Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ким, Трехмерные суперконформные теории поля, индексы и монополи, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 77–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:33:17

© 2013 г.

С. Ким*

ТРЕХМЕРНЫЕ СУПЕРКОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ, ИНДЕКСЫ И МОНОПОЛИ

Обсуждаются последние достижения в исследовании трехмерных суперконформных теорий поля, основанные на использовании индексов для операторов магнитных монополей. Обсуждаются приложения к M2-бранам и AdS/КТП-дуальность.

Ключевые слова: суперсимметричная калибровочная теория, AdS/КТП-дуальность, теория Черна–Саймонса.

DOI: 10.4213/tmf8351

В последние годы наблюдается значительный прогресс в понимании трехмерных суперконформных теорий поля (СКТП) благодаря изучению точно рассчитываемых величин. Достижения основаны на использовании суперконформных индексов, которые перечисляют локальные операторы Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) [1],[2], и статистической суммы евклидовой СКТП на трехмерной сфере [3]–[5]. В частности, суперконформный индекс использовался для изучения спектра операторов магнитных монополей, который играет важную роль в понимании различных аспектов сильно связанной (непертурбативной) динамики трехмерных квантовых теорий поля (КТП).

Эти исследования мотивировались открытиями новых трехмерных СКТП для M2-бран, многие из которых принимают форму теории Черна–Саймонса с материей. В работе [6] обсуждаются теории Черна–Саймонса с материей и $\mathcal{N} \leq 3$ суперсимметрией. Также были обнаружены и изучены теории Черна–Саймонса с материей и $\mathcal{N} \geq 4$ суперсимметрией [7]–[10] для M2-бран. В важной работе [8] исследуется СКТП с $\mathcal{N} = 6$ суперсимметрией для тестовых M2-бран на $\mathbb{R}^8/\mathbb{Z}_k$. Решающими в методологии работы [8] были выбор в качестве исходной точки слабосвязанных СКТП для D2-бран типа IIA и проведение после этого расширения на более перспективные теории с сильной связью для M2-бран на основе простой M-теории, включающей плоское пространство $\mathbb{R}^8$. Тогда, особенно в контексте изучения AdS₄/КТП₃-дуальности этой системы при большом N , естественным образом находится цикл M-теории, размер которого можно контролировать с помощью константы связи Черна–Саймонса k . Чтобы полностью понять квантовые аспекты и сущность этих КТП с M2-бранами, важно осознать, каково квантово-полевое описание импульсов Калуцы–Клейна вдоль этого направления в M-теории. Было

*Department of Physics and Astronomy, Center for Theoretical Physics, Seoul National University, Seoul, Korea. E-mail: skim@physa.snu.ac.kr, seokkimseok@gmail.com

доказано, что операторы магнитных монополей обуславливают локальные операторы, которые несут импульсы Калуцы–Клейна.

Операторы монополей важны для понимания других свойств сильного взаимодействия трехмерных КТП, а не только в связи с соображениями AdS/КТП-дуальности. Различные непертурбативные дуальности, такие как зеркальные дуальности [11] и дуальности типа дуальности Зайберга [12], можно подробно исследовать, рассматривая спектр этих операторов монополей.

Операторы магнитных монополей определяются путем постановки сингулярных граничных условий для полей вокруг точек вставки операторов (что рекомендуется для вычисления их корреляционных функций). Сингулярное калибровочное поле A_μ требуется, чтобы удовлетворить условию

$$\int_{S^2} F = 2\pi H, \quad H \in G, \quad (1)$$

где G – алгебра калибровочной группы [13], а двумерная сфера S^2 – это бесконечно малая сфера, окружающая точку вставки операторов. В большинстве работ операторы монополей вводятся для того, чтобы удовлетворить более сильному условию вложения монополя Дирака в неабелево калибровочное поле

$$A = \frac{H}{2}(\pm 1 - \cos \theta) d\phi \quad (2)$$

с однородными магнитными потоками на S^2 . Как было выяснено в недавних исследованиях, это условие слишком сильное, чтобы применить операторы монополей в теориях Черна–Саймонса с материей. Поэтому мы просто наложим условие (1), конечно, вместе с дополнительным условием того, что граничные поля удовлетворяют соответствующим уравнениям поля.

Поскольку операторы монополей непертурбативны, в общем случае трудно получить спектр (или двухточечные функции) этих операторов при наличии сильной связи даже для тех из них, которые сохраняют некоторые суперзаряды. Трудности становятся серьезнее для монополей в теориях Черна–Саймонса с материей при наличии сильных взаимодействий, таких как теория Аарони–Бергмана–Джаффериса–Малдасены (АБДМ) на уровне Черна–Саймонса $k = 1$, поскольку операторы монополей Черна–Саймонса, вообще говоря, несут ненулевой пространственный спин с редуцированной суперсимметрией. Некоторый квазиклассический анализ изложен в работе [14] в случае больших k , когда монополи, вообще говоря, не удовлетворяют условию (2). Систематическое квазиклассическое изучение даже для больших k очень сложно.

С другой стороны, некоторые величины (например, индекс Виттена) можно рассчитывать, используя мощь суперсимметрии. С помощью суперконформного индекса Виттена [15], [16] вычисляются спектр и вырождение локальных операторов БПЗ в СКТП, причем расчеты могут быть выполнены даже при наличии сильных связей.

В трехмерном пространстве можно выбрать без потери общности [16] суперзаряд $Q \equiv Q^1 + iQ^2$, где верхние индексы 1, 2 отвечают первым двум компонентам вектора $SO(\mathcal{N})$ R -симметрии, а нижний индекс означает компоненту пространственного вращения $SO(3)$ со спином, направленным вниз. Локальные операторы БПЗ (или

состояния БПЗ КТП на пространстве $S^2 \times \mathbb{R}$, полученные с помощью радиально-го квантования), которые сохраняют суперзаряд Q и его сопряженный оператор, доставляют равенство в ограничении БПЗ

$$H \geq R + j_3 \quad (3)$$

для масштабной размерности iD операторов (или гамильтониана состояний $H \equiv iD$), где R является $SO(2) \subset SO(\mathcal{N})$ R -зарядом, а j_3 – число Картана пространственного вращения $SO(3)$. Суперконформный индекс Виттена определяется следующим образом:

$$I(\beta, y_a) = \text{Tr} \left[(-1)^F e^{-\beta' \{Q, S\}} x^{E+j_3} \prod_a y_a^{h_a} \right], \quad (4)$$

где след берется в пространстве локальных операторов и все заряды, появляющиеся в следе, коммутируют с Q, S . Через h_a обозначается подмножество элементов Картана группы $SO(\mathcal{N})$, которые коммутируют с Q, S .

Для $\mathcal{N} = 6$ теории Черна–Саймонса с материей [8] этот индекс рассчитан в работе [17] в пределе больших k при низкой энергии, когда операторы монополей не вносят свой вклад. Немного позже в работе [1] с использованием локализации был рассчитан полный суперконформный индекс для этой теории, включая вклад от всех операторов монополей на общем уровне Черна–Саймонса k . В сущности те же расчеты можно провести для теорий с $\mathcal{N} = 5$ (результат получен автором в соавторстве с С. Чеоном и Д. Ганом, но не опубликован), $\mathcal{N} = 4$ [18] и $\mathcal{N} = 3$ [19] суперсимметриями. Для теорий с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией следует учитывать аномальные размерности различных материальных полей или, что эквивалентно, $U(1)$ R -заряды полей. Индекс для этого случая был вычислен в работе [2]. Основная идея во всех этих случаях заключается во введении конкретного вида большой Q -точной деформации классического лагранжиана, появляющегося в представлении индекса с помощью континуального интеграла, которая гарантированно не изменит индекс. Тогда континуальный интеграл становится обычным гауссовым интегралом по множеству седловых точек, который можно вычислить.

Ниже мы, прежде всего, обсудим формальные результаты, относящиеся к индексу теории поля, при этом мы используем более конкретную иллюстрацию на простых моделях. Далее мы применим эти результаты к $\mathcal{N} = 6$ теории Черна–Саймонса с материей (модели АБДМ) [8] в пределе больших N , а также дадим объяснение индекса в дуальной AdS_4 -гравитации, установив полное согласие между ними.

Основной результат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим трехмерную КТП с калибровочной группой G и материей, задаваемой киральными супермультиплетом Φ в представлении R_Φ калибровочной группы. Калибровочная группа записывается в виде произведения $G = \prod_I G_I$, в этом случае компоненты G_I могут иметь свои собственные константы связи Черна–Саймонса k_I . Индекс для оператора монополя с зарядом Годдарда–Нейтса–Олива (ГНО) $H = \sum_i s_i H_i$, где i нумерует элементы Картана H_i алгебры группы G , представлен выражением [1], [2]

$$I_H = \frac{1}{|W_G|} x^{\epsilon_0} \prod_a y_a^{F_{a0}} \oint \prod_i \frac{da_i}{2\pi} \exp \left[i \sum_I k_I \text{Tr}(H_I a_I) \right] \times \\ \times e^{ib_0(a, H)} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_H(x^n, y_a^n, n a_i) \right]. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 f_H &= \sum_{\Phi} \sum_{\rho \in R_{\Phi}} \left[e^{-i\rho(a)} y_a^{-F_a} \frac{x^{|\rho(s)| + \Delta_{\Phi}}}{1 - x^2} - e^{i\rho(a)} y_a^{F_a} \frac{x^{|\rho(s)| + 2 - \Delta_{\Phi}}}{1 - x^2} \right] - \sum_{\alpha \in G} e^{i\alpha(a)} x^{|\alpha(s)|}, \\
 \epsilon_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\Phi} (1 - \Delta_{\Phi}) \sum_{\rho \in R_{\Phi}} |\rho(s)| - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in G} |\alpha(s)|, \\
 b_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\Phi} \sum_{\rho \in R_{\Phi}} |\rho(s)| \rho(a), \quad F_{a0} = \frac{1}{2} \sum_{\Phi} \sum_{\rho \in R_{\Phi}} |\rho(s)| F_a,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где Δ_{Φ} , F_a – размерность и заряды аромата кирального суперполя Φ , ρ принимает значения весов представления материи R_{Φ} , α принимает значения корней калибровочной группы G , W_G – группа Вейля для G . Для $\mathcal{N} \geq 3$ суперсимметричных теорий вся киральная материя приобретает каноническое значение R -заряда $\Delta_{\Phi} = 1/2$.

Приведенное выше формальное выражение несколько громоздко из-за большого количества составляющих, поэтому стоит привести более конкретную формулу для простого примера. Рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную калибровочную теорию с калибровочной группой $U(N)$ и N_f фундаментальными и антифундаментальными киральными мультиплетами q^u , $\tilde{q}_u$, $u = 1, 2, \dots, N_f$, на уровне Черна–Саймонса k . Тогда монополярный заряд ГНО нумеруется N целыми числами $s_i = n_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. В силу симметрии все используемые материи имеют одну и ту же размерность Δ . Теперь выражения (6) принимают вид

$$\begin{aligned}
 f_H &= \sum_{i=1}^N (e^{-ia_i} \chi_{\overline{N}_f}(y) + e^{ia_i} \chi_{N_f}(y)) \frac{x^{|n_i| + \Delta} - x^{|n_i| + 2 - \Delta}}{1 - x^2} - \sum_{i \neq j} e^{i(a_i - a_j)} x^{|n_i - n_j|}, \\
 \epsilon_0 &= N_f(1 - \Delta) \sum_{i=1}^N |n_i| - \frac{1}{2} \sum_{i,j} |n_i - n_j|, \quad b_0 = 0, \quad F_{a0} = 0, \\
 |W_{U(N)}| &= N!, \quad e^{ik \text{Tr}(Ha)} = \exp \left[ik \sum_{i=1}^N n_i a_i \right],
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\chi_{\overline{N}_f}(y) = y_1^{-1} + y_2^{-1} + \dots + y_{N_f}^{-1}$ – характер фундаментального представления для $U(N_f)$. Все интегралы по N голономиям a_i берутся в интервалах $0 \leq a_i \leq 2\pi$. Можно также изучать индекс для похожих теорий с той же калибровочной группой и также содержащих материю, но с дополнительным суперпотенциалом, который расширяет суперсимметрию от $\mathcal{N} = 2$ до $\mathcal{N} = 3$. Индекс принимает тот же вид, что и выше, за исключением того, что нужно подставить каноническую размерность $\Delta = 1/2$ для киральных супермультиплетных полей. В работе [20] было предложено, чтобы обе теории, с $\mathcal{N} = 2, 3$, содержали новые трехмерные дуальности типа Зайберга. Конкретно, для $\mathcal{N} = 3$ теории этого типа такая дуальность Зайберга изучалась с использованием приведенного выше индекса в работе [21] для некоторых низких значений N , N_f . Ниже мы также исследуем индекс для $\mathcal{N} = 6$ теории Черна–Саймонса с материей с калибровочной группой $U(N)_k \times U(N)_{-k}$, с уровнем Черна–Саймонса и двумя бифундаментальными гипермультиплетными (или четырьмя киральными мультиплетными) как в калибровочной теории, так и в соответствующей ей теории с дуальной гравитацией. Теперь заряд ГНО характеризуется двумя

наборами целых чисел $\{n_i\}$, $\{\tilde{n}_i\}$, и формулу для индекса можно переписать соответствующим образом, учитывая другую калибровочную группу и другое представление [1].

Не все компоненты s_i заряда ГНО H являются сохраняющимися величинами. Таким образом, чтобы получить физически значимый индекс, нужно проводить суммирование по их подмножеству. Однако некоторые комбинации этих зарядов являются глобальными сохраняющимися зарядами. Например, если G содержит множитель $U(N)$ в некоторых своих компонентах G_I , можно использовать калибровочно-инвариантный топологический $U(1)$ -заряд

$$q_I = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \text{Tr}_{G_I} F, \quad (8)$$

для того чтобы наделить операторы дополнительными химическими потенциалами. В частности, эти топологические заряды играют важную роль в физике М2-бран, AdS/КТП-дуальности, а также в других трехмерных дуальностях различного типа.

Указанный индекс имеет широкую область применения. Первоначально он был рассчитан в работах [1], [17] с целью изучения AdS/КТП-дуальности М2-бран в СКТП (см. ниже). Он также полезен при изучении различных дуальностей между трехмерными КТП. Сначала некоторые из трехмерных дуальностей, исследованных в конце 90-х годов, были подробно изучены в работах [11], [12], а затем были обобщены. Недавно этот индекс был использован для изучения новых типов трехмерных дуальностей [22].

Обсудим некоторые новые достижения в изучении AdS₄/КТП₃-дуальности, используя суперконформный индекс. Сначала рассмотрим теории с $\mathcal{N} = 6, 8$. Теория АБДМ [8] содержит $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ -калибровочные поля Черна–Саймонса, четыре киральных суперполя в терминах $\mathcal{N} = 2$ теории, классическое действие которых выявляет $\mathcal{N} = 6$ суперконформную симметрию. Для случая, когда уровень Черна–Саймонса $k = 1, 2$, авторы работы [8] предположили, что теория обладает расширенной $\mathcal{N} = 8$ суперконформной симметрией за счет появления дополнительных операторов сохраняющихся токов, которые содержат операторы монополей. Последнее утверждение является одним из решающих, оно позволяет получить теорию взаимодействующих М2-бран на основе плоской М-теории.

Существуют различные пути подтверждения и изучения таких расширенных симметрий. Некоторые ссылки, связанные с этим вопросом, приводятся в работах [23]. Поскольку это оказалось проблемой существенно квантового режима, надежное обоснование этого свойства появится, предположительно, из расчетов, в которых четко контролируются все квантовые эффекты. Литературные ссылки можно найти в работе [1], а также в первой работе из [11], где супермультиплет, содержащий тензор напряжения–энергии, изучается с помощью комбинирования локализации и некоторых аспектов защищенных состояний. В этой работе обнаружено, что тензор должным образом расширяется при $k = 1, 2$, включая при этом элементы расширенной суперконформной алгебры. В анализе, проведенном в работе [1], используется суперконформный индекс и, главным образом, сравнивается индекс теории поля при больших N с гравитационным индексом в пространстве AdS₄ $\times$ $S^7/\mathbb{Z}_k$. Поскольку очевидно, что гравитационный спектр инвариантен относительно $\mathcal{N} = 8$

суперконформной симметрии при $k = 1, 2$, сравнение калибровочного (гравитационного) спектра при этих значениях также выступает в поддержку расширенных симметрий. Объясним это несколько подробнее.

Рассмотрим сектор с энергиями порядка $O(1)$ в пределе больших N (здесь $O(1)$ дается в единицах обратного радиуса пространства AdS_4). Это делается потому, что вычисления дуального спектра в одиннадцатимерной супергравитации надежны только при энергии такого порядка. Операторы монополей в этой теории нумеруются двумя наборами зарядов ГНО группы $U(N)$: $H = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ для $U(N)_k$ и $\tilde{H} = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)$ для $U(N)_{-k}$, где в скобках указаны наборы невозрастающих целых чисел. На них наложено условие $\sum_i n_i = \sum_i \tilde{n}_i$ [8]. Тогда среди этих целых чисел $\{n_i\}$, $\{\tilde{n}_i\}$ в зарядах ГНО группы $U(N) \times U(N)$ количество ненулевых чисел должно быть порядка $O(1)$. Таким образом, большое, порядка $O(N)$, число потоков равно нулю, в результате большое подмножество в $U(N)$ остается ненарушенным. Для этой части интегралов по a_i , $\tilde{a}_i$ можно аппроксимировать интегрирование при большом N интегрированием по распределению этих переменных вдоль окружности (см., например, [24]),

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \rho_n e^{in\theta} \equiv \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \delta(\theta - a_i), \quad \rho_{-n} = \rho_n^*, \quad (9)$$

где $U(N_1) \subset U(N)_k$ – ненарушенная подгруппа с нулевыми зарядами монополей. Такую же процедуру можно провести и для второй калибровочной группы с ненарушенной подгруппой $U(N_2) \subset U(N)_{-k}$. Интегралы по ρ_n для каждой калибровочной группы в пределе больших N оказываются гауссовыми. Выполнив эту часть расчетов, мы далее должны вычислить только $O(1)$ голономных интегралов, связанных с ненулевыми потоками. Приведем результат [1]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_H = I^0 I^+ I^-, \quad (10)$$

где

$$I^0 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - x^{2n})^2}{(1 - x^n y_1^n)(1 - x^n y_1^{-n})(1 - x^n y_2^n)(1 - x^n y_2^{-n})}. \quad (11)$$

Химические потенциалы y_1, y_2 для $SO(4) \subset SO(6)$ R -симметрий, коммутирующие с Q , определяются выбором группы $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$. Они представляют собой химические потенциалы для удвоенных элементов Картана каждой группы $SU(2)$. Чтобы объяснить оставшиеся части I^+ и I^- , разделим ненулевые целые числа в $H, \tilde{H}$ на две группы, составленные из положительных целых чисел (наборы $H^+, \tilde{H}^+$) и отрицательных чисел (наборы $H^-, \tilde{H}^-$). Составляющая I^+ относится только к $H^+, \tilde{H}^+$ и к интегралам по переменным $a_i, \tilde{a}_i$, связанным с положительными потоками. Получим [1]

$$I^+ = \sum_{n_i \in H^+, \tilde{n}_i \in \tilde{H}^+} y_3^{k/2 \sum n_i} x^{\epsilon_0^+} \int \frac{1}{|W|} \frac{da_i}{2\pi} \frac{d\tilde{a}_i}{2\pi} \times \\ \times \exp \left[ik \sum_i (n_i a_i - \tilde{n}_i \tilde{a}_i) \right] \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x^n, y_1^n, y_2^n, n a_i, n \tilde{a}_i) \right], \quad (12)$$

где y_3 – химический потенциал, сопряженный топологическому заряду

$$\frac{1}{2\pi} \int \text{Tr } F = \frac{1}{2\pi} \text{Tr } \tilde{F} = \sum_{i=1}^N n_i,$$

и

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j} (x^{|n_i - \tilde{n}_j|} - x^{|n_i| + |\tilde{n}_j|}) (f_1 e^{i(\tilde{a}_j - a_i)} + f_2 e^{i(a_i - \tilde{a}_j)}) - \\ &\quad - \sum_{i \neq j} (x^{|n_i - n_j|} e^{i(a_i - a_j)} + x^{|\tilde{n}_i - \tilde{n}_j|} e^{i(\tilde{a}_i - \tilde{a}_j)}) + \\ &\quad + \sum_{i,j} (x^{|n_i| + |n_j|} e^{i(a_i - a_j)} + x^{|\tilde{n}_i| + |\tilde{n}_j|} e^{i(\tilde{a}_i - \tilde{a}_j)}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{x^{1/2}}{1 - x^2} \left(\sqrt{\frac{y_1}{y_2}} + \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} \right) - \frac{x^{3/2}}{1 - x^2} \left(\sqrt{y_1 y_2} + \frac{1}{\sqrt{y_1 y_2}} \right), \\ f_2 &= \frac{x^{1/2}}{1 - x^2} \left(\sqrt{y_1 y_2} + \frac{1}{\sqrt{y_1 y_2}} \right) - \frac{x^{3/2}}{1 - x^2} \left(\sqrt{\frac{y_1}{y_2}} + \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} \right). \end{aligned}$$

Составляющая I^- относится только к отрицательным потокам H^- , $\tilde{H}^-$ и связана с I^+ соотношением $I^-(x, y_1, y_2, y_3) = I^+(x, y_1, y_2^{-1}, y_3^{-1})$ или, эквивалентно, $I^-(x, y_1, y_2, y_3) = I^+(x, y_1^{-1}, y_2, y_3^{-1})$.

С другой стороны, гравитационный индекс в пространстве $\text{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ можно рассчитать при низкой энергии с помощью спектра Калуцы–Клейна, полученного в работе [25] с учетом квадратичных флуктуаций, что справедливо для низкоэнергетического спектра (см. также работу [16]). Поскольку одиннадцатимерная супергравитация, усеченная до квадратичного уровня, приводит к бесконечным башням невзаимодействующих гравитирующих частиц в пространстве AdS_4 , полный гравитационный индекс можно получить с помощью многочастичной или плетической экспоненты гравитационного индекса одной частицы. Одночастичный индекс для $\text{AdS}_4 \times S^7$ (т. е. при $k = 1$) представлен выражением [16]

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}}(x, y_1, y_2, y_3) &= \frac{A}{B}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{y_1 y_2 y_3} (1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) x^{1/2} - \\ &\quad - \sqrt{y_1 y_2 y_3} (y_1 + y_2 + y_3 + y_1 y_2 y_3) x^{7/2} + \\ &\quad + (y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2 + y_3)) (x^3 - x), \\ B &= (1 - x^2) (\sqrt{y_3} - \sqrt{x y_1 y_2}) (\sqrt{y_1} - \sqrt{x y_2 y_3}) \times \\ &\quad \times (\sqrt{y_2} - \sqrt{x y_3 y_1}) (\sqrt{y_1 y_2 y_3} - \sqrt{x}), \end{aligned}$$

где используется то же самое соглашение о химическом потенциале, что и в предложенной дуальной теории поля. Для $k \neq 1$, прежде чем рассчитывать многочастичный индекс, следует разложить I_{sp} в ряд по y_3 и оставить только моды, соответствующие целым степеням $y_3^{k/2}$. Такой усеченный одночастичный индекс обозначим через $I_{\text{sp}}^{(k)}$. Многочастичный индекс дается выражением

$$I_{\text{mp}} = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_{\text{sp}}^{(k)}(x^n, y_1^n, y_2^n, y_3^n) \right]. \quad (15)$$

Поскольку одночастичный индекс $I_{\text{sp}}^{(k)}$ можно разложить на три составляющие (члены, не содержащие y_3 , члены с положительными степенями y_3 и члены с отрицательными степенями y_3), полный гравитационный индекс I_{mp} разлагается следующим образом: $I_{\text{mp}} = I_{\text{mp}}^0 I_{\text{mp}}^+ I_{\text{mp}}^-$. Очевидно, что сравнение калибровочных/гравитационных индексов при больших N требует соответствия между I^0 и I_{mp}^0 , а также между I^+ и I_{mp}^+ . В этом случае согласованность между I^- и I_{mp}^- получается автоматически.

Было показано [17], что индекс I_{mp}^0 в гравитации точно соответствует I^0 в теории поля. В таком случае нужно сравнить I^+ в квантовой теории поля и I_{mp}^+ в гравитации. Это сделано в работе [1] в различных секторах. Прежде всего, при $H^+ = \tilde{H}^+ = H$, где H взято из (1), найдем

$$\begin{aligned} I_{(1)}^+ = & \int \frac{da}{2\pi} e^{-ika} (1 - x^{3/2} y_1^{1/2} y_2^{1/2} e^{ia}) (1 - x^{3/2} y_1^{-1/2} y_2^{-1/2} e^{ia}) \times \\ & \times (1 - x^{3/2} y_1^{1/2} y_2^{-1/2} e^{-ia}) (1 - x^{3/2} y_1^{-1/2} y_2^{1/2} e^{-ia}) \times \\ & \times [(1 - x^{1/2} y_1^{1/2} y_2^{-1/2} e^{ia}) (1 - x^{1/2} y_1^{-1/2} y_2^{1/2} e^{ia}) (1 - x^{1/2} y_1^{1/2} y_2^{1/2} e^{-ia}) \times \\ & \times (1 - x^{1/2} y_1^{-1/2} y_2^{-1/2} e^{-ia}) (1 - x^2)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Соответствующий гравитационный индекс задается выражением

$$I_{\text{mp}}^+|_{y_3^k} = \oint \frac{da}{2\pi} e^{-ika} I_{\text{sp}}(x, y_1, y_2, e^{ia}). \quad (17)$$

Можно показать [1], что подынтегральное выражение в (16) (за исключением e^{-ika}) равняется $I_{\text{sp}}(x, y_1, y_2, e^{ia}) + (1 - x^2 + x^4)/(1 - x^2)^2$, что доказывает эквивалентность выражений (16) и (17) при $H^+ = \tilde{H}^+ = H$, где H взято из (1).

В случае более высоких значений импульса Калуцы–Клейна или для топологических зарядов из КТП оба индекса можно разложить в ряды по x и сравнить каждый порядок разложения один за другим. Это было проделано до достаточно высоких порядков по x для топологических зарядов, равных 2 и 3 [1]. Например, при импульсе Калуцы–Клейна, равном 3, результат можно получить из общих результатов КТП (см. соотношения (10)–(13)):

$$\begin{aligned} I_{(3)(3)} &= x^{3/2} [4 + 4x + 0x^2 + 8x^3 - 4x^4 + 8x^5 + 2x^6 + 4x^7 + 0x^8 + O(x^9)], \\ I_{(2,1)(2,1)} &= x^{3/2} [6 + 20x + 24x^2 + 28x^3 + 64x^4 + 34x^5 + 34x^6 + \\ &\quad + 166x^7 - 32x^8 + O(x^9)], \\ I_{(1,1,1)(1,1,1)} &= x^{3/2} [4 + 12x + 30x^2 + 52x^3 + 52x^4 + 98x^5 + 170x^6 + \\ &\quad + 130x^7 + 106x^8 + O(x^9)], \\ I_{(2,1)(1,1,1)} + I_{(1,1,1)(2,1)} &= x^{3/2} [0x^4 + 12x^5 - 20x^6 - 44x^7 + 176x^8 O(x^9)], \\ I_{(3)(2,1)} + I_{(2,1)(3)} &= x^{3/2} [4x^6 - 16x^7 + 32x^8 + O(x^9)], \\ I_{(3)(1,1,1)} + I_{(1,1,1)(3)} &= x^{3/2} [O(x^{12})]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из дуальной гравитации, используя основные результаты (14), (15) и извлекая коэффициент перед $y_3^{3/2}$ из разложения при импульсе Калуцы–Клейна, равном 3, получим, что гравитационный индекс является суммой следующих трех членов:

$$\begin{aligned}
 I_3(x) &= x^{3/2}[4 + 4x + 2x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 4x^7 + 2x^8 + O(x^9)], \\
 I_2(x)I_1(x) &= x^{3/2}[6 + 20x + 26x^2 + 36x^3 + 46x^4 + 52x^5 + \\
 &\quad + 66x^6 + 68x^7 + 86x^8 + O(x^9)], \\
 \frac{1}{3}I_1(x^3) + \frac{1}{2}I_1(x)I_1(x^2) + \frac{1}{6}I_1(x^3) &= x^{3/2}[4 + 12x + 26x^2 + 48x^3 + 64x^4 + \\
 &\quad + 96x^5 + 122x^6 + 168x^7 + 194x^8 + O(x^9)],
 \end{aligned} \tag{19}$$

где первое, второе и третье выражения означают соответственно одночастичный индекс с импульсом Калуцы–Клейна, равным 3, двухчастичный индекс с импульсом, равным 1 и 2, и индекс для трех идентичных частиц с единичным импульсом Калуцы–Клейна. Для простоты мы взяли $y_1 = y_2 = 1$. Суммирование вкладов от всех девяти зарядов ГНО монополей точно совпадает с суммированием гравитационных индексов (19) в том же секторе (получено автором, С. Чеоном и Д. Ганом, не опубликовано).

Выше объяснялось, что похожее исследование можно провести и для $\text{AdS}_4/\text{КТП}_3$ -дуальных теорий с $\mathcal{N} \geq 3$ суперсимметриями. Для трехмерных $\mathcal{N} = 2$ моделей индекс был изучен недавно в работах [19], [26], [27]. Сравнение по индексу представляет собой мощный инструмент проверки в том смысле, что некоторые теории, прошедшие другие тесты, исключаются при тщательном изучении индекса. В самом деле, было отмечено, что изучение индекса иногда может привести к исключению весьма правдоподобных моделей для $\text{AdS}_4/\text{КТП}_3$ -дуальности, начиная с некоторых моделей для максимально суперконформных М2-бран [28].

Среди многих трехмерных $\mathcal{N} = 2$ моделей, вероятно, стоит особо отметить огромный класс моделей СКТП, таких как теория поля, дуальная М-теория на $\text{AdS}_4 \times Y^{p,q}(\mathbb{CP}^2)$, где $Y^{p,q}(\mathbb{CP}^2)$ – семимерное многообразие Сасаки–Эйнштейна, построенное из пространства $\mathbb{CP}^2$, взятого в качестве 4-многообразия Калера–Эйнштейна [29]. В работе [30] представлены модели для СКТП, которые усовершенствуют более ранние модели, предложенные в работах [31]. В частности, случай с $p = 2$, $q = 3$, обозначаемый как $M^{3,2}$ (или $M^{1,1,1}$ в некоторых работах), изучен очень подробно, поскольку представляет собой однородное многообразие с $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -изометрией. Также известен гравитационный спектр Калуцы–Клейна [32], и можно сравнить индексы, рассчитанные в квантовой теории поля и гравитации.

Для заданного многообразия $Y^{p,q}(\mathbb{CP}^2)$ в работе [30] предлагаются дуальные теории поля с различными значениями для двух типов дискретных полей кручения, которые можно включить в $M^{3,2}$. Возможные поля кручения нумеруются двумя целыми числами n_1, n_2 , которые ограничены величинами p, q (подробнее см. табл. 1 в работе [30]). В частности, для теории с $M^{3,2}$ (при $p = 2$, $q = 3$) несколько более интересны два случая. Первый случай появляется с калибровочной группой и уровнями Черна–Саймонса

$$U(N)_{-2} \times U(N)_1 \times U(N)_1, \tag{20}$$

а также с $SU(3)$ -триплетом бифундаментальной материи для первой/второй, второй/третьей и третьей/первой $U(N)$ калибровочных групп. Эта теория была предложена в качестве дуальной теории поля для $AdS_4 \times M^{3,2}$ при частных ненулевых значениях кручения. Эта модель была предложена в работе [31], где осталась незамеченной проблема внедиагональных членов Черна–Саймонса, которая была изучена в работе [30]. К тому же, поскольку очевидно, что эта модель разрушает СР-инвариантность, следует включить ненулевые кручения в $M^{3,2}$, что отмечено в работе [30]. Индекс для такого значения кручения подробно изучался в работах [19], [27]. При больших N можно непосредственно сравнить этот результат с индексом, рассчитанным с помощью гравитационного спектра в работе [32], поскольку дискретное кручение задается 3-формой М-теории с нулевым потоком 4-формы, который никогда не связывается с гравитационными полями на квадратичном уровне и, таким образом, не влияет на спектр Калуцы–Клейна. После тщательного изучения в работах [19], [27] было показано, что два спектра при больших N полностью согласуются друг с другом в различных нетривиальных изученных секторах.

Конечно, изучение индексов при больших N можно провести и для других значений дискретных кручений. Еще одной интересной теорией является теория без кручений, которая должна привести к СР-инвариантной дуальной теории поля. Этот случай интересен по нескольким причинам. Во-первых, очевидно, что это простейшая $M^{3,2}$ -основа, которой следует уделить больше внимания. В особенности при нулевых дискретных кручениях барионы М5-бран, обматывающие два различных 5-цикла в $M^{3,2}$, становятся свободными от “головастика” и могут возникать как состояния с конечными энергиями. Один из нетривиальных 5-циклов можно выбрать так, чтобы он обматывал базовое пространство $\mathbb{CP}^2$ вместе с циклом в слое $U(1)$, что в результате дает круглую 5-сферу (подробнее о многообразии $Y^{p,q}(\mathbb{CP}^2)$ можно прочитать в работах [29], [30]). В частности, весьма интригующим должно быть изучение барионов, относящихся к многократно намотанным М5-бранам на $S^5 \times \mathbb{R}$, что, возможно, даст важную информацию о спектре СКТП с радиально-квантованными взаимодействующими М5-бранами.

Предварительным упражнением в этом направлении является проверка, весь ли низкоэнергетический спектр (т. е. спектр гравитонов) согласуется с предложенной дуальной КТП, поскольку барионный спектр появляется при значительно более высоких (порядка $O(N)$ в единицах обратного радиуса пространства AdS_4) энергиях.

Ранее была предложена СР-инвариантная дуальная СКТП, включающая калибровочную группу и уровни Черна–Саймонса

$$U(N-2)_0 \times U(N)_0 \times U(N)_0, \quad (21)$$

т. е. все множители взяты на нулевом уровне Черна–Саймонса для сохранения СР-инвариантности. Странным обстоятельством является то, что первая калибровочная группа появляется с рангом $N-2$, поэтому не ясно, что произойдет при низких числах $N=1, 2$ для М2-бран. По-видимому, авторы работы [30] пришли к этому ограничению на ранг, требуя, чтобы появилось желаемое пространство модулей (конус над $Y^{p,q}(\mathbb{CP}^2)$). Исследования, проведенные в работе [27] для такой СР-инвариантной модели, совершенно бесхитростны, в этой работе представлена попытка сравнить индекс при больших N с тем, что предлагает дуальная гравитация. Весьма любопытно, что в работе [27] обнаружено расхождение индекса теории

поля с гравитационным индексом, в отличие от теории, которая превосходно работала для модели с нарушением СР-инвариантности, представленной формулой (20). Сейчас мы поясним, в каком смысле расхождение является весьма серьезным.

Чтобы понять природу расхождения, следует начать с упоминания о том, что не все $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -изометрии $M^{3,2}$ реализуются в классическом действии дуальной теории поля. Здесь также ожидается, что операторы монополей играют решающую роль в обеспечении возможности расширения симметрии (в данном случае, бозонной глобальной симметрии). А именно, только симметрия $SU(3) \times U(1) \times U(1)$ проявляется в классическом действии. Один из двух токов $U(1)$ обусловлен топологическими сохраняющимися зарядами, которые задаются следом зарядов ГНО магнитного монополя. Остальные два $SU(2)$ -тока появляются благодаря наличию монопольных операторов с $H_1 = H_2 = H_3 = (\pm 1, 0, \dots, 0)$ при условии, что справедлива предлагаемая дуальная КТП.

Чтобы понять, появятся ли эти два тока в качестве калибровочно-инвариантных локальных операторов при индексах с большим N , достаточно изучить индекс I^+ при больших N , по аналогии с тем, что был получен в упомянутой выше теории с $\mathcal{N} = 6$, содержащей положительную часть зарядов ГНО. В секторе $H^+ = (1)$ ожидаемый гравитационный индекс равен [20]

$$I_{(1)}^+ = 9x^2 + \dots \quad (22)$$

Исследуя, откуда появляется это главное вырождение 9, и возвращаясь к спектру, полученному в работе [32], найдем, что прежде всего оно появляется из десяти скаляров в гипермультиплете, за вычетом одного $U(1)$ -заряженного гейджино в векторном супермультиплете для $SU(2)$ -изометрии. Поскольку скаляры из гравитационного супермультиплета отображаются в киральные кольца дуальной теории поля, первые десять состояний гарантированно присутствуют в дуальной КТП при условии, что предложенная КТП имеет правильное пространство модулей. Действительно, в обеих моделях с калибровочными группами (20), (21) все эти десять операторов существуют. В первом случае нарушения СР-инвариантности дополнительный фермионный оператор с $H^+ = (1)$ также присутствует, что дает индекс (22). С другой стороны, индекс для СР-инвариантной модели показывает, что $I_{(1)}^+ = 10x^2 + \dots$, где не видно дополнительных фермионных операторов [27]. Это означает, что расширения глобальной $SU(2)$ -симметрии не происходит. Это конкретное наблюдение может помочь в дальнейшем развитии предложенной в работе [30] дуальной КТП.

Подводя итог, скажем, что, объясняя основную структуру суперконформного индекса для монопольных операторов в трехмерном пространстве, мы разъяснили некоторые примеры, в которых подробно исследованы AdS_4/KTP_3 -дуальности. Несмотря на то что окончательной целью, конечно, является успешное тестирование, по-видимому, не прошедшие тест примеры демонстрируют мощь аппарата суперконформного индекса. Двумя примерами, которые мы привели для теорий M2-бран, являются исследование дуальной теории АБДМ [28] и СР-инвариантной СКТП, предложенной для $M^{3,2}$ в работах [30], [27]. В частности, чтобы изучать с помощью индекса барионы составных M5-бран, охватывающих $S^5 \times \mathbb{R}$, мы считали важным исправить это расхождение для СР-инвариантной $M^{3,2}$ -модели. За пределами изучения M2-бран и AdS/KTP -дуальности существуют и другие тонкие

проблемы, касающиеся спектра монополя, которые проявляются при изучении трехмерной дуальности Зайберга с помощью индекса: для некоторых простых случаев они разъясняются в работе [21], дополнительные тонкости поясняются в работе [33].

Благодарности. Автор благодарит организаторов Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS – 2012). Работа частично поддержана программой BK21 Ministry of Education, Science and Technology, The National Research Foundation of Korea (гранты NRF № 2010-0007512, 2005-0049409) при посредничестве The Center for Quantum Spacetime of Sogant University.

Список литературы

- [1] S. Kim, *Nucl. Phys. B*, **821**:1–2 (2009), 241–284, arXiv:0903.4172.
- [2] Y. Imamura, S. Yokoyama, *JHEP*, **04** (2011), 007, 21 pp.
- [3] A. Kapustin, B. Willett, I. Yaakov, *JHEP*, **1003** (2010), 089, 29 pp.
- [4] D. L. Jafferis, *The exact superconformal R-symmetry extremizes Z*, arXiv:1012.3210.
- [5] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, *JHEP*, **03** (2011), 127, 14 pp., arXiv:1012.3512.
- [6] J. H. Schwarz, *JHEP*, **11** (2004), 078, 13 pp.
- [7] J. Bagger, N. Lambert, *Phys. Rev. D*, **75**:4 (2007), 045020, 7 pp.; **77**:6 (2008), 065008, 6 pp., arXiv:0711.0955; A. Gustavsson, *Nucl. Phys. B*, **811**:1–2 (2009), 66–76.
- [8] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena, *JHEP*, **0810** (2008), 091, 38 pp., arXiv:0806.1218.
- [9] K. Hosomichi, K. M. Lee, S. Lee, S. Lee, J. Park, *JHEP*, **09** (2008), 002, 24 pp.
- [10] K. Hosomichi, K.-M. Lee, S. Lee, S. Lee, J. Park, *JHEP*, **07** (2008), 091, 28 pp.
- [11] D. Bashkirov, A. Kapustin, *JHEP*, **05** (2011), 015, 31 pp., arXiv:1007.4861; A. Kapustin, B. Willett, *Generalized superconformal index for three dimensional field theories*, arXiv:1106.2484; D. Gang, E. Koh, K. Lee, J. Park, *ABCD of 3d $\mathcal{N} = 8$ and 4 superconformal field theories*, arXiv:1108.3647.
- [12] D. Bashkirov, *Aharony duality and monopole operators in three dimensions*, arXiv:1106.4110; C. Hwang, H. Kim, K.-J. Park, J. Park, *JHEP*, **09** (2011), 037, 18 pp., arXiv:1107.4942; C. Hwang, K.-J. Park, J. Park, *JHEP*, **11** (2011), 011, 14 pp.
- [13] P. Goddard, J. Nuyts, D. I. Olive, *Nucl. Phys. B*, **125**:1 (1977), 1–28; V. Borokhov, A. Kapustin, X. Wu, *JHEP*, **11** (2002), 049, 20 pp., arXiv:hep-th/0206054; A. Kapustin, E. Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric langlands program*, arXiv:hep-th/0604151.
- [14] H.-C. Kim, S. Kim, *Semi-classical monopole operators in Chern–Simons-matter theories*, arXiv:1007.4560.
- [15] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla, S. Raju, *Commun. Math. Phys.*, **275**:1 (2007), 209–354, arXiv:hep-th/0510251.
- [16] J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Minwalla, S. Raju, *JHEP*, **02** (2008), 064, 42 pp., arXiv:0801.1435.
- [17] J. Bhattacharya, S. Minwalla, *JHEP*, **01** (2009), 014, 12 pp., arXiv:0806.3251.
- [18] Y. Imamura, S. Yokoyama, *Nucl. Phys. B*, **827**:1–2 (2010), 183–216, arXiv:0908.0988; *JHEP*, **11** (2010), 059, 19 pp., arXiv:1008.3180; **04** (2011), 068; Erratum, *JHEP*, **11** (2010), 059.
- [19] S. Cheon, D. Gang, S. Kim, J. Park, *JHEP*, **05** (2011), 027, 33 pp.
- [20] A. Giveon, D. Kutasov, *Nucl. Phys. B*, **812**:1–2 (2009), 1–11, arXiv:0808.0360.
- [21] C. Hwang, H. Kim, K.-J. Park, J. Park, *JHEP*, **09** (2011), 037, 18 pp., arXiv:1107.4942.
- [22] T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, *3-Manifolds and 3d indices*, arXiv:1112.5179.
- [23] A. Gustavsson, S.-J. Rey, *Enhanced $\mathcal{N} = 8$ supersymmetry of ABJM theory on $\mathbb{R}^8$ and $\mathbb{R}^8/\mathbb{Z}_2$* , arXiv:0906.3568; O.-K. Kwon, P. Oh, J. Sohn, *JHEP*, **08** (2009), 093, 22 pp.; H. Samtleben, R. Wimmer, *JHEP*, **10** (2010), 080, 38 pp.

- [24] O. Aharony, J. Marsano, S. Minwalla, K. Papadodimas, M. Van Raamsdonk, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **8**:4 (2004), 603–696.
- [25] B. Biran, A. Casher, F. Englert, M. Romain, P. Spindel, *Phys. Lett. B*, **134**:3–4 (1984), 179–183; M. Gunaydin, N. P. Warner, *Nucl. Phys. B*, **272**:1 (1986), 99–124.
- [26] Y. Imamura, D. Yokoyama, S. Yokoyama, *JHEP*, **08** (2011), 011, 30 pp.
- [27] D. Gang, C. Hwang, S. Kim, J. Park, *JHEP*, **02** (2012), 079, arXiv:1111.4529.
- [28] S. Kim, J. Park, *JHEP*, **08** (2010), 069, 12 pp.; A. Hanany, D. Vegh, A. Zaffaroni, *JHEP*, **03** (2009), 012, 45 pp.
- [29] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. F. Sparks, D. Waldram, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **8**:6 (2006), 987–1000.
- [30] F. Benini, C. Closset, S. Cremonesi, *JHEP*, **09** (2011), 005, 62 pp., arXiv:1105.2299.
- [31] D. Martelli, J. Sparks, *Phys. Rev. D*, **78**:12 (2008), 126005, 11 pp., arXiv:0808.0912; A. Hanany, A. Zaffaroni, *JHEP*, **10** (2008), 111, 19 pp.
- [32] D. Fabbri, P. Fre, L. Gualtieri, P. Termonia, *Nucl. Phys. B*, **560**:1–3 (1999), 617–682, arXiv:hep-th/9903036.
- [33] H.-C. Kim, J. Kim, S. Kim, K. Lee, *Vortices and 3 dimensional dualities*, arXiv:1204.3895.