimes 1$, $x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$, – изоморфизм пространства $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ с его образом относительно ι_1 ; 2) отображение $\iota_2: \phi \mapsto 1 \otimes \phi$, $\phi \in \mathcal{F}$, – изоморфизм пространства $\mathcal{F}$ с его образом относительно ι_2 ; 3) формулы (22)–(24), продолженные по ассоциативности, обеспечивают правила переписывания элементов вида $(1 \otimes \phi)(x \otimes 1)$, где $x \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ и $\phi \in \mathcal{F}$, в виде элементов из $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathcal{F}$.

Совместность означает, что мы получаем индуцированную структуру ассоциативной алгебры на пространстве $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathbb{C}G(m, 1, n)$. Точнее, если мы умножим любое определяющее соотношение кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ (соотношение рассматривается как элемент свободной алгебры $\mathcal{F}$) справа на образующую $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ (это выражение вида “соотношение кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$, умноженное на $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ ”) и используем “инструкции” (22)–(24), чтобы переместить все появляющиеся $\mathcal{X}$ влево (свободная образующая изменится, но выражение всегда остается линейным по $\mathcal{X}$), то мы получим линейную комбинацию выражений вида “ $\mathcal{X}_{\lambda(m)}^\pi$, $\pi \in S_n$, умноженное на соотношение кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ ”.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ полученную алгебру.

Оказывается, что произведение любого элемента ЮМ на свободную образующую $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ пропорционально $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$; коэффициенты пропорциональности определяются колонками содержания клеток.

ЛЕММА 2. Из соотношений (22)–(24) следует, что

$$(j_i - p(X_{\lambda(m)}|i)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n, \quad (25)$$

$$(\tilde{j}_i - c(X_{\lambda(m)}|i)) \cdot \mathcal{X}_{\lambda(m)} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

5.2. Представления. Предложение 6 – удобный инструмент для построения представлений группы $G(m, 1, n)$.

Пусть $|\rangle$ – “вакуум”, т. е. базисный вектор одномерного $G(m, 1, n)$ -модуля; например, $s_i|\rangle = |\rangle$ и $t|\rangle = \xi_1|\rangle$. Перемещая в выражениях $\phi\mathcal{X}_{\lambda(m)}|\rangle$, $\phi \in \mathbb{C}G(m, 1, n)$, элементы $\mathcal{X}$ влево и используя структуру модуля, мы благодаря совместимости строим представление кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ в векторном пространстве $U_{\lambda(m)}$ с базисом $\mathcal{X}_{\lambda(m)}|\rangle$. Допуская некоторую вольность, обозначим $\mathcal{X}_{\lambda(m)}|\rangle$ просто через $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$. Эта процедура приводит к следующим формулам для действия образующих $t, s_1, \dots, s_{n-1}$ на

базисные векторы $\mathcal{X}_{\lambda(m)}$ пространства $U_{\lambda(m)}$:

$$t: \mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto p(X_{\lambda(m)}|1)\mathcal{X}_{\lambda(m)} \quad (27)$$

и

$$s_i: \mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \quad (28)$$

при $p(X_{\lambda(m)}|i) \neq p(X_{\lambda(m)}|i+1)$,

$$s_i: \mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto \frac{1}{c(X_{\lambda(m)}|i+1) - c(X_{\lambda(m)}|i)} \mathcal{X}_{\lambda(m)} + \left(1 + \frac{1}{c(X_{\lambda(m)}|i+1) - c(X_{\lambda(m)}|i)}\right) \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} \quad (29)$$

при $p(X_{\lambda(m)}|i) = p(X_{\lambda(m)}|i+1)$.

Как и ранее, мы считаем, что $\mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i} = 0$, если m -таблица $X_{\lambda(m)}^{s_i}$ нестандартна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Построенные представления не зависят (с точностью до изоморфизма) от значения образующих $s_1, \dots, s_{n-1}$ и t на вакууме $|\rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В приложении мы изучаем классические сплетающие операторы $\tilde{u}_{i+1} := \tilde{s}_i \tilde{x}_i - \tilde{x}_i \tilde{s}_i \in \mathfrak{A}_{m,n}$, $i = 1, \dots, n-1$. При отображении π , определенном формулой (12), элемент $\tilde{u}_{i+1}$ переходит в $\pi(\tilde{u}_{i+1}) = s_i \tilde{j}_i - \tilde{j}_i s_i \in CG(m, 1, n)$, $i = 1, \dots, n-1$. Действие элемента $\pi(\tilde{u}_{i+1})$ в представлении $V_{\lambda(m)}$ имеет вид

$$\mathcal{X}_{\lambda(m)} \mapsto (c^{(i)} - c^{(i+1)} - \delta_{p^{(i)}, p^{(i+1)}}) \mathcal{X}_{\lambda(m)}^{s_i}, \quad (30)$$

где $c^{(i)} = c(X_{\lambda(m)}|i)$, $p^{(i)} = p(X_{\lambda(m)}|i)$, $i = 1, \dots, n$; $\delta_{p, p'}$ – символ Кронекера.

5.3. Скалярное произведение. Представления группы $G(m, 1, n)$, заданные формулами (27)–(29), суть аналоги полунормальных представлений симметрической группы. Здесь мы предлагаем аналоги ортогональных представлений симметрической группы для $G(m, 1, n)$.

Пусть $\lambda^{(m)}$ – m -разбиение и $X_{\lambda(m)}$ и $X'_{\lambda(m)}$ – две стандартные m -таблицы формы $\lambda^{(m)}$. Для краткости положим $c^{(i)} = c(X_{\lambda(m)}|i)$ и $p^{(i)} = p(X_{\lambda(m)}|i)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Определим следующее эрмитово скалярное произведение в векторном пространстве $U_{\lambda(m)}$:

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}'_{\lambda(m)} \rangle = 0, \quad (31)$$

$$\langle \mathcal{X}_{\lambda(m)}, \mathcal{X}_{\lambda(m)} \rangle = \prod_{\substack{j < k: \\ p^{(j)} = p^{(k)}, \\ c^{(j)} \notin \{c^{(k)}, c^{(k)} \pm 1\}}} \frac{c^{(j)} - c^{(k)} - 1}{c^{(j)} - c^{(k)}}. \quad (32)$$

Это скалярное произведение положительно определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Эрмитово скалярное произведение (31), (32) на $U_{\lambda(m)}$ инвариантно относительно действия группы $G(m, 1, n)$, заданного формулами (27)–(29).

Как следствие, операторы элементов группы $G(m, 1, n)$ унитарны в базисе $\{\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}}\}$, где

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda^{(m)}} := \left(\prod_{\substack{j < k: \\ p^{(j)} = p^{(k)}, \\ c^{(j)} \notin \{c^{(k)}, c^{(k)} \pm 1\}}} \left(\frac{c^{(j)} - c^{(k)} - 1}{c^{(j)} - c^{(k)}} \right)^{1/2} \right) \mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$$

для любой стандартной m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ формы $\lambda^{(m)}$.

6. ПОЛНОТА

Используя C -представления группы $G(m, 1, n)$, мы завершаем исследование спектра элементов ЮМ кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ и теории представлений цепи групп $G(m, 1, n)$. Обозначим через T_n множество стандартных m -таблиц размера n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеется взаимно однозначное соответствие между тремя множествами: $\text{Spec} \left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{smallmatrix} \right)$, $c\text{Cont}_m(n)$ и T_n .*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Спектр классических элементов ЮМ прост в представлениях $V_{\lambda^{(m)}}$ (соответствующих m -разбиениям).*

Это означает, что для двух различных стандартных m -таблиц (не обязательно одинаковой формы) элементы из $\text{Spec} \left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_n \\ \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n \end{smallmatrix} \right)$, отвечающие им при биекции из предложения 8, различны. Остается проверить, что в рамках этого подхода мы получаем все неприводимые представления группы $G(m, 1, n)$. Поскольку сумма квадратов размерностей построенных представлений равна порядку группы $G(m, 1, n)$ (это следует из общих результатов о произведениях диаграмм Браттели, см., например, работу [13]), следующее предложение завершает проверку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Представления $V_{\lambda^{(m)}}$ (соответствующие m -разбиениям) группы $G(m, 1, n)$, построенные в предыдущем разделе, неприводимы и попарно неизоморфны.*

Благодаря результату о полноте мы получаем, в частности, следующие выводы.

- Правила ветвления цепи по n групп $G(m, 1, n)$ свободны от кратностей.
- Централизатор подалгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n-1)$ в алгебре $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ коммутативен для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$.
- Централизатор подалгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n-1)$ в алгебре $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ порожден центром кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n-1)$ и элементами ЮМ j_n и $\tilde{j}_n$.
- Подалгебра, порожденная элементами ЮМ $j_1, \dots, j_n, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n$, – максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для каждой стандартной m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ определим элемент $p_{X_{\lambda^{(m)}}}$ кольца $\mathbb{C}G(m, 1, n)$ следующей рекурсией с начальным условием $p_{\emptyset} = 1$. Пусть α – клетка, занимаемая числом n в $X_{\lambda^{(m)}}$. Обозначим через $\mu^{(m)}$ m -разбиение числа $n-1$, которое получается из $\lambda^{(m)}$ удалением клетки α . Пусть $X_{\mu^{(m)}}$ – стандартная m -таблица с числами $1, \dots, n-1$ в тех же клетках, что в $X_{\lambda^{(m)}}$. Рекурсия дается формулой

$$p_{X_{\lambda^{(m)}}} := p_{X_{\mu^{(m)}}} \prod_{\substack{\beta \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}), \\ c(\beta) \neq c(\alpha)}} \frac{\tilde{j}_n - c(\beta)}{c(\alpha) - c(\beta)} \prod_{\substack{\beta \in \mathcal{E}_+(\mu^{(m)}), \\ p(\beta) \neq p(\alpha)}} \frac{j_n - p(\beta)}{p(\alpha) - p(\beta)}, \quad (33)$$

где $\left(\begin{smallmatrix} p(\beta) \\ c(\beta) \end{smallmatrix}\right)$ – классическое содержание клетки β , а $\mathcal{E}_+(\mu^{(m)})$ – множество добавимых клеток m -разбиения $\mu^{(m)}$ (клетка β называется добавимой для m -разбиения $\mu^{(m)}$, если m -набор множеств клеток, полученных из $\mu^{(m)}$ добавлением клетки β , по-прежнему образует m -разбиение). В силу результата о полноте из настоящего раздела элементы $\mathbf{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ образуют полную систему попарно ортогональных примитивных идемпотентов алгебры $\mathbb{C}G(m, 1, n)$.

Корректно определен гомоморфизм $\mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{C}G(m, 1, n)$, сопоставляющий $\mathcal{X}_{\lambda^{(m)}}$ число $\mathbf{p}_{X_{\lambda^{(m)}}}$ для каждой стандартной m -таблицы $X_{\lambda^{(m)}}$ и тождественный на образующих $s_1, \dots, s_{n-1}, t$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КЛАССИЧЕСКИЕ СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Здесь мы описываем сплетающие операторы в вырожденной циклотомической аффинной алгебре Гекке $\mathfrak{A}_{m,n}$, их можно использовать для исследования спектра элементов $\tilde{x}_i$ в различных представлениях. В духе диаграммы (3) из введения мы обсуждаем происхождение этих сплетающих операторов из (невырожденных) аффинных алгебр Гекке $\widehat{H}_n$. Мы также вновь получаем спектр элементов ЮМ $\tilde{j}_i$ с точки зрения теории возмущений. Сплетающие операторы могут быть введены в более общем контексте сплетенной алгебры Гекке [16].

1. Следующее предложение вытекает из предложений 3 и 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для всех $i = 1, \dots, n$

$$\text{Spec}(\tilde{j}_i) \subset [1 - i, i - 1]. \quad (34)$$

Дадим другое доказательство (в духе работы [18]) этого утверждения. Введем следующие элементы алгебры $\mathfrak{A}_{m,n}$:

$$\tilde{u}_{i+1} := \bar{s}_i \tilde{x}_i - \tilde{x}_i \bar{s}_i = \bar{s}_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}) + P_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (35)$$

где используется обозначение $P_{i+1} := (1/m) \sum_{p=1}^m x_i^p x_{i+1}^{-p}$.

Элементы $\tilde{u}_i$ – классические сплетающие операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1} x_i &= x_{i+1} \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} x_{i+1} &= x_i \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} x_j &= x_j \tilde{u}_{i+1}, & j &\neq i, i+1, \\ \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_i &= \tilde{x}_{i+1} \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_{i+1} &= \tilde{x}_i \tilde{u}_{i+1}, & \tilde{u}_{i+1} \tilde{x}_j &= \tilde{x}_j \tilde{u}_{i+1}, & j &\neq i, i+1. \end{aligned} \quad (36)$$

Кроме того, элементы $\tilde{u}_i$ удовлетворяют соотношениям Артина:

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i = \tilde{u}_{i+1} \tilde{u}_i \tilde{u}_{i+1}. \quad (37)$$

Запишем еще одно свойство операторов $\tilde{u}_i$:

$$\tilde{u}_{i+1}^2 = -(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1})^2 + P_{i+1} = -(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1})(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1}). \quad (38)$$

Таким образом, для произвольного многочлена χ от одной переменной справедлива формула

$$\tilde{u}_{i+1} \chi(\tilde{x}_i) \tilde{u}_{i+1} = \chi(\tilde{x}_{i+1}) \tilde{u}_{i+1}^2 = -\chi(\tilde{x}_{i+1})(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1})(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1}). \quad (39)$$

Элементы $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_{i+1}$ и P_{i+1} коммутируют. В произвольном представлении ρ спектр оператора $\rho(P_{i+1})$ содержится в $\{0, 1\}$; выбирая в качестве полинома χ характеристический полином оператора $\rho(\tilde{x}_i)$, мы заключаем, что

$$\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_{i+1})) \subset \text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) \cup (\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) + 1) \cup (\text{Spec}(\rho(\tilde{x}_i)) - 1). \quad (40)$$

Реализуя $\tilde{x}_i$ через $\tilde{j}_i$ в представлении группы $G(m, 1, n)$ и учитывая “начальное условие” $\tilde{j}_1 = 0$, мы вновь приходим к формуле (34).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Обычная вырожденная аффинная алгебра Гекке (она соответствует $m = 1$) выделена в том смысле, что идемпотенты P_i становятся тривиальными, $P_i = 1$, в отличие от вырожденных циклотомических аффинных алгебр Гекке с $m > 1$.

2. Пусть $\hat{H}_n$ – аффинная алгебра Гекке, т. е. алгебра с образующими $\tau, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями, составляющими первые пять строк формул (2). Алгебра $H(m, 1, n)$ – фактор-алгебра алгебры $\hat{H}_n$ по соотношению $(\tau - v_1) \dots (\tau - v_m)$. Операторы ЮМ y_i алгебры $\hat{H}_n$ определены следующим образом: $y_1 := \tau$, а для $i > 0$ $y_{i+1} := \sigma_i y_i \sigma_i$.

Определим общие сплетающие операторы $\mathfrak{U}_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, аффинной алгебры Гекке $\hat{H}_n$ как операторы, которые для всех $i = 1, \dots, n-1$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{U}_{i+1} y_i = y_{i+1} \mathfrak{U}_{i+1}, \quad \mathfrak{U}_{i+1} y_{i+1} = y_i \mathfrak{U}_{i+1}, \quad \mathfrak{U}_{i+1} y_k = y_k \mathfrak{U}_{i+1}, \quad k \neq i, i+1. \quad (41)$$

В работе [18] использовались сплетающие операторы (решения $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1}$ уравнений (41))

$$U_{i+1} := \sigma_i y_i - y_i \sigma_i. \quad (42)$$

Операторы U_{i+1} удовлетворяют, кроме соотношений (41), соотношению Артина:

$$U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}; \quad (43)$$

их квадраты равны следующим функциям от элементов ЮМ:

$$U_{i+1}^2 = -(y_{i+1} - q^2 y_i)(y_{i+1} - q^{-2} y_i). \quad (44)$$

В отличие от формулы (38), правая часть выражения (44) не содержит ничего похожего на проекторы P_{i+1} . Поясним, откуда возникают проекторы в классическом пределе.

Формулы (6), (7) показывают, что разложения операторов ЮМ циклотомической алгебры $H(m, 1, n)$ в ряд Тейлора начинаются следующим образом:

$$J_i = j_i + j_i \tilde{j}_i \alpha + O(\alpha^2), \quad (45)$$

где α – параметр деформации, $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$. “Поднимем” формулу (45) в аффинную алгебру Гекке, предполагая, что разложения элементов ЮМ аффинной алгебры $\hat{H}_n$ в ряд Тейлора начинаются следующим образом:

$$y_i = x_i + x_i \tilde{x}_i \alpha + O(\alpha^2), \quad (46)$$

где x_i и $\tilde{x}_i$ принадлежат вырожденной аффинной циклотомической алгебре Гекке $\mathfrak{A}_{m,n}$ (см. формулы (8)–(10)).

Чтобы выполнить классический предел, примем во внимание следующие начала разложений в ряд Тейлора элементов σ_i :

$$\sigma_i = \bar{s}_i + \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2). \quad (47)$$

Заметим, что элементы U_{i+1} , определенные выражением (42), в силу соотношений (46) и (47) стремятся к элементам

$$u_{i+1} := \bar{s}_i x_i - x_i \bar{s}_i \equiv \bar{s}_i (x_i - x_{i+1}). \quad (48)$$

Операторы u_{i+1} удовлетворяют всем перечисленным в формулах (36) соотношениям для операторов $\tilde{u}_{i+1}$, но сплетающие операторы u_{i+1} не помогают понять спектр образов элементов $\tilde{x}_i$ в представлениях.

Как отмечено в работе [18], операторы $\mathfrak{U}_{i+1} := U_{i+1} f(y_i, y_{i+1})$ для произвольной функции f – сплетающие операторы, удовлетворяющие соотношению Артина. Индукция показывает, что для любого натурального L

$$\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i = U_{i+1} \sum_{b=0}^{L-1} y_i^b y_{i+1}^{L-1-b}. \quad (49)$$

Таким образом, операторы $\sigma_i y_i^L - y_i^L \sigma_i$ суть сплетающие операторы для любого натурального L .

При условии (46) элементы $\sigma_i y_i^m - y_i^m \sigma_i \equiv \sigma_i (y_i^m - 1) - (y_i^m - 1) \sigma_i$ стремятся к нулю, когда α стремится к нулю. Эти элементы имеют порядок $O(\alpha)$. Обозначим

$$\tilde{\mathfrak{U}}_{i+1} := \frac{1}{m} \left(\sigma_i \frac{y_i^m - 1}{\alpha} - \frac{y_i^m - 1}{\alpha} \sigma_i \right). \quad (50)$$

Элементы $\tilde{\mathfrak{U}}_{i+1}$ стремятся к $\tilde{u}_{i+1}$, когда α стремится к нулю, и следующая лемма позволяет восстановить результат (38) с пертурбативной точки зрения.

ЛЕММА 3. *Имеем*

$$\tilde{\mathfrak{U}}_{i+1}^2 = -(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} + P_{i+1})(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1} - P_{i+1}) + O(\alpha).$$

3. Элементы j_i удовлетворяют условию $j_i^m = 1$, характеристические уравнения для элементов j_i не интересны на классическом уровне. Легко получить характеристическое уравнение для $\tilde{j}_i$ исходя из характеристического уравнения для J_i . Пусть A_0 – полупростой оператор в векторном пространстве V . Рассмотрим возмущение оператора A_0 вида

$$A = A_0 + A_0 A_1 \alpha + O(\alpha^2), \quad (51)$$

где оператор A_1 полупростой и коммутирует с A_0 . Пусть $\mathfrak{r}$ – собственное значение оператора A_0 и $V_{\mathfrak{r}}$ – соответствующее собственное подпространство. Оператор A на пространстве $V_{\mathfrak{r}}$ имеет с точностью до порядка α^2 вид $\mathfrak{r} \text{Id} + \alpha \mathfrak{r} A_1$, и его собственные значения равны $\mathfrak{r} + \mathfrak{r} \mathfrak{s}_l \alpha$, где $\{\mathfrak{s}_l\}$ – множество собственных значений ограничения оператора A_1 на подпространство $V_{\mathfrak{r}}$.

В частной ситуации, когда $A_0 = j_i$, $A_1 = \tilde{j}_i$ и $A = J_i$, спектр оператора A содержится, вообще говоря, в множестве $\{v_l q^{2\eta}, l = 1, \dots, m, \eta \in [1 - i, i - 1]\}$ [7], [13]. Перейдем сначала к пределу $v_l \rightarrow \xi_l$, $l = 1, \dots, m$. Тогда $\xi_l q^{2\eta} = \xi_l + \xi_l \eta \alpha + O(\alpha^2)$ (так как $q^2 = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$). Таким образом, спектр оператора $\tilde{j}_i$ содержится в множестве $[1 - i, i - 1]$, и мы приходим к утверждению предложения 10 с пертурбативной точки зрения.

Список литературы

- [1] G. C. Shephard, J. A. Todd, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 274–304.
- [2] S. Ariki, K. Koike, *Adv. Math.*, **106**:2 (1994), 216–243.
- [3] M. Broué, G. Malle, *Astérisque*, **212** (1993), 119–189.
- [4] I. V. Cherednik, *Duke Math. J.*, **54**:2 (1987), 563–577.
- [5] P. Hoefsmit, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type*, Ph. D. Thesis, University of British Columbia, Vancouver, 1974.
- [6] A. Okounkov, A. Vershik, *Selecta Math. (N. S.)*, **2**:4 (1996), 581–605.
- [7] O. V. Ogievetsky, L. Poulain d'Andecy, *Modern Phys. Lett. A*, **26**:11 (2011), 795–803, arXiv: 1012.5844.
- [8] W. Specht, *Schriften Math. Seminar (Berlin)*, **1** (1932), 1–32.
- [9] G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **16**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [10] I. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [11] И. А. Пушкарев, “К теории представлений сплетений конечных групп с симметрическими группами”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. II, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240**, ПОМИ, СПб., 1997, 229–244.
- [12] A. Young, *Proc. London Math. Soc.* (2), **31**:1 (1930), 273–288.
- [13] O. V. Ogievetsky, L. Poulain d'Andecy, *Jucys–Murphy elements and representations of cyclotomic Hecke algebras*, arXiv: 1206.0612.
- [14] A. Ram, *Proc. London Math. Soc.*, **75**:1 (1997), 99–133, arXiv: math.RT/9511223.
- [15] W. Wang, *Proc. London Math. Soc.*, **88**:2 (2004), 381–404, arXiv: math.QA/0203004.
- [16] J. Wan, W. Wang, *Int. Math. Res. Not.*, 2008, 128, 31 pp., arXiv: 0806.0196.
- [17] A. Ram, A. Shepler, *Comment. Math. Helv.*, **78**:2 (2003), 308–334, arXiv: math.GR/0209135.
- [18] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, *Czechoslovak J. Phys.*, **55**:11 (2005), 1433–1441.