Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Аткинсон, С. Б. Лобб, Ф. В. Нийхоф, Интегрируемое многокомпонентное квад-уравнение и его лагранжева формулировка, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 3, 363–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:45:50

© 2012 г. Дж. Атkinson*, С. Б. Лобб[†], Ф. В. Нийхоф[‡]

ИНТЕГРИРУЕМОЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ КВАД-УРАВНЕНИЕ И ЕГО ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА

Предлагается иерархия дискретных систем, в которой первыми членами являются решеточное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза и решеточное модифицированное уравнение Буссинеска. N -й член иерархии представляет собой N -компонентную систему, определенную на элементарной ячейке двумерной решетки. Система является многомерно совместной, причем построен лагранжиан, поддерживающий это свойство, т. е. обладающий нужным свойством замыкания.

Ключевые слова: интегрируемые системы, дискретные уравнения, редукции, лагранжева формулировка, вариационный принцип.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, которое теперь называется решеточным модифицированным уравнением Кортевега–де Фриза (мКдФ), появилось, с точностью до точечных преобразований, еще в 1894 г. в работе Бьянки [1] в качестве условия перестановочности преобразований Беклунда для уравнения синус-Гордон. Еще раз оно появилось в качестве уравнения в частных производных, интегрируемого с помощью метода Хироты, в работе [2], а с помощью алгоритма непосредственной линеаризации оно было выведено в [3].

Чтобы описать решеточное уравнение мКдФ с современной точки зрения, возьмем $v = v(l, m)$ в качестве зависимой переменной, зависящей от положения (l, m) на двумерной решетке, где l и m – смещения на целые числа, и пусть p, q – параметры, связанные с направлениями решетки l, m соответственно. Тогда решеточное уравнение мКдФ принимает вид

$$p(v\hat{v} - \hat{v}\hat{v}) = q(v\hat{v} - \hat{v}\hat{v}), \quad (1)$$

где волна сверху означает смещение в направлении l , а шляпка – смещение в направлении m .

*University of Sydney, Sydney, Australia. E-mail: james.atkinson@sydney.edu.au

[†]La Trobe University, Melbourne, Australia. E-mail: sarahlobb@gmail.com

[‡]University of Leeds, Leeds, UK. E-mail: frank.nijhoff@gmail.com

Обобщенная схема непосредственной линеаризации, предложенная в работе [4], приводит к аналогу решеточного уравнения мКдФ более высокого порядка, в котором можно узнать решеточную версию модифицированного уравнения Буссинеска [5]. Это скалярное уравнение на шаблоне из девяти точек решетки, которое имеет вид

$$\left(\frac{p^2\hat{v}-q^2\hat{v}}{p\hat{v}-q\hat{v}}\right)\frac{\hat{\hat{v}}}{\hat{v}}-\left(\frac{p^2\tilde{\hat{v}}-q^2\tilde{\hat{v}}}{p\tilde{\hat{v}}-q\tilde{\hat{v}}}\right)\frac{\hat{\hat{\tilde{v}}}}{\tilde{\hat{v}}}=p\left(\frac{v}{\tilde{v}}-\frac{\hat{v}}{\tilde{\hat{v}}}\right)-q\left(\frac{v}{\hat{v}}-\frac{\tilde{v}}{\hat{\tilde{v}}}\right). \quad (2)$$

Более удобная форма этого уравнения появилась в работе [6], а именно спаренная система уравнений для двух зависимых переменных v, w , определенная на элементарной ячейке:

$$\frac{p\hat{v}-q\tilde{v}}{\hat{\hat{v}}}=\frac{p\tilde{v}\hat{w}-q\hat{v}\tilde{w}}{v\hat{\tilde{w}}}=\frac{p\tilde{w}-q\hat{w}}{w}. \quad (3)$$

Скалярное уравнение (2) можно вывести из уравнения (3), исключая одну из переменных. Как показано в работе [6], в любом случае получается дискретный аналог потенцированного модифицированного уравнения Буссинеска [5]. Симметрии и законы сохранения для двухкомпонентной версии этого уравнения были выведены в работе [7].

Решеточная иерархия Гельфанда–Дикого (ГД), т. е. система, представленная в работе [4], которая обращается в непрерывную иерархию ГД в соответствующих пределах¹⁾, представляет собой многокомпонентную систему, первыми представителями которой являются решеточное потенцированное уравнение КдФ, а также решеточная версия уравнения Буссинеска. Решеточная “модифицированная” иерархия ГД предложена также в приложении к статье [4]. Первые два представителя иерархии, уравнения (1) и (2), даны явно, а ее высшие представители остались в неявной форме из-за возрастающей с увеличением размера шаблона сложности написания явной формы соответствующих скалярных уравнений.

В настоящей работе мы изучаем иерархию систем, двумя первыми представителями которой являются уравнения (1) и (3). В отличие от метода непосредственной линеаризации, представленного в работе [4], она будет получена из дискретного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) в представлении Хироты [10] путем редукции. В действительности точная связь между системой, изучаемой здесь, и системой, рассмотренной в работе [4], еще не известна, за исключением двух отмеченных выше случаев. Так же как и в первых двух случаях (1), (3), каждая система определена на элементарной ячейке двумерной решетки (т. е. является квад-уравнением); в частности, любая из них многомерно совместна и обладает представлением Лакса. Наша основная цель – представить вывод этой иерархии, а также лагранжевой формулировки, которая сохраняет ее свойство совместности.

Новый тип вариационного принципа для многомерно совместных систем был предложен в работе [11]. Он опирается на свойство замыкания соответствующего лагранжиана, которое позволяет интерпретировать его как замкнутую форму. Лагранжиан с таким свойством был предложен в работе [12] для общего члена решеточной иерархии ГД. Здесь мы получим лагранжиан общего члена иерархии, для

¹⁾В 1970-х годах представители русской школы, включая Гельфанда и Дикого, изучали спектральные задачи высших порядков, обобщающие аспекты уравнения Кортевега–де Фриза (см., например, работы [8], [9]), поэтому системы такого типа называются иерархиями ГД.

которого имеется ясная связь с общим членом иерархии дискретного билинейного уравнения КП, лагранжиан которого приведен в работе [13].

В разделе 2 мы выведем N -компонентную систему на решетке, получим пару Лакса, опишем ее многомерную совместность и приведем некоторые важные симметрии. В разделе 3 мы представим лагранжеву структуру, а в разделе 4 мы продемонстрируем, что этот лагранжиан удовлетворяет соотношению замыкания на решениях системы. Раздел 5 содержит некоторые дополнительные замечания.

2. СИСТЕМА

В работе [14] было замечено, что уравнения с одной и двумя переменными (1) и (3) можно получить с помощью естественной редукции из дискретного уравнения КП в представлении Хироты [10]. Тогда обобщение этой редукции приводит к четырехугольному решеточному уравнению для N переменных $v_1, \dots, v_N$, которое можно записать в виде

$$\frac{p\hat{v}_{n-1}\tilde{v}_n - q\tilde{v}_{n-1}\hat{v}_n}{\hat{v}_{n-1}v_n} = \frac{p\hat{v}_n\tilde{v}_{n+1} - q\tilde{v}_n\hat{v}_{n+1}}{\hat{v}_nv_{n+1}}, \quad n \in \{1, \dots, N\}, \quad (4)$$

где считается²⁾, что $v_0 = v_{N+1} = 1$. Эта система, содержащая (1) и (3) в качестве случаев $N = 1$ и $N = 2$, является основным объектом изучения в настоящей статье.

2.1. Редуцирование дискретного уравнения КП в представлении Хироты. Начнем с редукции, из которой можно получить уравнение (4). Исходным пунктом является дискретное уравнение КП в представлении Хироты [10]

$$\bar{\tau}\hat{\tau} = p\hat{\tau}\tilde{\tau} - q\tilde{\tau}\hat{\tau}, \quad (5)$$

где $\tau = \tau(l, m, n)$, $\tilde{\tau} = \tau(l + 1, m, n)$, $\hat{\tau} = \tau(l, m + 1, n)$, $\bar{\tau} = \tau(l, m, n + 1)$ и т. д. — значения зависимой переменной τ как функции независимых переменных $l, m, n \in \mathbb{Z}$. В этом уравнении $p, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ являются параметрами, они часто принимаются за единицу, что с точностью до неавтономной замены переменных не уменьшает общности. Однако такая замена переменных будет невозможна после проведения редукции. Преобразование Беклунда можно получить из свойства совместности уравнения (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}\hat{\sigma} &= p\hat{\tau}\tilde{\sigma} - \lambda\tilde{\tau}\bar{\sigma}, \\ \bar{\tau}\hat{\sigma} &= q\hat{\tau}\tilde{\sigma} - \lambda\hat{\tau}\bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом если $\tau = \tau(l, m, n)$ является решением уравнения (5), то спаренная система (6) для σ является совместной и определяет функцию $\sigma = \sigma(l, m, n)$, также удовлетворяющую уравнению (5). Это слабое преобразование Беклунда³⁾. Дейст-

²⁾Это соглашение является удобным способом введения обозначений, который позволяет избежать необходимости разделять уравнения вида (4) на подклассы $n = 1$, $n \in \{2, \dots, N - 1\}$ и $n = N$.

³⁾Вероятно, впервые такая терминология использовалась Маккарти [15], чтобы выделить ситуацию, когда уравнение является только достаточным условием для совместности системы Беклунда, в отличие от строгого преобразования Беклунда, когда уравнение появляется и как необходимое, и как достаточное условие.

вительно, уравнение, появляющееся как условие совместности системы (6), имеет вид

$$\frac{p\hat{\tau}\tilde{\tau} - q\tilde{\tau}\hat{\tau}}{\bar{\tau}\hat{\tau}} = \left[\frac{p\hat{\tau}\tilde{\tau} - q\tilde{\tau}\hat{\tau}}{\bar{\tau}\hat{\tau}} \right]^{-}, \quad (7)$$

причем можно непосредственно убедиться, что уравнения (6) являются преобразованием Беклунда в строгом смысле для этого уравнения. Уравнение (7) лежит на шаблоне из десяти точек, расположенных на трехмерной решетке. Интегрированием можно убедиться, что оно является неавтономной версией уравнения (5).

Уравнение (4) определяет решения уравнения (7), удовлетворяющие следующим дополнительным условиям:

$$\tau(l, m, n + N + 1) = \tau(l, m, n), \quad l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad (8a)$$

$$\tau(l, m, 0) = 1, \quad l, m \in \mathbb{Z}, \quad (8b)$$

что можно заметить, если отождествить

$$v_n(l, m) := \tau(l, m, n), \quad l, m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (9)$$

Первое условие (8a) – просто требование периодичности, а второе условие (8b) несколько необычно, оно состоит из некоторых частных граничных данных.

2.2. Интегрируемость. Изначальное преобразование Беклунда (6) уравнения (7) не сохраняет оба условия (8), но оно совместно с первым условием (8a), т. е. можно написать

$$\sigma(l, m, n + N + 1) = \sigma(l, m, n), \quad l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

не нарушая совместности. Следующее замечание о том, что это преобразование Беклунда уже является линейным по σ , обращает его посредством этой редукции в пару Лакса для уравнения (4). Другими словами, определяя

$$\phi_n(l, m) := \sigma(l, m, n), \quad l, m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \{0, \dots, N\}, \quad (11)$$

и налагая условия (8) и (10), мы редуцируем систему (6) в систему

$$\tilde{\Phi} = L_p(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})\Phi, \quad \hat{\Phi} = L_q(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}})\Phi, \quad (12)$$

где

$$\Phi := [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N]^T, \quad \mathbf{v} := (v_1, \dots, v_N) \quad (13)$$

и

$$L_p(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} p \frac{\tilde{v}_1}{v_1} & -\frac{\lambda}{v_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p \frac{\tilde{v}_2}{v_2} & -\frac{\lambda \tilde{v}_1}{v_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p \frac{\tilde{v} v_N}{v_N} & -\frac{\lambda \tilde{v}_{N-1}}{v_N} \\ -\lambda \tilde{v}_N & 0 & \dots & 0 & p \end{pmatrix} \quad (14)$$

является $(N+1)$ -квадратной матрицей Лакса. Условие совместности уравнений (12)

$$L_p(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\tilde{\mathbf{v}}})L_q(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) - L_q(\tilde{\mathbf{v}}, \hat{\tilde{\mathbf{v}}})L_p(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{0} \quad (15)$$

порождает систему (4).

Многомерная совместность уравнения (4), подобно паре Лакса, в основном унаследована от уравнения (5). Для этого вместо вектора $\mathbf{v} = \mathbf{v}(l, m)$ в пространстве $\mathbb{Z}^2$ рассматривается вектор как функция на d -мерной регулярной решетке $\mathbf{v} = \mathbf{v}(l_1, l_2, \dots, l_d)$, удовлетворяющий системе (4) на любой паре направлений. При этом параметры p, q в системе (4), связанные с изначальными направлениями l и m , нужно заменить на пары параметров, взятые из большего набора $p_1, \dots, p_d$, связанного с соответствующими направлениями $l_1, \dots, l_d$. Совместность такой системы можно проверить прямым вычислением.

2.3. Точечные симметрии. Система (4) инвариантна относительно масштабной симметрии

$$(v_1, \dots, v_N) \rightarrow (\mu_1 v_1, \dots, \mu_N v_N), \quad \mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (16)$$

а также относительно менее очевидного преобразования

$$(v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N) \rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \dots, \frac{v_N}{v_1}, \frac{1}{v_1} \right). \quad (17)$$

Преобразование порождает группу N похожих симметрий уравнения (4). Такие автономные точечные симметрии позволяют уравнению принять альтернативный вид с помощью неавтономного точечного преобразования, которое сохраняет автономную природу уравнения, а также его свойство многомерной совместности (см., например, [16], [17]). Понятно, что если S_1 и S_2 являются (коммутирующими) преобразованиями вектора $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$, взятыми из группы, порожденной симметриями (16) и (17), а $\mathbf{v}$ определяется уравнением (4), то уравнение, определяющее $\mathbf{v}' = [S_1^l \cdot S_2^m](\mathbf{v})$, является как автономным, так и многомерно совместным. Автономная природа уравнения сохраняется благодаря тому, что преобразования S_i являются симметриями, в то время как естественное многомерное расширение преобразования $[S_1^l \cdot S_2^m] \rightarrow [S_1^{l_1} \cdot S_2^{l_2} \cdot S_3^{l_3} \cdot \dots]$ показывает, что свойство совместности тоже сохраняется.

Это важная часть теории преобразований многокомпонентных систем, к которым относится система (4), поскольку инварианты таких преобразований за пределами мультиаффинного класса [18] в настоящее время неизвестны. Менее очевидная симметрия (17) приведена здесь потому, что для выделения действительно разных квад-уравнений в многокомпонентном классе необходимо отдавать себе отчет о наличии всех таких преобразований.

3. ЛАГРАНЖЕВА СТРУКТУРА

Оказалось, что для дискретной системы, в которой все направления решетки эквивалентны, лагранжиан является более естественным объектом, чем гамильтониан, при условии, что он не выделяет никакого направления. Поэтому важной характеристикой многокомпонентного квад-уравнения (4) является его лагранжева структура, которая, как мы увидим, происходит из лагранжевой структуры дискретного уравнения КП в представлении Хироты (5). Более замечательным свойством является его естественная взаимосвязь с многомерной совместностью модели, что будет объяснено в разделе 4.

Лагранжиан системы (4) имеет вид

$$\mathcal{L}_{pq} = \sum_{i=0}^N \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) + \ln \left(\frac{v_{i+1}}{v_i} \right) \ln \left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i} \right) \right\}, \quad (18)$$

который с помощью дискретных уравнений Эйлера–Лагранжа порождает две копии уравнений. Функция Li_2 является дилогарифмической функцией

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-z)}{z} dz, \quad (19)$$

которая возникает во многих областях физики, таких как квантовая электродинамика (например, поляризация вакуума) и проблемы электрических сетей; оно также появляется в связи с алгебраической К-теорией, с теорией представления бесконечномерных алгебр и с комбинаторикой [19].

Под дискретными преобразованиями Эйлера–Лагранжа в нашем случае мы подразумеваем уравнения

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{pq}}{\delta v_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{pq}}{\partial v_i} + T_p^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}_{pq}}{\partial \tilde{v}_i} + T_q^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}_{pq}}{\partial \hat{v}_i} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (20)$$

где T_p и T_q – операторы сдвига в направлении на решетке, связанные с параметрами p и q соответственно. При этом операторы T_p^{-1} , T_q^{-1} являются обычными обратными сдвигами на решетке.

Дискретные уравнения Эйлера–Лагранжа возникают при нахождении экстремума действия

$$S = \sum_l \sum_m \sum_{i=0}^N \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) + \ln \left(\frac{v_{i+1}}{v_i} \right) \ln \left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i} \right) \right\}, \quad (21)$$

где первые две суммы по l и m нужно брать по всей двумерной решетке. На самом деле посмотреть на действие более поучительно, чем на сам лагранжиан, поскольку на этом уровне легко заметить, что мы имеем дело с редукцией билинейного дискретного уравнения КП

$$A_{pq} \bar{\tau} \hat{\tau} + A_{qr} \tilde{\tau} \hat{\tau} + A_{rp} \hat{\tau} \tilde{\tau} = 0; \quad (22)$$

здесь зависимой переменной является τ , а A_{pq} – антисимметричные константы (следовательно, $A_{qp} = -A_{pq}$), связанные с направлениями p, q на решетке. Отождествляя $A_{pr}/A_{pq} = p$, $A_{qr}/A_{pq} = q$ и $\tau = u$, так что уравнение перестает быть ковариантным из-за появления выделенного направления на решетке, получим уравнение (5). Лагранжиан уравнения (22) предложен в работе [13]. Будучи приспособленным

к нековариантному уравнению (5), он эквивалентен следующему действию:

$$S_{\text{KP}} = \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{q\tilde{\tau}\hat{\tau}}{p\hat{\tau}\tilde{\tau}} \right) + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{\tau}\hat{\tau}}{p\hat{\tau}\tilde{\tau}} \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\ln \hat{\tau} \ln \tilde{\tau} - \ln \tilde{\tau} \ln \hat{\tau}) + \ln \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tau} \right) \ln \left(\frac{\hat{\tau}}{\tau} \right) \right\}. \quad (23)$$

Ясно, что, полагая $\tau = v_i$, $\bar{\tau} = v_{i+1}$ и ограничивая сумму по n , мы получим действие редукции (21).

4. СВОЙСТВО ЗАМЫКАНИЯ

Лагранжианы многих интегрируемых систем можно считать замкнутыми формами; они удовлетворяют соотношениям замыкания на решениях при условии, что совместность включается в пространство большей размерности. В некотором смысле это можно рассматривать как многомерную совместность на уровне лагранжиана. Допускается вариационный принцип, который включает геометрию пространства независимых переменных, а также пространства зависимых переменных; поиск экстремума действия при вариации всех переменных, зависимых и независимых, приводит к условиям, которые определяют не только уравнения движения, но и до некоторой степени сами лагранжианы.

В случае двумерных систем имеем лагранжевы 2-формы, например функции Лагранжа, вычисленные на двумерных ячейках. Для многомерно совместных систем можно предположить, что действие должно быть определено на поверхности произвольной размерности, не только размерности 2, и тогда это действие будет суммой значений функции Лагранжа, вычисленных на каждой ячейке этой поверхности. Требование равенства нулю вариации по отношению к поверхности налагает на лагранжиан соотношения замыкания, в то время как вариация по отношению к зависимой переменной порождает уравнения движения.

Можно найти примеры как дискретных, так и непрерывных одномерных систем [20], [21], большой класс двумерных систем [11], [12], [22], а также существует трехмерное дискретное билинейное уравнение КП [13]. В работе [12] показано, что лагранжиан произвольного члена иерархии ГД на решетке подчиняется соотношению замыкания

$$\Delta_p \mathcal{L}_{qr} + \Delta_q \mathcal{L}_{rp} + \Delta_r \mathcal{L}_{pq} = 0 \quad (24)$$

на решениях решеточного уравнения КП (решеточное уравнение КП является следствием уравнений, составляющих саму решеточную иерархию ГД). Здесь оператор Δ_p является разностным оператором в направлении p решетки; снова используя T_p для обозначения оператора сдвига в направлении p и обозначая тождественный оператор id , получим $\Delta_p = T_p - \text{id}$.

Чтобы показать, что лагранжиан (18) удовлетворяет соотношению замыкания (24), нужно привлечь тождество из пяти членов для дилогарифмической функции

$$\text{Li}_2(s) + \text{Li}_2(t) - \text{Li}_2(st) = \text{Li}_2 \left(\frac{s-st}{1-st} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{t-st}{1-st} \right) + \\ + \ln \left(\frac{1-s}{1-st} \right) \ln \left(\frac{1-t}{1-st} \right), \quad (25)$$

которое справедливо для $s, t, st \neq 1$, с точностью до мнимых постоянных членов, а также тождество из двух членов, которое переворачивает аргумент:

$$\text{Li}_2(s) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(-s))^2 - \frac{\pi^2}{6}, \quad (26)$$

для $s \neq 0$. Дополнительные тождества и другую информацию о дилогарифмической функции можно найти в книге [23].

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \tilde{\mathcal{L}}_{pq} + \tilde{\mathcal{L}}_{qr} + \hat{\mathcal{L}}_{rp} - \mathcal{L}_{pq} - \mathcal{L}_{qr} - \mathcal{L}_{rp} = \\ &= \sum_{i=0}^N \left\{ \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right)} + \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right)} + \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right)} - \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right)} - \boxed{\text{Li}_2\left(\frac{p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right)} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) + \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \bar{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\ &\quad + \ln\left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{\bar{v}_i}\right) \ln\left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i}\right) + \ln\left(\frac{\tilde{v}_{i+1}}{\tilde{v}_i}\right) \ln\left(\frac{\hat{v}_i}{\tilde{v}_i}\right) + \ln\left(\frac{\hat{v}_{i+1}}{\hat{v}_i}\right) \ln\left(\frac{\hat{v}_i}{\tilde{v}_i}\right) - \\ &\quad - \ln\left(\frac{v_{i+1}}{v_i}\right) \ln\left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i}\right) - \ln\left(\frac{v_{i+1}}{v_i}\right) \ln\left(\frac{\hat{v}_i}{\tilde{v}_i}\right) - \ln\left(\frac{v_{i+1}}{v_i}\right) \ln\left(\frac{\bar{v}_i}{\tilde{v}_i}\right) \left. \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

Используя дилогарифмическое тождество из двух членов (26) для выражений в штриховых рамках, а также дилогарифмическое тождество из пяти членов (25) для выражений в сплошных рамках, получим

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{i=0}^N \left\{ \text{Li}_2\left(-\frac{p\hat{v}_i q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\hat{v}_i p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) + \text{Li}_2\left(-\frac{\tilde{v}_{i+1} r\hat{v}_i\hat{v}_{i+1} - p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{\hat{v}_{i+1} p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) - \right. \\ &\quad - \text{Li}_2\left(-\frac{p\tilde{v}_{i+1} q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_{i+1} p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{\hat{v}_i r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} - p\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{\tilde{v}_i p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) + \\ &\quad + \ln\left(-\frac{\hat{v}_{i+1} q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{\hat{v}_{i+1} p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) \ln\left(-\frac{q\tilde{v}_i r\hat{v}_i\hat{v}_{i+1} - p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{r\hat{v}_i p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) - \\ &\quad - \ln\left(-\frac{\tilde{v}_i q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{\tilde{v}_i p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) \ln\left(-\frac{q\tilde{v}_{i+1} r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1} - p\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_{i+1} p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{r\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln\left(-\frac{p\hat{v}_i\hat{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}}\right) \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) + \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\
& + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \\
& - \frac{1}{2} (\ln \bar{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \bar{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \bar{v}_{i+1} - \ln \bar{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\
& + \ln \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{\bar{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i} \right) + \ln \left(\frac{\tilde{v}_{i+1}}{\tilde{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\hat{v}_i}{\tilde{v}_i} \right) + \ln \left(\frac{\hat{v}_{i+1}}{\hat{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\hat{v}_i}{\hat{v}_i} \right) \Big\}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Из этих уравнений имеем

$$\begin{aligned}
\hat{v}_i &= \frac{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\tilde{v}_1 - q\hat{v}_1} \frac{v_1}{v_{i+1}}, \\
\hat{v}_i &= \frac{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{q\hat{v}_1 - r\bar{v}_1} \frac{v_1}{v_{i+1}}, \\
\tilde{v}_i &= \frac{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1} - p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\bar{v}_1 - p\tilde{v}_1} \frac{v_1}{v_{i+1}}
\end{aligned} \quad (29)$$

для $i \in \{0, \dots, N\}$, и, конечно, $v_0 = v_{N+1} = 1$ (так что для $i = 1$ получим тривиальные тождества). Полагая также $v_{N+2} = v_1$, получим, что уравнения тривиально удовлетворяются при $i = N + 1$. После подстановки получим

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \sum_{i=0}^N \left\{ \text{Li}_2 \left(-\frac{p\tilde{v}_{i+1}}{r\bar{v}_{i+1}} \frac{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{\hat{v}_{i+1}}{\bar{v}_{i+1}} \frac{r\tilde{v}_{i+1}\bar{v}_{i+2} - p\bar{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2}}{p\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2} - q\tilde{v}_{i+1}\hat{v}_{i+2}} \right) - \right. \\
& - \text{Li}_2 \left(-\frac{p\tilde{v}_{i+1}}{r\bar{v}_{i+1}} \frac{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{\hat{v}_i}{\bar{v}_i} \frac{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1} - p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) + \\
& + \ln \left(-\frac{\tilde{v}_{i+1}}{\bar{v}_{i+1}} \frac{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \ln \left(-\frac{q\hat{v}_{i+1}}{r\bar{v}_{i+1}} \frac{r\tilde{v}_{i+1}\bar{v}_{i+2} - p\bar{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2}}{p\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2} - q\tilde{v}_{i+1}\hat{v}_{i+2}} \right) - \\
& - \ln \left(-\frac{\tilde{v}_i}{\bar{v}_i} \frac{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1} - r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \ln \left(-\frac{q\hat{v}_{i+1}}{r\bar{v}_{i+1}} \frac{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1} - p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) - \\
& - \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \\
& + \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1}} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{r\hat{v}_i\bar{v}_{i+1}}{q\bar{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\ln \left(-\frac{p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1}} \right) \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) + \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\
& + \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_{i+1}) - \\
& - \frac{1}{2} (\ln \bar{v}_i \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \bar{v}_{i+1}) - \frac{1}{2} (\ln \tilde{v}_i \ln \bar{v}_{i+1} - \ln \bar{v}_i \ln \tilde{v}_{i+1}) + \\
& + \ln \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{\bar{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}_i} \right) + \ln \left(\frac{\tilde{v}_{i+1}}{\tilde{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\hat{v}_i}{\tilde{v}_i} \right) + \ln \left(\frac{\hat{v}_{i+1}}{\hat{v}_i} \right) \ln \left(\frac{\hat{v}_i}{\hat{v}_i} \right) \Big\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Ясно, что некоторые из этих членов сокращаются, и формулы приводятся к упрощенному виду:

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} \left\{ 2 \left[\text{Li}_2 \left(-\frac{\hat{v}_{i+1}}{\bar{v}_{i+1}} \frac{r\tilde{v}_{i+1}\bar{v}_{i+2} - p\bar{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2}}{p\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+2} - q\tilde{v}_{i+1}\hat{v}_{i+2}} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{\hat{v}_i}{\bar{v}_i} \frac{r\tilde{v}_i\bar{v}_{i+1} - p\bar{v}_i\tilde{v}_{i+1}}{p\hat{v}_i\tilde{v}_{i+1} - q\tilde{v}_i\hat{v}_{i+1}} \right) \right] + \right. \\
 & + 2 \ln \left(-\frac{r\bar{v}_1 - p\tilde{v}_1}{p\bar{v}_1 - q\tilde{v}_1} \right) \left[\ln \left(\frac{\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+1}}{\hat{v}_{i+1}\bar{v}_{i+1}} \right) - \ln \left(\frac{\hat{v}_i\tilde{v}_i}{\hat{v}_i\bar{v}_i} \right) \right] - \\
 & - \ln p \left[\ln \left(\frac{\tilde{v}_{i+1}\hat{v}_{i+1}}{\hat{v}_{i+1}\bar{v}_{i+1}} \right) - \ln \left(\frac{\tilde{v}_i\hat{v}_i}{\hat{v}_i\bar{v}_i} \right) \right] - \ln q \left[\ln \left(\frac{\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+1}}{\hat{v}_{i+1}\bar{v}_{i+1}} \right) - \ln \left(\frac{\hat{v}_i\tilde{v}_i}{\hat{v}_i\bar{v}_i} \right) \right] + \\
 & + \ln r \left[\ln(\hat{v}_{i+1}\tilde{v}_{i+1}\bar{v}_{i+1}\hat{v}_{i+1}) - \ln(\hat{v}_i\tilde{v}_i\bar{v}_i\hat{v}_i) \right] - 2 \ln r \left[\ln(\hat{v}_{i+1}\bar{v}_{i+1}) - \ln(\hat{v}_i\bar{v}_i) \right] + \\
 & + [(\ln \hat{v}_{i+1})^2 - (\ln \hat{v}_i)^2] - [\ln \tilde{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \tilde{v}_i] + [\ln \hat{v}_{i+1} \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_i] + \\
 & + 2[\ln \bar{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \bar{v}_i] - 2[\ln \bar{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \bar{v}_i \ln \hat{v}_i] + \\
 & + 2[\ln \hat{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_i] - 2[\ln \hat{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_i] - \\
 & - [\ln \tilde{v}_{i+1} \ln \bar{v}_{i+1} - \ln \bar{v}_i \ln \tilde{v}_i] + [\ln \hat{v}_{i+1} \ln \tilde{v}_{i+1} - \ln \tilde{v}_i \ln \hat{v}_i] + [(\ln \bar{v}_{i+1})^2 - (\ln \bar{v}_i)^2] - \\
 & - [\ln \bar{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \bar{v}_i] - [\ln \hat{v}_{i+1} \ln \hat{v}_{i+1} - \ln \hat{v}_i \ln \hat{v}_i] \left. \right\}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

После суммирования все члены сокращаются, в результате получается нуль.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечно, многокомпонентные квад-уравнения, обобщающие уравнение, полученное в работе [4], так же как и уравнение, рассмотренное здесь, представляют интерес. Многомерная совместность использовалась в качестве критерия интегрируемости для получения обобщения решеточного уравнения Буссинеска в работе [24], а отождествление этих систем с обобщенным дисперсионным соотношением в рамках теории непосредственной линеаризации [25] открывает потенциально плодотворный путь в этом направлении. Как показано в п. 2.3, теория преобразований таких систем довольно запутанна даже без привлечения нелокальных преобразований типа преобразований Беклунда.

Существует также иерархия, предложенная в работе [14], в которой двумя низшими представителями являются решеточное уравнение КдФ с шварцианом и решеточное уравнение Буссинеска с шварцианом; эта система была получена непосредственно в связи с модифицированной иерархией (4) путем обобщения преобразования Беклунда, известного для случая $N = 1$ со времен работы [26]:

$$\tilde{z}_n - z_n = \frac{1}{p} \frac{v_{n+1}\tilde{v}_{n-1}}{v_n\tilde{v}_n}, \quad \hat{z}_n - z_n = \frac{1}{q} \frac{v_{n+1}\hat{v}_{n-1}}{v_n\hat{v}_n}, \quad (32)$$

где $n \in \{1, \dots, N\}$ и, как обычно, по нашему соглашению $v_0 = v_{N+1} = 1$. Легко увидеть, что эта система совместна в z_n при условии, что v_n удовлетворяют (4), и,

аналогично, она совместна в v_n при условии, что z_n удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \frac{\hat{z}_{i+1} - z_{i+1}}{\tilde{z}_{i+1} - z_{i+1}} &= \frac{\hat{\tilde{z}}_i - \tilde{z}_i}{\hat{\tilde{z}}_i - \tilde{z}_i}, \quad i \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \frac{p^{N+1}}{q^{N+1}} \prod_{i=1}^N \frac{\tilde{z}_i - z_i}{\hat{\tilde{z}}_i - z_i} &= \frac{\hat{\tilde{z}}_N - \tilde{z}_N}{\hat{\tilde{z}}_N - \tilde{z}_N}. \end{aligned} \quad (33)$$

В отличие от модифицированной иерархии, из которой оно было получено, лагранжева формулировка такой многомерно согласованной иерархии с шварцианом в настоящее время неизвестна.

Лагранжева формулировка многокомпонентного квад-уравнения, предложенная в настоящей работе, способствует прояснению того, что соотношения замыкания и связанный с ними принцип наименьшего действия являются ключевыми свойствами дискретных интегрируемых систем (а в действительности и соответствующих непрерывных систем, см. [22]). Важным мотивирующим фактором для изучения таких структур является их потенциальная физическая значимость; в частности, многообразие лагранжианов представляет собой возможную исходную точку для квантования таких интегрируемых моделей вдоль линии интегрирования по контуру.

Благодарности. Дж. Аткинсон поддержан Australian Research Council (исследовательский грант № DP110104151), С.Б. Лобб поддержана Australian Research Council (исследовательский грант № DP110100077). Визит Ф. В. Нийхофа в La Trobe University (Melbourne), где была выполнена эта работа, также частично финансировался Australian Research Council (грант № DP110100077). В настоящее время работу Ф. В. Нийхофа финансирует Royal Society/Leverhulme Trust Senior Research Fellowship (2011/12).

Список литературы

- [1] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Enrico Spoerri, Pisa, 1894.
- [2] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **43**:6 (1977), 2079–2086.
- [3] F. W. Nijhoff, G. R. W. Quispel, H. W. Capel, *Phys. Lett. A*, **97**:4 (1983), 125–128.
- [4] F. W. Nijhoff, V. G. Papageorgiou, H. W. Capel, G. R. W. Quispel, *Inverse Problems*, **8**:4 (1992), 597–621.
- [5] G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel, *Phys. Lett. A*, **91**:4 (1982), 143–145.
- [6] F. W. Nijhoff, “Discrete Painlevé equations and symmetry reduction on the lattice”, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **16**, eds. A. I. Bobenko, R. Seiler, Oxford Univ. Press, New York, 1999, 209–234.
- [7] P. Xenitidis, F. W. Nijhoff, *Phys. Lett. A*, **376**:35 (2012), 2394–2401, arXiv:1201.0028.
- [8] И. М. Гельфанд, Л. А. Диккий, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 13–29.
- [9] Ю. И. Манин, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **11** (1978), 5–152.
- [10] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**:11 (1981), 3785–3791.
- [11] S. B. Lobb, F. W. Nijhoff, *J. Phys. A*, **42**:45 (2009), 454013, 18 pp., arXiv:0903.4086.
- [12] S. B. Lobb, F. W. Nijhoff, *J. Phys. A*, **43**:7 (2010), 072003, 11 pp., arXiv:0911.1234.
- [13] S. B. Lobb, F. W. Nijhoff, G. R. W. Quispel, *J. Phys. A*, **42**:47 (2009), 472002, 11 pp.
- [14] J. Atkinson, *Integrable lattice equations: Connection to the Möbius group, Bäcklund transformations and solutions*, Ph.D. Thesis, University of Leeds, Leeds, 2008.

- [15] P. J. McCarthy, *Lett. Math. Phys.*, **2**:6 (1978), 493–498.
- [16] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Internat. Math. Res. Not.*, **11** (2002), 573–611.
- [17] J. Atkinson, *J. Phys. A*, **42**:45 (2009), 454005, 7 pp., arXiv:0903.4428.
- [18] В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:1 (2009), 3–21.
- [19] A. N. Kirillov, *Progr. Theoret. Phys. (Suppl.)*, **118** (1995), 61–142, arXiv:hep-th/9408113.
- [20] S. Yoo-Kong, S. B. Lobb, F. W. Nijhoff, *J. Phys. A*, **44**:36 (2011), 365203, 39 pp.
- [21] S. Yoo-Kong, F. W. Nijhoff, *Discrete-time Ruijsenaars–Schneider system and Lagrangian 1-form structure*, arXiv:1112.4576.
- [22] P. Xenitidis, F. W. Nijhoff, S. B. Lobb, *Proc. Royal Soc. A*, **467**:2135 (2011), 3295–3317, arXiv:1008.1952.
- [23] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, New York, 1981.
- [24] J. Hietarinta, *J. Phys. A*, **44**:16 (2011), 165204, 22 pp., arXiv:1011.1978.
- [25] Da-J. Zhang, So-L. Zhao, F. W. Nijhoff, *Stud. Appl. Math.*, **129**:2 (2012), 220–248, arXiv:1112.0525.
- [26] F. W. Nijhoff, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta, *Stud. Appl. Math.*, **106**:3 (2001), 261–314.

Поступила в редакцию 25.04.2012