Общероссийский математический портал

Д. А. Славнов, Размерная перенормировка по линиям, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 148–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:23:35

© 1998 г.

Д. А. Славнов*

РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА ПО ЛИНИЯМ

Описана некоторая модификация размерной перенормировки, в которой используются только целые и конечные размерности. Особое внимание уделено перенормировке в моделях с векторными и спинорными полями.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основным вопросом теории перенормировок стал учет различного рода симметрий. Для учета калибровочных симметрий наиболее удачными оказались перенормировки, основанные на размерной регуляризации. Однако использование таких перенормировок встретилось со значительными трудностями в моделях с супер- и киральными симметриями. Эти трудности связаны с тем, что для подобных симметрий существенны размерные свойства пространства. Не очень ясно, что понимать под левыми и правыми спинорами в пространствах, которые имеют нецелую размерность. Также не вполне понятно, как в таких пространствах подсчитывать бозонные и фермионные степени свободы, а это важно для суперсимметрии. Этим отрицательным сторонам размерных перенормировок противостоит весьма существенное их положительное свойство – эти перенормировки имеют сравнительно простой и достаточно далеко продвинутый математический аппарат.

В данной статье предпринята попытка разработать схему перенормировок, которая, с одной стороны, по возможности полно сохранила бы математический аппарат размерной регуляризации, а с другой, была бы свободна от несколько “мистической” идеи о пространствах с нецелой размерностью. В противоположность этому предлагается вернуться к боголюбовской трактовке перенормировки как расширению некоторого линейного функционала. Благодаря этому такая перенормировочная схема оказывается лучше приспособленной для совместного описания калибровочных и киральных симметрий, а также для использования ее в суперсимметричных теориях.

2. ПЕРЕНОРМИРОВКА ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА ФУНКЦИЙ ГРИНА

В качестве отправной точки возьмем так называемую “перенормировку по линиям”.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Применительно к амплитудам Фейнмана она была построена в работе [1]. Сущность ее сводится к следующему. По правилам Фейнмана каждой внутренней линии l в диаграмме G_s соответствует умножение на пропагатор $D_l(p)$, свертка $*$ по индексам (здесь опущенным) этого пропагатора и интегрирование по его импульсу. Суммарно все эти действия определяют линейный оператор

$$\int dp D_l(p) * \dots, \quad (1)$$

который каждую амплитуду Фейнмана $\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}})$ формально выражает через амплитуду $\mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p)$:

$$\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}}) = \int dp D_l(p) * \mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p). \quad (2)$$

Амплитуда $\mathcal{G}_{s/l}$ соответствует диаграмме $G_{s/l}$, которая получается из диаграммы G_s разрывом внутренней линии l . В формуле (2) через $(p)_s^{\text{out}}$ обозначена совокупность внешних импульсов диаграммы G_s , а через $((p)_s^{\text{out}}, p, -p)$ – то же для диаграммы $G_{s/l}$.

В общем случае интеграл в правой части (2) расходится, так что амплитуда $\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}})$ оказывается перенормированной. В перенормировке по линиям линейный оператор (1) предлагается заменить его линейным расширением

$$\int d\mu(p) D_l(p) \dots \quad (3)$$

Этот оператор должен обладать двумя основными свойствами. Во-первых, он должен давать конечный результат на функциях

$$\mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p), \quad M(G_m) \mathcal{G}_{m/l}((p)_m^{\text{out}}, p, -p). \quad (4)$$

Здесь G_m – любая поддиаграмма диаграммы G_s ; $\mathcal{G}_{s/l}(G_m/l)$ – перенормированная амплитуда Фейнмана, соответствующая диаграмме $G_{s/l}(G_m/l)$; $M(G_m)$ – оператор разложения по $(p)_m^{\text{out}}$ в ряд Тейлора функции $\mathcal{G}_{m/l}$ до порядка ω_m , где ω_m – индекс расходимости диаграммы G_m . Во-вторых, если при действии оператора (1) на какую-нибудь из функций (4) возникающий интеграл сходится, то для этой функции действие оператора (3) должно совпадать с действием оператора (1).

Условно можно считать, что оператор (3) получается из оператора (1) заменой интегрирования по мере dp и свертки по индексам пропагатора на “перенормированное интегрирование” по мере $d\mu(p)$. Правда, при этом приходится отказываться от требования положительной определенности меры $d\mu(p)$. При такой замене в правой части формулы (2) получается конечный результат, но этого недостаточно, чтобы получающееся выражение стало перенормированной амплитудой Фейнмана, соответствующей диаграмме G_s . Оказывается, что добиться этого можно, произведя некоторую симметризацию. Для этого нужно все линии (пропагаторы), фигурирующие в модели, распределить по конечному числу упорядоченных типов: 1-й, 2-й, ..., N -й. Разбиение по

типам может быть любым, но единым для всех диаграмм и поддиаграмм. Например, допустимо к первому типу отнести кварковые линии, ко второму – лептонные, к третьему – все бозонные. Можно все линии отнести к одному типу.

После этого, как показано в [1], перенормированная амплитуда Фейнмана $\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}})$ вычисляется с помощью соотношения

$$\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}}) = |L_s|^{-1} \int d\mu(p) D_l(p) \sum_{l \in G_s} \mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p). \quad (5)$$

В правой части (5) суммирование идет по всем $|L_s|$ поддиаграммам $G_{s/l}$, которые получаются из диаграммы G_s разрывом одной линии l выбранного типа. При этом предполагается, что функция $\mathcal{G}_{s/l}$ – это перенормированная амплитуда Фейнмана, полученная по тому же рецепту, с помощью разрыва внутренней линии того же типа, если хотя бы одна такая линия присутствует в диаграмме $G_{s/l}$. Если таких линий нет, то амплитуда вычисляется по той же формуле (5), только суммирование в правой части следует вести по поддиаграммам, которые получаются разрывом линии типа, имеющего предыдущий номер.

В [1] доказано, что полученные по такому рецепту амплитуды совпадают с перенормированными амплитудами Фейнмана, построенными с помощью R -операции Боголюбова–Парасюка при определенной фиксации в последней конечной перенормировки.

Приспособим теперь изложенную схему для перенормировок функций Грина, точнее, для перенормировок их производящего функционала $Z(j)$. Предварительно потребуются представить функционал для неперенормированных функций Грина в специальном виде. На формально-комбинаторном уровне это представление может быть получено следующим образом.

Пусть динамика системы описывается действием

$$S(\varphi) = \sum_{z=1}^N I_n(\varphi) + W(\varphi), \quad (6)$$

которое включает в себя вклады как от физических, так и от духовых полей, а также, если необходимо, члены, фиксирующие калибровку. Множество полей φ разбито на N типов:

$$\varphi = \{\varphi_u^n\}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Здесь индекс u различает поля внутри одного типа. Это могут быть как разные поля, так и поля, сопряженные друг другу. Каждое слагаемое $I_n(\varphi)$ в правой части (6) зависит только от полей типа n , квадратично по этим полям и при квантовании определяет пропагатор

$$\langle \varphi_u^n(p) \varphi_v^n(p') \rangle = i D_{uv}^n(p) \delta(p + p').$$

Так как перенормировку удобнее строить в пространстве с евклидовой метрикой, то в дальнейших построениях эту метрику и будем использовать. Как известно, производящий функционал $Z(j)$ формально может быть представлен в виде

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ -W \left(\frac{\delta}{\delta j} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dp \sum_{n=1}^N \sum_{u,v} j_u^n(p) D_{uv}^n(p) j_v^n(-p) \right\}, \quad (7)$$

где $\mathcal{N}$ – нормировочный множитель, $j_u^n(p)$ – токи, варьируя по которым функционал $Z(j)$ можно получить соответствующие функции Грина. Правую часть формулы (7) следует умножить на $C(j, \varphi)|_{\varphi=0}$, где

$$C(j, \varphi) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^N \int dp \sum_u j_u^n(p) \varphi_u^n(p) \right\},$$

выполнить варьирование по j и, наконец, заменить это варьирование варьированием по φ . В результате формула (7) принимает вид

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \prod_{n=1}^N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dp \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta \varphi_u^n(p)} D_{uv}^n(p) \frac{\delta}{\delta \varphi_v^n(-p)} \right\} \times \\ \times \exp \{ -W(\varphi) \} C(j, \varphi)|_{\varphi=0}. \quad (8)$$

Конечно, для реального нахождения функций Грина формула (8) непригодна, т.к. фигурирующие в ней интегралы по p могут расходиться. Однако легко понять, как она должна быть исправлена. Линейный оператор

$$\int dp \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta \varphi_u^n(p)} D_{uv}^n(p) \frac{\delta}{\delta \varphi_v^n(-p)} \quad (9)$$

формально добавляет к каждой функции Грина одну внутреннюю линию типа n . Для амплитуд Фейнмана это осуществляется с помощью оператора (1) согласно формуле (2). Чтобы избавиться от расходимостей в формуле (2), оператор (1) надо заменить его линейным расширением (3). Аналогично, чтобы избавиться от расходимостей в формуле (8), нужно заменить оператор (9) его линейным расширением

$$\Delta^n = \int d\mu(p) \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta \varphi_u^n(p)} D_{uv}^n(p) \frac{\delta}{\delta \varphi_v^n(-p)}. \quad (10)$$

Тогда (8) трансформируется в формулу

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} \exp \{ \Delta^N / 2 \} \dots \exp \{ \Delta^1 / 2 \} \exp \{ -W(\varphi) \} C(j, \varphi)|_{\varphi=0}. \quad (11)$$

Формула (11) – аналог формулы (5). Однако между ними есть два отличия. Во-первых, (11) не является рекуррентной, во-вторых, в ней нет принудительной симметризации по внутренним линиям, т.к. симметризация осуществляется автоматически.

3. ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕНОРМИРОВАННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для того чтобы формула (11) имела какую-нибудь ценность, необходимо построить операторы Δ^n , обладающие нужными свойствами. Оказывается, это можно сделать, если воспользоваться рецептом, первоначально предложенным в статье [2]. Там этот рецепт формулировался в четырехмерном импульсном пространстве. В дальнейшем выяснилось, что применительно к диаграммам с достаточно большим количеством внешних импульсов он теряет однозначность. Этот недостаток удалось преодолеть во втором варианте рецепта (см. статью [3]). Правда, при этом пришлось на промежуточных этапах рассматривать пространства с размерностью, отличной от четырех. Здесь явно просматривается аналогия с размерной регуляризацией. Однако в отличие от последней удалось ограничиться импульсными пространствами с натуральными размерностями. Основное утверждение, которое было сделано и доказано в статье [3], выглядит следующим образом.

Пусть p, k_i, k_j ($i, j = 1, \dots, r$) – векторы в 2ζ -мерном пространстве, где $\zeta \geq 2$, причем ζ – целое, положительное. Пусть в пространстве с размерностью d ($d < 2\zeta$) все скаляры $p^2, pk_i, k_i k_j$ независимы, пусть $F(p^2, pk_i, k_i k_j)$ – скалярная функция скалярных аргументов, интегрируемая по p в любой компактной области. Пусть F представима в виде

$$F(p^2, pk_i, k_i k_j) = F_{1\nu}(p^2, pk_i, k_i k_j) + F_{2\nu}(p^2, pk_i, k_i k_j), \quad (12)$$

где ν – любое натуральное число, $(p^2)^\nu F_{1\nu} \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$, а $(p^2)^\nu F_{2\nu}$ является полиномом по $p^2, pk_i, \ln p^2$. Тогда в формуле

$$\begin{aligned} \Phi(k_i k_j, \epsilon) &= (-1)^\zeta (\mu^2)^{-\epsilon} \pi^{2-\zeta+\epsilon} \Gamma^{-1}(\epsilon) \times \\ &\times \int d^{2\zeta} p \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^{\zeta-2} U(\omega) \mathcal{P}_2 F(p^2, pk_i, k_i k_j) \end{aligned} \quad (13)$$

интегралы сходятся, Φ аналитична по ϵ в области $0 \leq \operatorname{Re} \epsilon < 1$ с возможными полюсами в точке $\epsilon = 0$, Φ является скалярной функцией независимых скалярных аргументов $k_i k_j$, не зависящей от ζ при $2\zeta > d$. В формуле (13) функция Γ – гамма-функция, μ – параметр размерности массы, а операторы $\mathcal{P}_\nu$ и U определяются равенствами

$$\mathcal{P}_\nu F = F_{1\nu}, \quad U F_{1\nu}(p^2, pk_i, k_i k_j) = F_{1\nu}(p^2 + \omega^2, pk_i, k_i k_j).$$

Кратко прокомментируем формулу (13). Фигурирующий в ней оператор $\mathcal{P}_2$ улучшает поведение функции $F(p^2, pk_i, k_i k_j)$ при больших p , позволяя избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. К сожалению, в результате действия этого оператора функция F приобретает неинтегрируемые особенности при $p \rightarrow 0$. Для регуляризации этих особенностей служит оператор $U(\omega)$. Именно для однозначного определения этого оператора приходится рассматривать импульсные пространства с размерностями, большими четырех. Это связано с тем, что $U(\omega)$ добавляет ω^2 к аргументу p^2 и не меняет аргументы pk_i . Для однозначности этой процедуры все аргументы должны

быть независимыми. После того как эта независимость достигнута (в пространстве с размерностью d), дополнительное увеличение размерности результата не меняет, т.к. интегрирование по этим дополнительным размерностям в точности компенсируется дополнительными дифференцированиями по ω^2 .

В действительности справедливо еще более сильное утверждение. После того как оператор $U(\omega)$ добавил ω^2 к нужному аргументу в обеих частях равенства (13), можно перейти к рассмотрению варианта, когда векторы k_i и k_j лежат в четырехмерном физическом пространстве. В этом случае все интегрирования по компонентам p , ортогональным физическому пространству, скомпенсируются дифференцированиями по ω^2 . Кроме того, легко убедиться, что операция

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma^{-1}(\epsilon) \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1}$$

эквивалентна операции $\lim_{\omega^2 \rightarrow 0}$, если такой предел существует.

Все это позволяет на функциях типа (12) определить операцию перенормированного интегрирования формулой

$$\begin{aligned} \int d\mu(p) \dots &= \mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0) (-1)^\zeta (\mu^2)^{-\epsilon} \pi^{2-\zeta} \Gamma^{-1}(\epsilon) \int d^2\zeta p \times \\ &\times \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^{\zeta-2} U(\omega) \mathcal{P}_2 \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь $\mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)$ — операция разложения в ряд Лорана по ϵ и удержания члена порядка ϵ^0 .

Из теоремы Вайнберга [4] и ее обобщения [5] следует, что в том случае, когда пропагатор $D_{uv}^n(p)$ замыкает некоторый цикл внутри диаграммы, подынтегральное выражение в формулах (2) и (8) имеет структуру (12), поэтому в них следует сделать замену $\int dp \dots \rightarrow \int d\mu(p) \dots$. Кроме этого, возможна тривиальная с точки зрения процедуры перенормировок ситуация, когда пропагатор $D_{uv}^n(p)$ оказывается элементом незамкнутого цикла. Для амплитуд Фейнмана в этом случае в подынтегральном выражении присутствует δ -функция, в аргументе которой стоит импульс p . Для производящего функционала $Z(j)$ в подынтегральном выражении стоит $j(p)$. Без ограничения общности всегда можно считать, что ток $j(p)$ является достаточно хорошей функцией, например, принадлежащей пространству Шварца. И в том, и в другом случаях обычный интеграл $\int dp$ существует и не требует расширения. Надо только иметь в виду, что при последующих интегрированиях мы можем столкнуться с ультрафиолетово-расходящимися интегралами, для регуляризации которых придется пользоваться формулой (14). Поэтому и в сходящихся интегралах надо считать, что импульсные пространства изначально обладают достаточно высокой размерностью.

Формула (14) имеет один существенный недостаток — в ней фигурирует оператор $\mathcal{P}_2$. При рассмотрении простых диаграмм не составляет большого труда разложить подынтегральное выражение согласно формуле (12) и явно построить оператор $\mathcal{P}_2$. Для сложных диаграмм это весьма затруднительно. Оказывается, что от операторов $U(\omega)$ и $\mathcal{P}_2$

можно избавиться, переписав формулу (14) в виде

$$\int d\mu(p) F(p^2, pk_i) = \mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0) (-1)^{\zeta-\xi} (\mu^2)^{-\epsilon} \pi^{\xi-\zeta+\epsilon} \Gamma^{-1}(\epsilon) \times \\ \times \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^{2\zeta} p (p^2 + \mu^2)^{-\beta} \int_0^\infty d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^{\zeta-\xi} F(p^2 + \omega^2, pk_i). \quad (15)$$

Здесь предел по β играет роль аналитического продолжения в нуль от тех значений β , при которых интеграл по p сходится. Формула (15) написана для несколько более общего случая, чем формула (14). В последней физическая размерность считалась равной 4, в формуле (15) она полагается равной 2ζ . Так же как в формуле (13), размерность 2ζ ограничена снизу величиной d (теперь $d \geq 2\zeta$). Кроме того, при очень плохом поведении F в ультрафиолетовой области для сходимости интеграла по ω может возникнуть дополнительное ограничение снизу на ζ . Практически, правда, в перенормируемых теориях это ограничение оказывается более слабым. В любом случае ζ должно быть выбрано настолько большим, чтобы результат перенормированного интегрирования, определяемого формулой (15), перестал зависеть от дальнейшего увеличения ζ . В формуле (15) предполагается, что функция $F(p^2, pk_i)$ допускает разложение (12). Аргументы $k_i k_j$ у этой функции опущены, поскольку для дальнейшего они несущественны.

Заметим, что операторы $U(\omega)$ и $\mathcal{P}_\nu$ в формуле (15) отсутствуют. Впрочем, операция $U(\omega)$ просто выполнена явно. Операция $\mathcal{P}_\nu$ в (15) также присутствует, но неявно. Убедимся в этом. Будем рассматривать F как функцию векторов p, k_i ($i = 1, \dots, r$) пространства $S_{2\zeta}$ размерности 2ζ . Пусть векторы k_i лежат в его подпространстве S_d . Обозначим через $p_1, \dots, p_d$ проекции вектора p на орты пространства S_d и рассмотрим интеграл (15) от функций F вида

$$\tilde{F}(p, k_i) = C(k_i) (p_1)^{2\alpha_1} \dots (p_d)^{2\alpha_d} (p^2)^\alpha (\ln p^2)^{\alpha_0},$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ — целые неотрицательные числа. При $\alpha \geq -\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} = \xi + \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ и $\text{Re } \beta > \tilde{\alpha} + \alpha + \epsilon$ интегралы в (15) от $\tilde{F}$ сходятся. При $\alpha_0 = 0$ они легко вычисляются явно и приводят к выражению вида

$$(\mu^2)^{-\beta} \Gamma^{-1}(\beta) \Gamma(\beta - \alpha - \tilde{\alpha} - \epsilon) \mathcal{M}, \quad (16)$$

где в $\mathcal{M}$ собраны все несущественные множители, которые конечны и не зависят от β . Совершим теперь в (16) предельный переход $\beta \rightarrow 0$, обходя полюсы Γ -функции. В результате получим нуль. При $\alpha_0 \neq 0$ интегралы (15) вычисляются с помощью α_0 -кратного дифференцирования выражения (16) по α . В результате опять-таки получается нуль.

Отсюда следует, что для функций F вида (12) правая часть формулы (15) не меняется при замене F на $\mathcal{P}_\xi F$. Поэтому можно считать, что оператор $\mathcal{P}_\xi$ в правой части (15) эффективно присутствует.

Оказывается, что результат, получаемый с помощью формулы (15), совпадает с тем, который можно получить в формализме размерной регуляризации в варианте, предложенном Вильсоном [6, 7]. Убедиться в этом можно следующим образом. Так как функция F в правой части (15) стоит под знаком дифференцирования, то, не меняя результата, из нее можно вычесть несколько первых членов разложения в ряд Маклорена. В результате этого выражение, стоящее в правой части (15) после оператора $\mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)$, перепишется в виде

$$(\mu^2)^{-\epsilon} I(\xi, \epsilon) \equiv (\mu^2)^{-\epsilon} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^{2\zeta} p (p^2 + \mu^2)^{-\beta} I_{\perp}(p; \epsilon - \zeta + \xi), \quad (17)$$

где

$$I_{\perp} = (-1)^{\zeta-\xi} \pi^{\xi-\zeta+\epsilon} \Gamma^{-1}(\epsilon) \int_0^{\infty} d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial \omega^2} \right)^{\zeta-\xi} \left[F(p^2 + \omega^2, pk_i) - \sum_{l=0}^{\zeta-\xi-1} \frac{(\omega^2)^l}{l!} F^{(l)}(p^2, pk_i) \right]. \quad (18)$$

Если в (18) интеграл взять $(\zeta - \xi)$ раз по частям, то получим

$$I_{\perp} = \pi^{\xi-\zeta+\epsilon} \Gamma^{-1}(\epsilon - \zeta + \xi) \int_0^{\infty} d\omega^2 (\omega^2)^{\epsilon-1-\zeta+\xi} \times \\ \times \left[F(p^2 + \omega^2, pk_i) - \sum_{l=0}^{\zeta-\xi-1} \frac{(\omega^2)^l}{l!} F^{(l)}(p^2, pk_i) \right]. \quad (19)$$

По терминологии Вильсона формула (19) представляет собой не что иное, как определение интеграла от функции $F(p^2 + \omega^2, pk_i)$ по “поперечному пространству” нецелой размерности $2(\epsilon - \zeta + \xi)$. В свою очередь, формула (17) определяет $I(\xi, \epsilon)$ как интеграл по “продольному пространству” целой положительной размерности 2ζ от $I_{\perp}(p)$. Совместно формулы (17) и (19) задают $I(\xi, \epsilon)$ как интеграл нецелой размерности $2(\xi + \epsilon)$ от функции $F(p, k_i)$. В подходе Вильсона доказывается, что результат такого интегрирования не зависит от конкретного значения ζ , которое используется на промежуточных этапах. Это значение должно лишь быть достаточно велико, чтобы продольное пространство размерности 2ζ могло бы “вместить” в себя все внешние векторы k_i , оставляя независимыми между собой все их скалярные произведения. Это согласуется со сделанным после формулы (13) утверждением о том, что при достаточно больших ζ результат от ζ не зависит.

Таким образом, перенормированный интеграл $\int d\mu(p) \dots$ можно рассматривать как действие оператора $\mathcal{L}(\epsilon \downarrow 0)$ на интеграл нецелой размерности $2(\xi + \epsilon)$. Если необходимо вычислить повторный перенормированный интеграл $\int d\mu(p_2) \int d\mu(p_1)$, то удобно операции $\mathcal{L}(\epsilon_1 \downarrow 0)$, $\mathcal{L}(\epsilon_2 \downarrow 0)$ выполнять не после каждого очередного интегрирования по внутреннему импульсу, а после совершения всех интегрирований. В этом случае можно будет воспользоваться достаточно хорошо разработанной техникой интегрирования по

пространствам нецелой размерности. Надо только иметь в виду, что каждое такое интегрирование проводится со своим значением ϵ (ϵ_1 , ϵ_2 и т.д.). Для перехода к физической размерности 2ξ нужно к полученному результату последовательно применять операции $\mathcal{L}(\epsilon_1 \downarrow 0)$, $\mathcal{L}(\epsilon_2 \downarrow 0)$ и т.д.

4. ПЕРЕНОРМИРОВАННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕКТОРНЫХ И СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Если в рассматриваемой модели фигурируют векторные и (или) спинорные поля, то правила построения перенормированного интеграла должны быть несколько дополнены. В том случае, когда импульс интегрирования лежит на незамкнутой линии, все остается без изменения. Поэтому дальше будем считать, что импульс интегрирования p — это петлевой импульс.

На первом этапе учтем только векторные поля. В этом случае при вычислении производящего функционала $Z(j)$ будут возникать интегралы, в которых скалярная подынтегральная функция F зависит от импульсов как явно, так и неявно через векторные функции φ и j (от петлевого импульса зависимость только явная). Аналогично скалярному случаю величину F будем рассматривать как явную функцию векторных аргументов: импульсов (учитываем только явную зависимость), а также векторов φ и j . Считаем, что они имеют ту же размерность, что и импульсы. В качестве скалярных аргументов функции F примем всевозможные скалярные произведения векторов: p (импульса интегрирования), k_i (внешних импульсов), векторов φ и j . Чтобы можно было считать все эти скалярные произведения независимыми, придется размерность 2ξ векторного пространства выбрать достаточно большой. Независимость необходима потому, что для определения перенормированного интегрирования мы опять хотим воспользоваться формулой (15), в правой части которой только аргумент p^2 заменяется на $p^2 + \omega^2$, а к остальным аргументам (теперь их будет больше, чем указано в (15)) никаких добавок не делается.

Результат перенормированного интегрирования не должен зависеть от размерности 2ξ при достаточно больших ξ . Поэтому все скалярные функции скалярных аргументов должны иметь один и тот же вид при любой размерности. Это, в свою очередь, требует ковариантности по отношению к размерности сверток по векторным (тензорным) индексам. Этого можно добиться, если для всех векторных и тензорных величин использовать только контравариантные компоненты, а свертки контравариантных тензоров производить с помощью ковариантного метрического тензора. Для последнего следует отказаться от покомпонентного представления, а рассматривать его как линейный функционал, который каждому контравариантному тензору ранга r ($r \geq 2$) сопоставляет контравариантный тензор ранга $r - 2$, причем вид этого сопоставления не зависит от ξ . В частности, контравариантному метрическому тензору $g^{\nu\lambda}$ сопоставляется число 2ξ (физическая размерность), а не 2ξ . Последнее число получилось бы, если бы мы определили свертку как суммирование по индексам.

Используя приведенные выше правила, по формуле (11) мы можем вычислить про-

изводящий функционал $Z(j)$. Аргументами этого функционала будут токи $j(k_i)$, каждый из которых является векторной функцией 2ζ -мерного внешнего импульса k_i . Однако это не означает, что $Z(j)$ – производящий функционал функций Грина в 2ζ -мерном пространстве. Дело в том, что перенормированное интегрирование, определяемое формулой (15), – это фактически интегрирование по пространству физической размерности 2ζ , только определенное опосредованным образом. Если использовать терминологию размерной регуляризации, то при каждом перенормированном интегрировании вначале выполняется интегрирование по 2ζ -мерному пространству, а затем производится аналитическое продолжение по размерности импульса интегрирования в точку 2ζ . Все это нужно только для того, чтобы однозначным образом ввести параметр ω^2 в подынтегральное выражение.

Поскольку $Z(j)$ является скалярной функцией скалярных аргументов (скалярных произведений импульсов и векторных токов), то ничто не мешает нам перейти по всем переменным к физической размерности 2ζ . Для этого достаточно считать, что эти аргументы являются скалярными произведениями 2ζ -мерных векторов. Нужно только иметь в виду, что число независимых скалярных произведений векторов при этом сократится. Поэтому, если функционал $Z(j)$ рассматривать как функцию скалярных аргументов, то после перехода к физической размерности область допустимых значений аргументов сузится.

Рассмотрим теперь случай, когда в физической модели фигурируют спинорные поля. Опять-таки для однозначного введения в подынтегральное выражение параметра ω^2 нужно исходить из высокой размерности импульсного пространства. Вместе с тем, если вести рассмотрение только до конечного порядка теории возмущений, то достаточно с самого начала ограничиться конечной размерностью 2ζ .

В пространстве такой конечной размерности не представляет никакого труда ввести спиноры и гамма-матрицы Дирака, обладающие обычными свойствами, в частности, для матриц Дирака свойствами антикоммутации

$$\gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\nu = 2g^{\nu\lambda}, \quad \nu, \lambda = 1, \dots, 2\zeta,$$

где $g^{\nu\lambda}$ – контравариантный метрический тензор в пространстве размерности 2ζ . В таком пространстве матрицы Дирака имеют размерность $2^\zeta \times 2^\zeta$. Значит, существует именно столько линейно независимых матриц такой размерности. В качестве них удобно выбрать следующие полностью антисимметричные структуры:

$$\Gamma^{[\nu_1 \dots \nu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \delta_{[\lambda_1 \dots \lambda_n]}^{[\nu_1 \dots \nu_n]} \gamma^{\lambda_1} \dots \gamma^{\lambda_n}, \quad (20)$$

которые в [8] названы A -произведениями. Здесь $\delta_{[\lambda_1 \dots \lambda_n]}^{[\nu_1 \dots \nu_n]}$ – обобщенный символ Кронекера. Это детерминант матрицы $n \times n$ с элементами $\delta_{\lambda_j}^{\nu_i}$ – обычными символами Кронекера. По определению полагается, что при $n = 0$ матрица $\Gamma^{[0]} = 1$, а при $n = 1$ матрица $\Gamma^{[\nu]} = \gamma^\nu$. Ясно, что при $n > 2\zeta$ матрицы Γ тождественно равны нулю.

Для произведений γ -матриц справедлив аналог теоремы Вика для ферми-полей. При этом роль нормальных произведений играют структуры $\Gamma^{[\nu_1 \dots \nu_n]}$, а роль сверток – компоненты метрического тензора $g^{\nu\lambda}$, т.е. обычное произведение γ -матриц равняется сумме всех соответствующих A -произведений со всевозможными спариваниями (с учетом знаков), включая A -произведение без спариваний. Если в произведении γ -матриц в качестве сомножителей входят A -произведения, то из числа слагаемых надо исключить члены, в которых спариваются γ -матрицы, принадлежащие одному A -произведению.

В моделях со спинорными полями производящий функционал $Z(\bar{j}, j)$ функций Грина также можно представить в виде скалярной функции скалярных аргументов, но число тензорных структур, из которых могут быть построены эти аргументы, увеличивается за счет величин, содержащих спинорные токи $\bar{j}$ и j . На промежуточных этапах построения $Z(\bar{j}, j)$ будут возникать конструкции со спинорными полями ϕ и $\bar{\phi}$.

Для того чтобы вся последующая процедура перенормировки была однозначной, нужно обеспечить однозначность рецепта построения таких величин. Проще всего этого добиться, создав исчерпывающий список базовых конструкций такого рода, из которых остальные могут быть получены алгебраическими действиями. В качестве таких базовых конструкций удобно выбрать величины, которые здесь будут именоваться тензорными токами

$$J^{[\nu_1 \dots \nu_n]}(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi} * \Gamma^{[\nu_1 \dots \nu_n]} * \psi, \quad (21)$$

где матрицы Γ определяются формулой (20). Спиноры ψ – это либо j , либо ϕ . Аналогично для $\bar{\psi}$. При этом возможны различные сочетания спинорных токов и полей. Символ $*$ в (21) означает свертку по спинорным индексам.

Вообще говоря, тензоры типа (21) связаны между собой тождествами Фирца и не являются вполне независимыми. Это в принципе могло бы нарушить однозначность разложения по базовым тензорным токам величин, встречающихся при построении функционала $Z(\bar{j}, j)$. Однако в рамках теории возмущений это несущественно. Дело в том, что в любом конечном порядке теории возмущений будут возникать токи $J^{[\nu_1 \dots \nu_n]}$ с ограниченным значением n . Такие токи независимы, если $\bar{\psi}$ и ψ – спиноры в пространстве достаточно высокой размерности 2ζ .

Функционал $Z(\bar{j}, j)$ будем строить с помощью формулы (11). Для этого нужно знать, как действует оператор (10) в случае спинорных полей. Этот оператор состоит из нескольких операций, разберем их. Во-первых, это варьирование по полям. Его следует совершать по обычным правилам, считая, что в данном случае φ_v и φ_u – это ϕ и $\bar{\phi}$. Во-вторых, это свертка по спинорным индексам. Здесь есть одна тонкость, аналогичная той, которая имеется в случае свертки векторных индексов. Для того чтобы результат перенормировки не зависел от размерности 2ζ , которая используется на промежуточных этапах, операция свертки должна быть определена ковариантным образом по отношению к размерности. Поэтому от определения свертки как суммирования по спинорным индексам следует отказаться, а определить ее как линейную операцию, которая спинору и спинорной матрице сопоставляет другой спинор, а спинору и сопряженному спинору – число, причем это число не должно зависеть от размерности 2ζ .

Реально с этим числом приходится иметь дело, когда действие оператора (10) приводит к образованию замкнутой спинорной петли. След нужно определить как линейную операцию, которая единичной матрице вне зависимости от размерности пространства сопоставляла бы число 2ξ – размерность физического пространства.

Наконец, третья операция, которая должна быть задана в операторе (10), – интегрирование. Его мы опять определим с помощью формулы (15), только сделаем уточнение по поводу введения параметра ω^2 . Так же как в случае скалярных полей, этот параметр будем прибавлять только к квадрату импульса интегрирования p . При наличии в модели спинорных и (или) векторных полей подынтегральная скалярная функция F будет зависеть от p не только через p^2 и pk_i , но и через свертки вектора p с тензорными токами вида (21) и (или) векторными полями и токами. При этом надо позаботиться о том, чтобы зависимость от p^2 была выделена однозначным образом. Применительно к спинорным полям это означает, что спиноры ψ и $\bar{\psi}$ должны входить в F только через антисимметричные тензорные токи вида (21). Этого всегда можно добиться, разлагая все произведения гамма-матриц на A -произведения.

На окончательном этапе вычисления функционала $Z(\bar{j}, j)$ нужно перейти в физическую размерность 2ξ . Для этого функционал $Z(\bar{j}, j)$ следует рассматривать как функцию скалярных аргументов – свертки различных тензоров, и, сохраняя вид функциональной зависимости, считать, что эти тензоры принадлежат физическому пространству. В частности, это значит, что в тензорных токах вида (21), через которые окончательно будет выражен функционал $Z(\bar{j}, j)$, следует, во-первых, считать, что спиноры $\bar{j}$ и j имеют физическую размерность; во-вторых, все токи с $n > 2\xi$ положить равными нулю; в-третьих, сделать то же самое для всех тензорных токов, у которых хотя бы для одного индекса $\nu_i > 2\xi$. Здесь мы опять сталкиваемся с тем, что при переходе в физическую размерность область допустимых значений скалярных аргументов $Z(\bar{j}, j)$ сужается.

В моделях со спинорными полями при использовании перенормировки по линиям удобно фигурирующие в модели поля разбить на типы так, чтобы все спинорные поля попали в те типы (или один тип), для которых операторы Δ^n действуют в первую очередь. Для большинства моделей число расходящихся диаграмм, в которых имеются только спинорные линии, конечно. После вычисления таких диаграмм по спинорным полям (токам) можно будет переходить в физическую размерность. Это приведет к тому, что во всех последующих выкладках будут фигурировать только физические γ -матрицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый вариант перенормировки фактически полностью сохраняет математический аппарат размерной регуляризации. Это следует из того, что если в формуле (15) интегрирование по импульсу с мерой $d^{2\xi}p$ объединить с интегрированием по ω с мерой $d\omega^2(\omega^2)^{\epsilon-1}$, то получится операция, аналогичная операции интегрирования в пространстве с размерностью $2(\xi + \epsilon)$. Более явно это заключение следует из дока-

занной эквивалентности интегрирования по мере $d\mu(p)$ вильсоновскому определению интеграла нецелой размерности.

Вместе с тем в предлагаемой схеме перенормировок этот математический аппарат оторван от идеи пространства с нецелой размерностью. Это, в частности, снимает вопрос о введении векторов и спиноров нецелой размерности. В размерной регуляризации, на мой взгляд, этот пункт всегда выглядел очень искусственно.

В данной статье приведено только описание перенормировочной схемы. Вопросы симметрии, для изучения которых данная схема в первую очередь предназначена, не обсуждались. Забегая вперед, следует сказать, что предлагаемая схема оказывается очень удобной для получения обобщенных тождеств Уорда и изучения аномалий. Например, с ее помощью в моделях типа Янга–Миллса, с одной стороны, легко получаются обобщенные тождества Уорда, а с другой стороны, явно видно, что за аномалии в тождествах Уорда для аксиального тока ответственны только однопетлевые диаграммы.

Описанная перенормировка оказывается совместной с суперсимметрией. Во всяком случае, в простейших вариантах суперсимметрий, в частности в модели Весса–Зумино, функции Грина, регуляризованные с ее помощью, удовлетворяют стандартным тождествам Уорда. Приложениям предлагаемой перенормировочной схемы к конкретным моделям предполагается посвятить дальнейшие публикации.

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность И. В. Тютину за весьма полезное обсуждение. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00726).

Список литературы

- [1] Д. А. Славнов. ТМФ. 1997. Т. 110. С. 399.
- [2] В. А. Ильин, М. С. Имашев, Д. А. Славнов. ТМФ. 1982. Т. 52. С. 177.
- [3] Д. А. Славнов. ТМФ. 1985. Т. 62. С. 335.
- [4] S. Weinberg. Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 838.
- [5] Д. А. Славнов. ТМФ. 1973. Т. 17. С. 169.
- [6] K. G. Wilson. Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2911.
- [7] Дж. Коллинз. Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [8] А. В. Селихов, Д. А. Славнов. ТМФ. 1986. Т. 67. С. 186.

Поступила в редакцию 3.VII.1997 г.