Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Ренормализационная группа в фермионной иерархической модели в проективных координатах, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 3, 355–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:02:56

© 2012 г.

М. Д. Миссаров*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ПРОЕКТИВНЫХ КООРДИНАТАХ

Изучается действие ренормализационной группы в фермионной иерархической модели в пространстве коэффициентов, задающих грассманово-значную плотность свободной меры. Это пространство трактуется как двумерное проективное пространство. Отображение ренормгруппы является однородным квадратичным отображением и обладает специальным геометрическим свойством, позволяющим дать описание инвариантных множеств и глобальную динамику во всем пространстве.

Ключевые слова: фермионная модель, иерархическая решетка, ренормализационная группа, проективное пространство, инвариантные множества, динамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Фермионная модель на иерархической решетке задается гамильтонианом

$$H(\psi^*; \alpha) = \sum_{i,j \in \Lambda} d_n^{-\alpha}(i, j) [\bar{\psi}_1(i) \psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i) \psi_2(j)] + \sum_{i \in \Lambda} L(\psi^*(i); r, g),$$

где

$$L(\psi^*(i); r, g) = r(\bar{\psi}_1(i) \psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i) \psi_2(i)) + g \bar{\psi}_1(i) \psi_1(i) \bar{\psi}_2(i) \psi_2(i).$$

Напомним, что иерархическая решетка Λ определяется как множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с иерархическим расстоянием $d(i, j)$, $i, j \in \mathbb{N}$. Расстояние $d(i, j) = n^{s(i, j)}$ при $i \neq j$, где $s(i, j)$ равно минимальному значению s , при котором существует k такое, что $i \in V_{k, s}$, $j \in V_{k, s}$; $V_{k, s} = \{j: j \in \mathbb{N}, (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$; n – размер элементарной ячейки (некоторое фиксированное натуральное число). В узлах этой решетки находятся четырехкомпонентные спины $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана. В случае, когда $n = p^d$, где p – простое число, решетку Λ можно интерпретировать как решетку чисто-дробных d -мерных p -адических векторов (см. [1]–[3]) с p -адическим расстоянием между ними.

---

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия.
E-mail: Moukadas.Missarov@ksu.ru

Удобно также вместо лагранжиана $L(\psi^*; r, g)$ использовать понятие грассманово-значной “плотности” свободной меры $f(\psi^*) = e^{-L(\psi^*; r, g)}$. В общем случае “плотность” свободной меры задается выражением

$$f(\psi^*; c) = c_0 + c_1(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + c_2\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2,$$

$c = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$. Если $c_0 \neq 0$ (регулярный случай), связь между координатами r, g и c задается формулами

$$r(c) = -\frac{c_1}{c_0}, \quad g(c) = \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_0^2}.$$

Если $c_0 = 0$, как, например, в случае, когда плотность задается грассмановой дельта-функцией $\delta(\psi^*) = \bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2$, экспоненциальное представление невозможно.

Набор (c_0, c_1, c_2) естественно трактовать как точку двумерного вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^2$, поскольку два набора, отличающиеся друг от друга ненулевым множителем, задают одно и то же гиббсовское состояние.

Блок-спиновое преобразование ренормализационной группы (РГ) Вильсона–Каданова определяется по формуле

$$r(\alpha)\psi^*(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi^*(j).$$

Гауссовская часть гамильтониана модели является инвариантной относительно преобразования РГ, а в негауссовской части оно сводится к преобразованию $R(\alpha)$ констант связи $R(\alpha)(r, g) = (r', g')$,

$$r' = \lambda \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} (r+1) - 1 \right), \quad g' = \frac{\lambda^2}{n} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g, \quad (1)$$

где $\lambda = n^{\alpha-1}$. Преобразование РГ в пространстве коэффициентов “плотности” свободной меры мы также обозначаем $R(\alpha)$: $R(\alpha)(c_0, c_1, c_2) = (c'_0, c'_1, c'_2)$,

$$\begin{aligned} c'_0 &= n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_1 - c_0)^2 + \frac{1}{n}(c_0 c_2 - c_1^2) \right), \\ c'_1 &= \lambda n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_1 - c_0)(c_2 - c_1) + \frac{1}{n}(c_0 c_2 - c_1^2) \right), \\ c'_2 &= \lambda^2 n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_2 - c_1)^2 + \frac{1}{n}(c_0 c_2 - c_1^2) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $c_2 - 2c_1 + c_0 \neq 0$, мы можем опустить этот множитель в формулах (2), поскольку речь идет о преобразовании в проективном пространстве.

Преобразование РГ в c -пространстве выглядит более эстетично, позволяет визуализировать картину динамики во всем пространстве констант связи в силу компактности проективной плоскости и избавиться от некоторых сингулярностей в (r, g) -координатах. В самом деле, отображение (1) не определено в точках критической параболы $g = n(r+1)^2$, но формулы (2) преобразования РГ в c -пространстве позволяют доопределить его. Точка (r, g) критической параболы в c -координатах записывается как точка $(1, -r, r^2 - n(r+1)^2)$, которая при отображении $R(\alpha)$ переходит

в точку $(0, 1, (n-1)(r + (n+1)(n-1)^{-1}))$ и, таким образом, выходит из плоскости (r, g) . Но следующая итерация $R(\alpha)$ приводит эту точку в регулярную область. Несложные вычисления показывают, что нерегулярная область при преобразовании РГ отображается на параболу $g = (1/n)(r + \lambda)^2$.

Преобразование $R(\alpha)$ в (r, g) -координатах имеет тривиальную (гауссовскую) неподвижную точку $(0, 0)$ и две негауссовские неподвижные точки. В s -координатах гауссовская точка записывается как $(1, 0, 0)$, и видна еще одна неподвижная точка $(0, 0, 1)$, которая задает грассманову дельта-функцию $\delta(\psi^*) = \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2$. Мы обозначим эту неподвижную точку δ . Кроме того, преобразование РГ имеет две регулярные неподвижные точки, которые в (r, g) -координатах при $\alpha \neq 1$ задаются формулами

$$\begin{aligned} r_+(\alpha) &= \frac{n^{1/2} - n^{\alpha-1}}{1 - n^{1/2}}, & g_+(\alpha) &= \frac{r_+(\alpha)(1 + r_+(\alpha))^2}{1 + r_+(\alpha) + n^{-1/2}}, & \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ r_-(\alpha) &= \frac{-n^{1/2} - n^{\alpha-1}}{1 + n^{1/2}}, & g_-(\alpha) &= \frac{r_-(\alpha)(1 + r_-(\alpha))^2}{1 + r_-(\alpha) - n^{-1/2}}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ мы имеем целую линию неподвижных точек $\{g = 0, r \neq -1\}$. Само отображение $R(\alpha)$ как отображение из $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}P^2$ корректно определено всюду, кроме точки $(1, 1, 1)$, поскольку $R(\alpha)(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. В (r, g) -плоскости она задается координатами $(-1, 0)$. Эту точку мы будем называть сингулярной точкой РГ-отображения.

В работах [4]–[9] мы изучали динамику РГ в (r, g) -координатах, хотя и использовали s -координаты для получения глобальной картины. В настоящей статье мы описываем инвариантные множества и динамику РГ в s -пространстве. При этом многие доказательства становятся более наглядными и простыми благодаря специальному геометрическому свойству преобразования $R(\alpha)$, выраженному в лемме 1. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\alpha > 1$. В этом случае неподвижная точка δ является единственной притягивающей неподвижной точкой. Заметим, что фермионная иерархическая модель интересна тем, что в ней возможен точный РГ-анализ и она является антикоммутативным аналогом бозонной ϕ^4 -теории, в которой РГ исследуется только в рамках теории возмущений в окрестности гауссовской точки.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И РГ-ДИНАМИКА В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для описания глобального потока РГ-динамики мы будем использовать (r, g) -координаты и проективные s -координаты одновременно. Более точно, рассмотрим реализацию проективного s -пространства в виде полусферы $S = \{(c_0, c_1, c_2): c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1, c_0 \geq 0\}$, в которой противоположные точки граничной окружности $c_1^2 + c_2^2 = 1$ отождествлены. Для того чтобы получить плоскую (двумерную) картину, используем ортогональную проекцию S на диск $D = \{(c_1, c_2): c_1^2 + c_2^2 \leq 1\}$. Тогда регулярная точка (r, g) будет соответствовать точке $(c_1(r, g), c_2(r, g))$, где

$$c_1(r, g) = -\frac{r}{\sqrt{1 + r^2 + (r^2 - g)^2}}, \quad c_2(r, g) = -\frac{r^2 - g}{\sqrt{1 + r^2 + (r^2 - g)^2}}.$$

Заметим, что точки $(c_1(r, g), c_2(r, g))$ принадлежат внутренней части диска D . Тривиальная неподвижная точка $r = 0, g = 0$ в c -координатах будет представлена также точкой $(0, 0)$. Неподвижная точка, которая задается дельта-функцией в c -координатах, определяется точкой $(0, 1)$. Линия $g = 0$ в c -пространстве описывается кривой $l_0 = \{(c_1(r, 0), c_2(r, 0)); r \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что $(c_1(r, 0), c_2(r, 0)) \rightarrow (0, 1)$ при $r \rightarrow \pm\infty$. Дополняя кривую l_0 предельной точкой $(0, 1)$, мы получим замкнутую кривую l в c -пространстве. Нижняя полуплоскость $\{(r, g): g < 0\}$ задается в c -пространстве областью D_1 , ограниченной кривой l .

Рассмотрим параметрическое семейство кривых в (r, g) -пространстве, задаваемых функцией вида

$$g_1(r; a, b) = \frac{r - a}{r - b}(r + 1)^2.$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$R(\alpha)(r, g_1(r; a, b)) = (r', g_\lambda(r'; a', b')),$$

где

$$\begin{aligned} r' &= \lambda \frac{a - b - 1 + n^{-1}}{1 - n^{-1}} \cdot \frac{r - a_1}{r - b_1}, \\ a_1 &= \frac{(n^{-1} - 1)a}{a - b - 1 + n^{-1}}, \quad b_1 = \frac{b - n^{-1}a}{1 - n^{-1}}, \\ g_\lambda(r'; a', b') &= \frac{r' - a'}{r' - b'}(r' + \lambda)^2, \\ a' &= \lambda a, \quad b' = \lambda(n(b + 1) - 1), \quad \lambda = n^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится прямым вычислением.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} c_1(r, g_1(r; a, b)) &\rightarrow c_2^0(a, b) = -\frac{1}{\sqrt{1 + (a - b - 2)^2}}, \\ c_2(r, g_1(r; a, b)) &\rightarrow c_2^0(a, b) = \frac{a - b - 2}{\sqrt{1 + (a - b - 2)^2}}, \end{aligned}$$

если $r \rightarrow \pm\infty$. Точки $(c_1^0(a, b), c_2^0(a, b))$ лежат на окружности $c_1^2 + c_2^2 = 1$, и мы компактифицируем кривые

$$\{c_1(r, g_1(r; a, b)), c_2(r, g_1(r; a, b)); r \in \mathbb{R}\},$$

добавляя к ним предельные точки $(c_1^0(a, b), c_2^0(a, b))$.

Отметим, что функция $g_1(r; a, b)$ не определена в точке $r = b$, но так как

$$c_1(r, g_1(r; a, b)) \rightarrow 0, \quad c_2(r, g_1(r; a, b)) \rightarrow 1$$

при $r \rightarrow b$, то мы можем доопределить кривые в точке $r = b$ соотношениями $c_1(b, g_1(b; a, b)) = 0, c_2(b, g_1(b; a, b)) = 1$.

Выберем параметр b так, что $b = b' = \lambda(n(b+1) - 1)$, и обозначим решение этого уравнения через b_0 : $b_0 = -(\lambda n - \lambda)/(\lambda n - 1)$. Рассмотрим следующие области в (r, g) -пространстве:

$$G_+(a) = \{(r, g): r \geq a, 0 \leq g \leq g_1(r; a, b_0)\},$$

$$G_-(a) = \{(r, g): r \leq a, 0 \leq g \leq g_1(r; a, b_0)\}.$$

Рассмотрим также кривые вида

$$\gamma_+(a) = \{r, g_1(r; a, b_0): r \geq a\}, \quad \gamma_-(a) = \{r, g_1(r; a, b_0): r \leq a\}.$$

Заметим, что каждая точка из $G_+(a)$ (из $G_-(a)$) принадлежит некоторой кривой вида $\gamma_+(\tilde{a})$ ($\gamma_-(\tilde{a})$), где $\tilde{a} \geq a$ (где $\tilde{a} \leq a$). Пусть $T_+^0(a)$, $T_-^0(a)$ и $l_+^0(a)$, $l_-^0(a)$ обозначают образы областей $G_+(a)$, $G_-(a)$ и кривых $\gamma_+(a)$, $\gamma_-(a)$ в c -пространстве. Добавим к кривым $l_+^0(a)$ и $l_-^0(a)$ предельную точку $(c_1^0(a, b_0), c_2^0(a, b_0))$ и обозначим получившиеся кривые как $l_+(a)$ и $l_-(a)$. Добавим также к областям $T_+^0(a)$ и $T_-^0(a)$ предельные точки вида $(c_1^0(\tilde{a}, b_0), c_2^0(\tilde{a}, b_0))$, $\tilde{a} \geq a$, и $(c_1^0(\tilde{a}, b_0), c_2^0(\tilde{a}, b_0))$, $\tilde{a} \leq a$, соответственно и обозначим получившиеся области как $T_+(a)$ и $T_-(a)$.

Область $T_+(a)$ является криволинейным треугольником в c -пространстве, ограниченным тремя криволинейными отрезками: $l_+(a)$, сегментом границы диска $D_1 \{(c_1(r, 0), c_2(r, 0)): r \geq a\}$, где

$$c_1(r, 0) = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2+r^4}}, \quad c_2(r, 0) = \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2+r^4}},$$

и сегментом границы диска $D \{(c_1(\tilde{a}), c_2(\tilde{a})): \tilde{a} \geq a\}$, где

$$c_1(\tilde{a}) = -\frac{1}{\sqrt{1+(\tilde{a}-b_0-2)^2}}, \quad c_2(\tilde{a}) = \frac{\tilde{a}-b_0-2}{\sqrt{1+(\tilde{a}-b_0-2)^2}}.$$

Последние два сегмента сходятся в вершине $(0, 1)$, поскольку $(c_1(\tilde{a}), c_2(\tilde{a})) \rightarrow (0, 1)$ при $\tilde{a} \rightarrow +\infty$. Аналогично область $T_-(a)$ является криволинейным треугольником, ограниченным отрезками $l_-(a)$, сегментом границы $D_1\{t(c_1(r, 0), c_2(r, 0)): r \leq a\}$ и сегментом границы $D \{(c_1(\tilde{a}), c_2(\tilde{a})): \tilde{a} \leq a\}$.

Рассмотрим образы введенных областей $G_+(a)$, $G_-(a)$, $T_+(a)$, $T_-(a)$ относительно преобразования РГ $R(\alpha)$. Пусть

$$G'_+(a) = R(\alpha)G_+(a), \quad G'_-(a) = R(\alpha)G_-(a),$$

$$T'_+(a) = R(\alpha)T_+(a), \quad T'_-(a) = R(\alpha)T_-(a).$$

ТЕОРЕМА 1. Если $a \geq -(1 - n^{-1})/(\lambda n - 1)$, то

$$G'_+(a) = \{(r, g): \lambda a \leq r < r_1(a; \lambda), 0 \leq g < g_1(r; \lambda a, b_0)\} \cup$$

$$\cup \left\{ (r, g): r_1(a; \lambda) \leq r, 0 \leq g < \frac{1}{n}(r + \lambda)^2 \right\}.$$

Если $a \leq b_0 = -\lambda(n-1)/(\lambda n - 1)$, то

$$G'_-(a) = \{(r, g): r_1(a; \lambda) < r \leq \lambda a, 0 \leq g < g_1(r; \lambda a, b_0)\} \cup$$

$$\cup \left\{ (r, g): r \leq r_1(a; \lambda), 0 \leq g < \frac{1}{n}(r + \lambda)^2 \right\},$$

где

$$r_1(a; \lambda) = \lambda \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} a + (\lambda n - 1)^{-1} \right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что

$$R(\alpha)(r, g_1(r; a, b_0)) = (r', g_\lambda(r'; a', b_0)),$$

где

$$\begin{aligned} r' &= \lambda \left(a \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} + (\lambda n - 1)^{-1} \right) \frac{r - a_1}{r - b_1}, \\ a_1 &= -\frac{(1 - n^{-1})a}{a + (1 - n^{-1})/(\lambda n - 1)}, \quad b_1 = -\frac{(\lambda n - \lambda)/(\lambda n - 1) + n^{-1}a}{1 - n^{-1}}, \\ g_\lambda(r'; (a'_1, b_0)) &= g_\lambda(r'; (\lambda a, b_0)) = \frac{r' - \lambda a}{r' - b_0} (r' + \lambda)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (1), (2) следует, что $a_1 > b_1$, если $a > -(1 - n^{-1})/(\lambda n - 1)$, и r' монотонно возрастает в зависимости от r при $r > b_1$. Если $a < -\lambda(n - 1)/(\lambda n - 1)$, то $b_1 > a_1$ и r' монотонно убывает в зависимости от r при $r < b_1$.

Пусть $a > 0$. Тогда каждая кривая $\gamma_+(a) = \{(r, g_1(r; a, b_0)) : r \geq a\}$ отображается на кривую $\gamma'_+(a) = \{(r, g_\lambda(r; \lambda a, b_0)) : \lambda a \leq r < r_1(a; \lambda)\}$, где $r_1(a; \lambda)$ задается формулой (1). Заметим, что $g_\lambda(r_1(a; \lambda); \lambda a, b_0) = n^{-1}(r_1(a; \lambda) + \lambda)^2$. Любая точка области $G_+(a)$ принадлежит кривой $\gamma_+(\tilde{a})$ для некоторого $\tilde{a} \geq a$ и $\gamma_+(\tilde{a}) \subset G_+(a)$ для всех $\tilde{a} \geq a$. Отсюда следует, что семейство кривых $\gamma'_+(\tilde{a})$, $\tilde{a} \geq a$, замечает множество $G'_+(a)$.

Пусть $a < b_0 = -\lambda(n - 1)/(\lambda n - 1)$. Тогда кривая $\gamma_-(a) = \{(r, g_1(r; a, b_0)) : r \leq a\}$ отображается на кривую $\gamma'_-(a) = \{(r, g_\lambda(r; \lambda a, b_0)) : r_1(a; \lambda) < r \leq \lambda a\}$, где $r_1(a; \lambda)$ также задается формулой (1). Семейство кривых $\gamma_-(\tilde{a})$, $\tilde{a} \leq a$, замечает множество $G_-(a)$. Следовательно, семейство $\gamma'_-(\tilde{a})$, $\tilde{a} \leq a$, замечает множество $G'_-(a)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $a \geq 4$, то

$$G'_+(a) \subset G_+\left(\frac{\lambda + 1}{2}a\right) \subset G_+(a).$$

Если $a \leq -4$, то

$$G'_-(a) \subset G_-\left(\frac{\lambda + 1}{2}a\right) \subset G_-(a).$$

Все точки, принадлежащие $G_+(a)$, $a \geq 4$, или $G_-(a)$, $a \leq -4$, стремятся при итерациях отображения $РГ$ к δ - неподвижной точке $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \geq 4$. Покажем, что кривая $\gamma'_+(a)$ принадлежит множеству $G_+((\lambda + 1)a/2)$. Так как кривая $\gamma'_+(a)$ является частью кривой, задаваемой уравнением $g = g_\lambda(r; \lambda a, b_0)$, то достаточно показать, что

$$g_1\left(r; \frac{\lambda + 1}{2}a, b_0\right) \geq g_\lambda(r; \lambda a, b_0). \quad (5)$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} g_1\left(r; \frac{\lambda+1}{2}a, b_0\right) - g_\lambda(r; \lambda a, b_0) = \\ = \frac{\lambda-1}{r-b_0} \left[\frac{a-4}{2}r^2 + (2\lambda+1)\left(a - \frac{\lambda+1}{2\lambda+1}\right)r + a\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда легко видеть, что при $a \geq 4$ неравенство (5) выполнено, если $r \geq \lambda a$. Пусть $a \leq -4$. Заметим, что $r - b_0 < 0$ при $r \leq a$. Воспользуемся формулой (6). Для того чтобы доказать неравенство (5), достаточно показать, что

$$\frac{a-4}{2}r^2(2\lambda+1)\left(a - \frac{\lambda+1}{2\lambda+1}\right)r < 0, \quad (7)$$

так как $a(\lambda^2 + \lambda + 1/2) < 0$ при отрицательных a . Неравенство (5) будет выполнено, если

$$\frac{a-4}{2}r + (2\lambda+1)a - (\lambda+1) > 0$$

при $r < \lambda a$. Учитывая, что $a \leq -4$, $r < \lambda a$ и $\lambda > 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a-4}{2}r + (2\lambda+1)a - (\lambda+1) &\geq \frac{a-4}{2}\lambda a + (2\lambda+1)a - (\lambda+1) = \\ &= \frac{a^2\lambda}{2} + a - \lambda - 1 \geq -\frac{4a\lambda}{2} + a - \lambda - 1 = \\ &= a(1-2\lambda) - \lambda - 1 > 4(2\lambda-1) - \lambda - 1 = 7\lambda - 5 > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$g_1\left(r; \frac{\lambda+1}{2}a, b_0\right) \geq \min\left(g_\lambda(r; \lambda a, b_0), \frac{1}{n}(r+\lambda)^2\right)$$

при $a \geq 4$, $r \geq \lambda a$ и $a \leq -4$, $r \leq \lambda a$. Из теоремы 1 и с учетом того, что $(\lambda+1)/2 > 1$, следует

$$\begin{aligned} G'_+(a) \subset G_+\left(\frac{\lambda+1}{2}a\right) \subset G_+(a) \quad \text{при } a \geq 4, \\ G'_-(a) \subset G_-\left(\frac{\lambda+1}{2}a\right) \subset G_-(a) \quad \text{при } a \leq -4. \end{aligned}$$

Пусть $R^n(\alpha)(r, g) = (r^{(n)}, g^{(n)})$. Если $a \geq 4$, $(r, g) \in G_+(a)$, то $r^{(n)} \geq ((\lambda+1)/2)^n a$, $g^{(n)} < n^{-1}(r^{(n)} + \lambda)^2$. Так как $r^{(n)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $c_1(r^{(n)}, g^{(n)}) \rightarrow 0$, $c_2(r^{(n)}, g^{(n)}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Из теоремы 2 мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Области $T_+(a)$ при $a \geq 4$ и $T_-(a)$ при $a \leq -4$ инвариантны относительно преобразования RG и лежат в зоне притяжения неподвижной точки δ .

Список литературы

- [1] M. D. Missarov, “Renormalization group and renormalization theory in p -adic and adelic scalar models”, *Dynamical Systems and Statistical Mechanics*, Advances in Soviet Mathematics, **3**, ed. Ya. G. Sinai, AMS, Providence, RI, 1991, 143–161.
- [2] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [3] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 40–50.
- [4] É. Yu. Lerner, M. D. Missarov, *J. Stat. Phys.*, **76**:3–4 (1994), 805–817.
- [5] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **107**:2 (1996), 201–212.
- [6] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 323–336.
- [7] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **117**:3 (1998), 471–488.
- [8] M. D. Missarov, *Phys. Lett. A*, **253**:1–2 (1999), 41–46.
- [9] M. D. Missarov, “Renormalization group solution of fermionic Dyson model”, *Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (St. Petersburg, Russia, July 9–22, 2001), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, **77**, eds. V. A. Malyshev, A. M. Vershik, Kluwer, Dordrecht, 2002, 151–166.

Поступила в редакцию 13.04.2012,
после доработки 10.05.2012