Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Стукопин, Янгиан странной супералгебры Ли и его квантовый дубль, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 140–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:30:20

© 2013 г.

В. А. Стукопин^{*†}

ЯНГИАН СТРАННОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ И ЕГО КВАНТОВЫЙ ДУБЛЬ

Янгиан странной супералгебры Ли построен как частный случай общей конструкции скрученного янгиана. Описан базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта янгиана супералгебры Ли типа Q_n . Построен квантовый дубль янгиана странной супералгебры Ли типа Q_2 .

Ключевые слова: янгиан супералгебры Ли, странная супералгебра Ли, квантовый дубль, базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

DOI: 10.4213/tmf8353

1. ВВЕДЕНИЕ

Супералгебры Ли уже достаточно давно являются рабочим аппаратом физиков при исследовании суперсимметричных моделей квантовой теории поля. Классификация простых супералгебр Ли классического типа была получена Кацем [1] в конце 70-х годов прошлого века. Среди супералгебр Ли классического типа в этой классификации и появляется странная супералгебра Ли, которая, в отличие от других, не является контраградиентной супералгеброй Ли (см. [1], [2]). В середине 80-х годов прошлого века Дринфельд ввел в рассмотрение квантовые группы, которые являлись деформациями универсальных обертывающих алгебр простых алгебр Ли ([3]–[6], см. также [7]). Одним из наиболее важных примеров таких деформаций были янгианы [3], [7]–[9], связанные с рациональными решениями квантового уравнения Янга–Бакстера. Несколько позднее стали изучаться и янгианы супералгебр Ли [10], [11], которые также нашли применение в квантовой теории поля, в частности в квантовой теории суперструн [12]–[14]. При определении янгиана в соответствии с подходом Дринфельда требуется наличие на исходной алгебре (или супералгебре) Ли невырожденной инвариантной билинейной формы Киллинга, которая отсутствует на странной супералгебре Ли, что мешает буквальному перенесению конструкции Дринфельда на этот случай. Тем не менее, как мы увидим ниже, вместо деформации всей супералгебры полиномиальных токов можно рассмотреть деформацию скрученной супералгебры токов. В этом случае роль формы Киллинга играет невырожденная билинейная форма на супералгебре Ли $A(n, n)$,

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия.
E-mail: stukopin@mail.ru

[†]Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

задаваемая как след произведения матриц и невырожденно спаривающая четные и нечетные градуировочные компоненты. Следует отметить, что янгиан, связанный со странной супералгеброй Ли, впервые был построен Назаровым [11] на основе другого подхода, альтернативного подходу Дринфельда, точнее с использованием централизаторной конструкции Олшанского (см. [15]). Настоящая работа является естественным продолжением работ автора [16], [17], в которых был введен янгиан странной супералгебры Ли на основе подхода Дринфельда и начато его исследование. В настоящей работе, ограничиваясь простым случаем $n = 2$, мы строим базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ), который в дальнейшем может быть использован как при вычислении универсальной R -матрицы квантового дубля, так и при исследовании неприводимых представлений янгиана странной супералгебры Ли. Именно, в настоящей работе для случая $n = 2$ мы строим квантовый дубль янгиана странной супералгебры Ли Q_2 , а также строим выпуклый базис ПБВ в янгиане. Следует отметить, что настоящая работа содержит важные промежуточные результаты, необходимые при нахождении мультипликативной формулы универсальной R -матрицы квантового дубля янгиана $Y(Q_2)$, аналогично тому, как это сделано для квантового дубля янгиана $Y(A(m, n))$ в работе [18].

Несколько слов об организации настоящей работы. В разделах 2–4 для удобства читателя мы приводим в простой форме известные факты. Именно, в разделе 2 мы описываем странную супералгебру Ли и приводим несколько ее эквивалентных определений, в разделе 3 определяем бисупералгебру Ли скрученных токов, в разделе 4 описываем квантование бисупералгебры Ли и вводим главное действующее лицо – янгиан странной супералгебры Ли типа Q_n . Мы даем его описание в терминах токовой системы образующих и соотношений (раздел 5). В разделе 6 мы вводим конструкцию базиса ПБВ и формулируем теорему ПБВ для янгиана супералгебры Ли типа Q_n . В разделе 7 описывается квантовый дубль янгиана $Y(Q_2)$. Доказательства (а точнее, схемы доказательств) основных утверждений вынесены в приложение.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $M_n(K)$ – кольцо $(N \times N)$ -матриц с элементами из кольца K , $K[u]$, $K[[u]]$ – кольцо многочленов формальных степенных рядов с коэффициентами из кольца K .

2. СТРАННАЯ СУПЕРАЛГЕБРА ЛИ ТИПА Q_n

Пусть $C(n|n) = C^n \oplus C^n - \mathbb{Z}_2$ -градуированное векторное суперпространство размерности $(n|n)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $(e_{-n}, e_{-n+1}, \dots, e_{-1}, e_1, \dots, e_n)$ – стандартный базис в $C(n|n)$, а $\text{End}(C(n|n))$ – супералгебра линейных операторов, действующих в $C(n|n)$. Базис в $\text{End}(C(n|n))$ образуют матрицы $E_{a,b}$, $-n \leq a, b \leq n$, $ab \neq 0$, и четность p для $E_{a,b}$ определяется формулой

$$p(E_{a,b}) = |a| + |b|, \quad (1)$$

где $|a| = p(a) = 0$, если $a < 0$, и $|a| = p(a) = 1$ для $a > 0$, $|a|, |b| \in \mathbb{Z}_2$. Напомним, что общая линейная супералгебра $\mathfrak{gl}(n|n)$ определяется как векторное пространство $\text{End}(C(n|n))$, наделенное (супер)скобкой $[\cdot, \cdot]$, задаваемой формулой

$$[x, y] = x \cdot y - (-1)^{|x||y|} y \cdot x. \quad (2)$$

Суперслед на $\mathfrak{gl}(n|n)$ задается формулой $\text{str}(E_{ab}) = \delta_{ab}(-1)^{1+|a|}$ на элементах базиса и распространяется линейно на все остальные элементы векторного пространства $\mathfrak{gl}(n|n)$.

Напомним, что специальная линейная супералгебра Ли $\mathfrak{sl}(n|n)$ определяется как

$$\mathfrak{sl}(n|n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n|n) \mid \text{str}(A) = 0\}. \quad (3)$$

Пусть $\sigma: \mathfrak{gl}(n|n) \rightarrow \mathfrak{gl}(n|n)$ – инволютивный автоморфизм, задаваемый формулой

$$\sigma: E_{a,b} \mapsto E_{-a,-b}.$$

Отметим, что σ переводит $\mathfrak{sl}(n|n)$ в $\mathfrak{sl}(n|n)$. Пусть также

$$J = \sum_{i=1}^n (E_{i,-i} - E_{-i,i}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Супералгебра Ли q_n может быть определена эквивалентно либо как централизатор J в $\mathfrak{gl}(n|n)$, либо как множество неподвижных точек инволютивного автоморфизма $\sigma: \mathfrak{gl}(n|n) \rightarrow \mathfrak{gl}(n|n)$. Пусть также $sq_n = [q_n, q_n]$.

Отметим также, что sq_n – подсупералгебра Ли супералгебры Ли q_n , состоящая из $(2n \times 2n)$ -матриц, из которых левый нижний и правый верхний $(n \times n)$ -блоки имеют нулевой след, в отличие от диагональных блоков, не обязанных иметь нулевой след. Заметим, что sq_n содержит единичную матрицу.

Простая супералгебра Ли Q_n определяется (см. [1]) как факторсупералгебра Ли $Q_n = sq_n / CE_{2n}$, где E_{2n} – единичная матрица размера $2n \times 2n$.

Выберем в q_n базис

$$\begin{aligned} E_{a,b}^0 &= E_{a,b} + E_{-a,-b}, \\ E_{a,b}^1 &= E_{-a,b} + E_{a,-b}, \quad 1 \leq a, b \leq n. \end{aligned} \quad (4)$$

Четная часть супералгебры Ли q_n изоморфна $\mathfrak{gl}_n$, а ее нечетная часть также изоморфна $\mathfrak{gl}_n$, рассматриваемой как $\mathfrak{gl}_n$ -модуль относительно присоединенного действия. В то же время для sq_n ее четная часть изоморфна $\mathfrak{gl}_n$, а нечетная часть изоморфна $\mathfrak{sl}_n$, так что следующие матрицы образуют в sq_n базис:

$$\begin{aligned} E_{a,b}^0, E_{a,b}^1, \quad & 1 \leq a \neq b \leq n, \\ E_{a,a}^0, \quad & 1 \leq a \leq n, \\ h_a^1 = E_{a,a}^1 - E_{a+1,a+1}^1, \quad & 1 \leq a \leq n-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь мы приведем описание странной супералгебры Ли sq_n , аналогичное описанию простой алгебры Ли в терминах образующих и соотношений Серра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Супералгебра Ли sq_n изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{g}$, порожденной образующими $x_{i,j}^\pm$, $h_{i,1}$, $1 \leq i \leq n-1$, $j = 0, 1$, и $h_{i,0}$, $1 \leq i \leq n$ (образующие

со вторым индексом $j = 1$ являются нечетными), которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$\begin{aligned}
 [h_{i_1,1}, h_{i_2,1}] &= 2\delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0} + h_{i_1+1,0}) - 2\delta_{i_1+1,i_2}h_{i_2,0}, & i_1 \leq i_2, \\
 [h_{i_1,j_1}, h_{i_2,j_2}] &= 0, & (j_1, j_2) \neq (1, 1), \\
 [h_{i_1,0}, x_{i_2,j_2}^\pm] &= \pm(\delta_{i_1,i_2} - \delta_{i_1,i_2+1})x_{i_2,j_2}^\pm, \\
 [h_{i_1,1}, x_{i_2,j_2}^\pm] &= (\pm 1)^{j_2+1}(2\delta_{i_1,i_2} \cdot \delta_{j_2,0} - (-1)^{j_2}\delta_{i_1,i_2+1} - \delta_{i_1+1,i_2})x_{i_2,j_2+1}^\pm, \\
 [x_{i_1,j_1}^+, x_{i_2,j_2}^-] &= \delta_{i_1,i_2}h_{i_1,j_1+j_2}, & j_1 \neq j_2, \\
 [x_{i_1,j_1}^+, x_{i_2,j_1}^-] &= \delta_{i_1,i_2}(h_{i_1,0} - (-1)^{j_1}h_{i_1+1,0}), \\
 [x_{i_1,j_1}^\pm, x_{i_2,j_2}^\pm] &= (\pm 1)^{j_1+j_2+1}[x_{i_1,j_1+1}^\pm, x_{i_2,j_2+1}^\pm], & i_1 \leq i_2,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{ad}(x_{i_1,j_1}^\pm)^2(x_{i_2,j_2}^\pm) = 0, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq n-1, \quad |i_1 - i_2| \neq 1, \quad j_1, j_2 = 0, 1.$$

3. СКРУЧЕННАЯ БИСУПЕРАЛГЕБРА ЛИ ТОКОВ

Пусть $\mathfrak{g} = A(n-1, n-1)$, $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ – автоморфизм 2-го порядка, определенный выше, $\epsilon = -1$, $\mathfrak{g}^j = \text{Ker}(\sigma - \epsilon^j E)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Продолжим автоморфизм σ до автоморфизма $\tilde{\sigma}: \mathfrak{g}((u^{-1})) \rightarrow \mathfrak{g}((u^{-1}))$ рядов Лорана со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле

$$\tilde{\sigma}(x \cdot u^j) = \sigma(x)(-u)^j. \tag{7}$$

Рассмотрим следующую тройку Манина:

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2): \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}}, \quad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}, \quad \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])^{\tilde{\sigma}}.$$

Определим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{P}$:

$$\langle f, g \rangle = \text{res}(f(u), g(u)) du, \tag{8}$$

где $\text{res}(\sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot u^k) := a_{-1}$, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$.

Ясно, что $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ – изотропные подсупералгебры относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Легко проверить также, что имеют место следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}} &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{g}^0 \cdot u^{2k} \oplus \mathfrak{g}^1 \cdot u^{2k+1}), \\
 \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}} &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}^0 \cdot u^{2k} \oplus \mathfrak{g}^1 \cdot u^{2k+1}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Опишем структуры бисупералгебры Ли на $\mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^s$ – базис в $\mathfrak{g}^0$, а $\{e^i\}_{i=1}^s$ – двойственный ему относительно формы $(\cdot, \cdot)$ базис в $\mathfrak{g}^1$. Пусть $t_0 = \sum_{i=1}^s e_i \otimes e^i$, $t_1 = \sum_{i=1}^s e^i \otimes e_i$, $t = t_0 + t_1$. Рассмотрим также базис $\{e_{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_1$ и двойственный ему относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис $\{e^{i,k}\}$ в $\mathfrak{P}_2$, которые определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 e_{i,2k} &= e_i \cdot u^{2k}, & e_{i,2k+1} &= e^i \cdot u^{2k+1}, & k &\in \mathbb{Z}_+, \\
 e^{i,2k} &= e^i \cdot u^{-2k-1}, & e^{i,2k+1} &= e_i \cdot u^{-2k-2}, & k &\in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Определим канонический элемент r , определяющий кокоммутатор в $\mathfrak{P}$ формулой

$$r = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{i=1}^s e_{i,k} \otimes e^{i,k}. \quad (11)$$

Обозначим $r_\sigma(u, v) := r$. Тогда формула для кокоммутатора δ примет вид

$$\delta: a(u) \rightarrow [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r_\sigma(u, v)].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Элемент $r_\sigma(v, u)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $r_\sigma(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2} \frac{(\sigma^k \otimes id) \cdot t}{u - \epsilon^k \cdot v}, \quad \epsilon = -1;$
- 2) $r_\sigma(u, v) = -r_\sigma^{21}(u, v);$
- 3) $[r_\sigma^{12}(u, v), r_\sigma^{13}(u, w)] + [r_\sigma^{12}(u, v), r_\sigma^{23}(v, w)] + [r_\sigma^{13}(u, w), r_\sigma^{23}(v, w)] = 0.$

Доказательство этого результата приведено в работе [16].

4. КВАНТОВАНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКРУЧЕННОГО ЯНГИАНА

Общая конструкция скрученного янгиана рассмотрена в работе [17]. Там же исследован вопрос о связи этой конструкции с конструкцией янгиана странной супералгебры Ли. В случае, когда скрученная супералгебра токов является бисупералгеброй Ли, мы получаем следующее определение квантования, являющееся частным случаем более общей конструкции из работы [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квантованием бисупералгебры Ли (B, δ) называется такая супералгебра Хопфа $A = A_\hbar$, для которой справедливы следующие утверждения:

- 1) $A_\hbar / (\hbar A_\hbar) \cong UB$ как супералгебры Хопфа (UB – универсальная обертывающая супералгебра супералгебры Ли B);
- 2) $A \cong UB[[\hbar]]$ изоморфны как топологические $C[[\hbar]]$ -модули;
- 3) $\delta(x) = \hbar^{-1} \cdot (\Delta(a) - \Delta^{\text{op}}(a)) \bmod \hbar$, где a – прообраз x в A , а $\Delta^{\text{op}} = \tau \circ \Delta$, Δ – коумножение в A , а $\tau(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$ – перестановка тензорных сомножителей.

Опишем теперь квантование бисупералгебры Ли $(G[u]^{\tilde{\sigma}}, \delta)$. Наложим на квантование следующие дополнительные ограничения:

- 4) A – градуированная супералгебра над градуированным кольцом $C[[\hbar]]$, $\deg \hbar = 1$;
- 5) градуировка A и градуировка $G[u]^{\tilde{\sigma}}$ (степенями u) индуцируют одну и ту же градуировку $U(G[u]^{\tilde{\sigma}})$, т. е. $A_\hbar / (\hbar A_\hbar) \cong U(G[u]^{\tilde{\sigma}})$ как градуированные супералгебры над C .

ТЕОРЕМА 1. Квантование $A_\hbar$ бисупералгебры Ли $(G[u]^{\tilde{\sigma}}, \delta)$ существует и единственно.

Данная теорема является новым результатом. Правда, следует отметить, что аналогичный (и, по существу, более общий) результат был ранее сформулирован в работе автора [17] без доказательства. Доказательство этой теоремы довольно громоздко, и ниже в приложении мы приводим подробный план доказательства.

Отметим, что доказательство данной теоремы неконструктивно. Хотя теорема и гарантирует существование и единственность квантования, она не дает ответа на

вопрос, как получить явное описание возникающей при квантовании супералгебры Хопфа. Следующая теорема дает точное описание возникающей супералгебры Хопфа. Заметим, что при квантовании получается супералгебра Хопфа над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$, но при специализации для всех значений $\hbar \neq 0$ получаются изоморфные супералгебры Хопфа. Полагая $\hbar = 1$, имеем $Y(Q_n) := A_1$.

ТЕОРЕМА 2. *Супералгебра Хопфа $Y(Q_2)$ над полем $\mathbb{C}$ порождается образующими $h_0, x_0^\pm, k_0, \hat{x}_0^\pm, h_1, x_1^\pm, k_1, \hat{x}_1^\pm$ (h, x – четные образующие, $k, \hat{x}$ – нечетные образующие). Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

$$\begin{aligned} [h_0, h_0] &= [h_0, h_1] = [h_1, h_1] = [h_0, k_1] = 0, & [k_0, k_0] &= [k_0, k_1] = [k_1, k_1] = 0, \\ [h_0, x_0^\pm] &= \pm 2x_0^\pm, & [h_0, x_1^\pm] &= \pm 2x_1^\pm, & [h_0, \hat{x}_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_0^\pm, & [h_0, \hat{x}_1^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm, \\ [h_1, x_0^\pm] &= \pm 2x_1^\pm, & [h_1, \hat{x}_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm \pm (k_0 x_0^\pm + x_0^\pm k_0), \\ [k_0, x_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_0^\pm, & [k_0, \hat{x}_0^\pm] &= \mp 2x_0^\pm, & [k_0, x_1^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm, & [k_0, \hat{x}_1^\pm] &= \mp 2x_1^\pm, \\ [k_1, x_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm, & [k_1, \hat{x}_0^\pm] &= \mp 2x_1^\pm, & [x_0^+, \hat{x}_0^-] &= [\hat{x}_0^+, x_0^-] = k_0, & [x_1^+, \hat{x}_1^-] &= k_1, \\ [\hat{x}_1^\pm, \hat{x}_0^\pm] - [\hat{x}_0^\pm, \hat{x}_1^\pm] &= \pm (x_0^\pm)^2, & [\hat{x}_1^\pm, x_0^\pm] &= [\hat{x}_0^\pm, x_1^\pm] \pm (\hat{x}_0^\pm)^2, \\ [[h_1, \hat{x}_1^+], \hat{x}_1^-] + [\hat{x}_1^+, [h_1, \hat{x}_1^-]] &= 0, & [[k_1, x_1^+], x_1^-] + [x_1^+, [k_1, x_1^-]] &= 0. \end{aligned}$$

Эта теорема является частным случаем более общего результата из работы [17]. В частном случае доказательство упрощается, и это более простое доказательство мы приводим в схематичной форме в приложении.

5. ТОКОВАЯ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ

Пусть $G = Q_2$. Введем новую систему образующих (и определяющих соотношений), являющуюся аналогом токовой системы образующих для универсальной обертывающей супералгебры алгебры Ли токов $\wp_1 = G[u]^{\tilde{\sigma}}$. Введем образующие $\tilde{h}_m, k_m, x_m^\pm, \hat{x}_m^\pm, m \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} x_{m+1}^\pm &= \pm \frac{1}{2} [h_1, x_m^\pm], & \hat{x}_{i,2m+1}^\pm &= \pm \frac{1}{2} [h_1, \hat{x}_{2m}^\pm], \\ \hat{x}_{2m+2}^\pm &= \pm \frac{1}{2} [h_2, \hat{x}_{2m}^\pm], & k_m &= [x_m^+, \hat{x}_0^-], & \tilde{h}_m &= [x_m^+, x_0^-]. \end{aligned} \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 3. *Янгиан $Y(Q_2)$ изоморфен ассоциативной супералгебре Хопфа с единицей над полем $\mathbb{C}$, порожденной образующими $\tilde{h}_m, k_m, x_m^\pm, \hat{x}_m^\pm, m \in \mathbb{Z}_+$ (изоморфизм задается формулами (12)), удовлетворяющими следующей системе определяющих соотношений:*

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_m, \tilde{h}_n] &= 0, & [k_m, \tilde{h}_n] &= 0, & \tilde{h}_{m+n} &= [x_m^+, x_n^-], \\ [\hat{x}_m^+, x_{2k}^-] &= [x_{2k}^+, \hat{x}_m^-] = k_{m+2k}, & [\hat{x}_m^+, x_{2k+1}^-] &= [x_{2k+1}^+, \hat{x}_m^-] = 0, \\ [\tilde{h}_{k+1}, x_l^\pm] &= [\tilde{h}_k, x_{l+1}^\pm] \pm (\tilde{h}_k x_l^\pm + x_l^\pm \tilde{h}_k), \\ [x_{k+1}^\pm, x_l^\pm] &= [x_k^\pm, x_{l+1}^\pm] \pm (x_k^\pm x_l^\pm + x_l^\pm x_k^\pm), & [\tilde{h}_{k+2}, \hat{x}_l^\pm] &= [\tilde{h}_k, \hat{x}_{l+2}^\pm] \pm (h_k \hat{x}_l^\pm + \hat{x}_l^\pm h_k), \\ [k_{m+2}, x_l^\pm] &= [k_m, x_{l+2}^\pm] \pm (k_m x_l^\pm + x_l^\pm k_m), \\ [k_{m+2}, \hat{x}_l^\pm] &= [k_m, \hat{x}_{l+2}^\pm] \pm (k_m \hat{x}_l^\pm - \hat{x}_l^\pm k_m), & [x_{k+1}^\pm, \hat{x}_l^\pm] &= [x_k^\pm, \hat{x}_{l+1}^\pm] \pm (x_k^\pm \hat{x}_l^\pm + \hat{x}_l^\pm x_k^\pm), \\ [\hat{x}_{2k+1}^\pm, x_l^\pm] - [\hat{x}_{2k-1}^\pm, x_{l+2}^\pm] &= \pm (x_l^\pm \hat{x}_{2k-1}^\pm + \hat{x}_{2k-1}^\pm x_l^\pm). \end{aligned}$$

К сожалению, в настоящее время отсутствует опубликованное подробное доказательство этого результата. В приложении мы приводим план его доказательства. Подробное доказательство, по существу, элементарно по методам, но довольно громоздко и заслуживает отдельной публикации.

6. КОРНЕВЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ. ТЕОРЕМА ПБВ

В этом разделе мы сформулируем теорему ПБВ для янгиана странной супералгебры Ли. Этот результат – квантовый аналог соответствующей теоремы для универсальных обертывающих алгебр [7]. В обоих случаях конструируется некий бесконечный линейный базис (т.е. базис в векторном пространстве). Пусть ниже $\mathfrak{g} = A(n-1, n-1)$, $\mathfrak{g}_0 = Q_n$. Удобнее вести рассуждения в случае произвольного n , хотя можно считать, что $n = 2$.

Будем называть *степенью образующих* $a_{i,k}$, $a_{i,k} \in \{x_{i,k}^+, x_{i,k}^-, h_{i,k}, \hat{x}_{i,k}^+, \hat{x}_{i,k}^-, k_{i,k}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, их второй индекс. *Степенью монома* от образующих будем называть сумму степеней сомножителей, *степенью многочлена* от образующих – максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином, а *степенью тензорного произведения* мономов – сумму степеней тензорных сомножителей. *Степенью тензорного полинома* будем, как и выше, называть максимальную из степеней мономов, входящих в этот полином. Обозначим пространство элементов $Y(\mathfrak{g}_0)$ степени не выше k через $Y_k = Y_k(\mathfrak{g}_0)$. Получаем на $Y(\mathfrak{g}_0)$ фильтрацию:

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$$

Сконструируем корневые векторы для $Y(\mathfrak{g}_0)$. Пусть $\Delta_+ = \Delta_+(n-1)$ – множество положительных корней супералгебры Ли $A(n-1, n-1)$. Рассмотрим также множество $\hat{\Delta}_+ = \hat{\Delta}_+(n-1)$ положительных корней аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1, n-1)$ и множество $\Delta_+^0 = \Delta_+^0(n-1)$ положительных корней простой алгебры Ли $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n)$ (которая совпадает с корневой системой странной супералгебры Ли Q_n). Соответствующие обозначения без нижнего индекса “+” будут обозначать множества всех корней соответствующих супералгебр Ли. Идея упорядочения состоит в том, чтобы зафиксировать определяемый ниже порядок на множестве положительных корней скрученной токовой аффинной супералгебры Ли типа $A^{(2)}(n-1, n-1)$. Этот порядок индуцирует порядок на соответствующих корневых образующих. Используя тот факт, что в присоединенной градуированной супералгебре янгиана $Y(Q_n)$ (а также его квантового дубля) коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями скрученной токовой супералгебры Ли (являющейся подалгеброй скрученной аффинной супералгебры Ли $A^{(2)}(n-1, n-1)$), мы можем определить такой же порядок и на корневых образующих янгиана $Y(Q_n)$ (а также его квантового дубля). Перейдем к определению выпуклого порядка. Определим на введенных выше множествах положительных корней выпуклые порядки по индукции. Сначала зафиксируем упорядочение на множестве простых корней, соответствующее их нумерации: $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \dots$. Если $\alpha, \beta \in \Delta_+(\hat{\Delta}_+, \Delta_+^0)$, $\alpha \prec \beta$ и определена их сумма $\alpha + \beta$, то будем считать, что $\alpha \prec \alpha + \beta \prec \beta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением выпуклого порядка на множестве Δ_+ .

Зафиксируем монотонное отображение, сохраняющее порядок: $\alpha: [1, 2, \dots, N] \rightarrow \Delta_+$, $\alpha(k) \prec \alpha(s)$, если $k < s$. (Отметим, что $N = 4(n-1)^2 - 2$.) Это отображение индуцирует порядок на корнях $A(n-1, n-1)_0$ и на корнях, соответствующих образующим из $A(n-1, n-1)_1$. Отметим также, что эти порядки определяют монотонные отображения $\alpha_0: [1, 2, \dots, N_0] \rightarrow \Delta_+^0(n-1)$, $\alpha_1: [1, 2, \dots, N_1] \rightarrow \Delta_+^0(n-1)$, где $N_0 = N_1 = (n-1)^2 - 1$, и что на множестве четных и на множестве нечетных корней сужение этого отображения индуцирует также монотонные отображения.

Пусть $(\bar{i}, \bar{k}) = (i_1, k_1, i_2, k_2, \dots, i_{2n-1}, k_{2n-1})$ – вектор, $|\bar{i}, \bar{m}| = \sum_{j=1}^n (i_j + m_j)$ – сумма компонент этого вектора. Опишем сначала базис ПБВ в $Y(\mathfrak{g}) = Y(A(n-1, n-1))$.

Пусть $\bar{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $k_i \geq 0$, – вектор, $k = |\bar{k}| = \sum_{i=1}^r k_i$. Пусть также

$$x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{r}, \bar{t}) = (x_{\alpha(1), k_1}^+)^{w_1} \times \dots \times (x_{\alpha(N), k_N}^+)^{w_N} \times \\ \times (h_{1, s_1})^{p_1} \times \dots \times (h_{2n-1, s_{2n-1}})^{p_{2n-1}} \times (x_{\alpha(1), r_1}^-)^{t_1} \times \dots \times (x_{\alpha(N), r_N}^+)^{t_N}.$$

На множестве векторов $\{x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{r}, \bar{t})\}$ определим лексикографический порядок.

Пусть $\alpha = \alpha_s + \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_t$; $\alpha, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t \in \Delta_+$, а $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t$ – простые корни, $s < t$, $l = t - s + 1$. Пусть $x_{s, k_1}^\pm, \dots, x_{t, k_l}^\pm \in Y(\mathfrak{g}_1)$, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_l$. Определим корневые векторы формулами

$$x_{\alpha, k} = [x_{s, k_1}^\pm, [x_{s+1, k_2}^\pm, [\dots, x_{t, k_l}^\pm] \dots]].$$

Нетрудно проверить, что если $(k'_1, \dots, k'_l)$ – другое разложение числа k , то

$$x_{\alpha, k} = [x_{m, k'_1}^\pm, [x_{m+1, k'_2}^\pm, \dots, x_{t, k'_l}^\pm] \dots].$$

Данный порядок однозначно индуцирует порядок на $Y(\mathfrak{g}_0) = Y(Q_n)$. Как и выше, введем векторы

$$x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{l}, \bar{v}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{i}, \bar{q}; \bar{r}, \bar{t}; \bar{j}, \bar{u}) = \\ = (x_{\alpha(1), k_1}^+)^{w_1} \times \dots \times (x_{\alpha(N), k_N}^+)^{w_N} \times (\hat{x}_{\alpha(1), l_1}^+)^{v_1} \times \dots \times (\hat{x}_{\alpha(N), l_N}^+)^{v_N} \times \\ \times (h_{1, s_1})^{p_1} \times \dots \times (h_{n-1, s_{n-1}})^{p_{n-1}} \times (k_{1, i_1})^{q_1} \times \dots \times (k_{n-1, i_{n-1}})^{q_{n-1}} \times \\ \times (x_{\alpha(1), r_1}^-)^{t_1} \times \dots \times (x_{\alpha(N), r_N}^+)^{t_N} \times (\hat{x}_{\alpha(1), j_1}^-)^{u_1} \times \dots \times (\hat{x}_{\alpha(N), j_N}^+)^{u_N}.$$

На множестве векторов $\{x(\bar{k}, \bar{w}; \bar{l}, \bar{v}; \bar{s}, \bar{p}; \bar{i}, \bar{q}; \bar{r}, \bar{t}; \bar{j}, \bar{u})\}$ определим, как и выше, лексикографический порядок, индуцированный порядком на корнях простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$.

Отметим, что по модулю членов меньшей степени (т.е. по модулю $Y(\mathfrak{g})_{k-1}$) коммутационные соотношения в $\bigoplus_{k=1}^\infty Y(\mathfrak{g})_k / Y(\mathfrak{g})_{k-1} \oplus Y(\mathfrak{g})_0$ аналогичны коммутационным соотношениям универсальной обертывающей скрученной супералгебры Ли токов $U(\mathfrak{g}[t])^\sigma$.

Для каждого числа k зафиксируем вектор $(k_1, k_2, \dots, k_l)$, $k = k_1 + \dots + k_l$, определяющий разбиение этого числа.

Выше мы ввели линейный порядок на множестве корней Δ и индуцированный этим порядком порядок на корневых векторах. Обозначим через $(\Omega, \prec)$ множество упорядоченных мономов от $x_\alpha, h_i, \hat{x}_\alpha, k_i, \alpha \in \Delta^0$, $i \in I = \{1, \dots, n-1\}$, относительно определенного выше упорядочивания $\prec$. Мы используем обозначение $x_\alpha = x_\alpha^+, x_{-\alpha} = x_\alpha^-, \hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha^+, \hat{x}_{-\alpha} = \hat{x}_\alpha^-, \alpha \in \Delta_+^0$.

ТЕОРЕМА 4. $(\Omega, \prec)$ – базис ПБВ в янгиане $Y(\mathfrak{g})$.

Данный результат является новым, но его доказательство основано, по существу, на известных методах. В приложении мы приводим это доказательство, опуская некоторые детали.

7. КВАНТОВЫЙ ДУБЛЬ

Пусть $\mathfrak{g} = Q_2$. Отметим, что универсальная обертывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$.

Введем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Напомним определение квантового дубля (см. [3]). Пусть A – супералгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда *квантовым дублем* DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R) , что DA содержит A , A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A \otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA \otimes DA$; линейное отображение $A \otimes A^0 \rightarrow DA$, $a \otimes b \rightarrow ab$ – биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием классического дубля $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}} \oplus (-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Так как янгиан является квантованием бесконечномерной бисупералгебры Ли, то при определении его квантового дубля требуется некоторая аккуратность.

Пусть $C(\mathfrak{g})$ (см. [5], [19]) – супералгебра, порожденная образующими $h_k, x_k^{\pm}, k_k, \hat{x}_k^{\pm}$, $k \in \mathbb{Z}$, которые удовлетворяют соотношениям, приведенным в теореме 3.

Если определить степень элементов в $C(\mathfrak{g})$ формулой $\deg(h_r) = \deg(x_r^{\pm}) = \deg(k_r) = \deg(\hat{x}_r^{\pm}) = r$, то получаем фильтрацию на $C(\mathfrak{g})$:

$$\cdots C_{-n} \subset \cdots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \cdots \subset C_m \subset \cdots C(\mathfrak{g}), \quad (13)$$

где $C_k = \{x \in C(\mathfrak{g}) : \deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\overline{C}(\mathfrak{g})$ – формальное пополнение $C(\mathfrak{g})$ относительно этой фильтрации. Образующие $x_r^{\pm}, h_r, \hat{x}_r^{\pm}, k_r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(\mathfrak{g})$ в $\overline{C}(\mathfrak{g})$, изоморфную $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $Y^-(\mathfrak{g})$ – замкнутая подсупералгебра в $\overline{C}(\mathfrak{g})$, порожденная образующими $x_r^{\pm}, h_r, \hat{x}_r^{\pm}, k_r$, $r < 0$.

ТЕОРЕМА 5. Супералгебра Хопфа $Y^0(\mathfrak{g})$ изоморфна $Y^-(\mathfrak{g})$.

Доказательство этого результата основано на стандартных вычислениях, и здесь мы его опускаем ввиду громоздкости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство основных утверждений

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $HH^i(X, Y)$, $i = 1, 2$, – группа когомологий Хохшильда ассоциативной алгебры Ли X с коэффициентами в бимодуле Y . Для доказательства существования квантования надо показать, что вторые когомологии Хохшильда универсальной обертывающей алгебры исходной скрученной бисупералгебры Ли $U(B_0) = U(G[u]^{\tilde{\sigma}})$ с коэффициентами в бимодуле, являющемся тензорным

квадратом исходной универсальной обертывающей супералгебры скрученной бисупералгебры Ли токов, равны нулю. Рассмотрим $HH^i(U(B_0), U(B_0) \otimes U(B_0))$, $i = 1, 2$. Явными вычислениями можно показать, что в этом случае каждый коцикл является кограницей. Опишем схему доказательства этого утверждения. Будем использовать при доказательстве обозначение $\mathfrak{g} = B_0$. Рассмотрим комплекс

$$0 \rightarrow k \rightarrow U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes 3} \rightarrow \dots \quad (14)$$

с дифференциалами $d_k: U(\mathfrak{g})^{\otimes k} \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes(k+1)}$, определяемыми формулами

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i d_k^i, d_k^i(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) = \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_k, \quad 1 \leq i \leq k, \\ d_k^0(x) &= 1 \otimes x, \quad d_k^{k+1}(x) = x \otimes 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что когомологии H^k этого комплекса совпадают с когомологиями следующего комплекса (с теми же самыми дифференциалами):

$$0 \rightarrow D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots, \quad (16)$$

где $D_k = \text{Ker } s_k^1 \cap \text{Ker } s_k^2 \cap \dots \cap \text{Ker } s_k^k$, $s_k^i = \epsilon(a_i) a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_k$.

Последний факт обосновывается следующим образом. Сначала проверяется, что сужение дифференциалов переводит коциклы в коциклы, а кограницы в кограницы, откуда следует корректность отображения когомологий одного комплекса на другой. Несложно проверяется биективность построенного отображения. Далее заметим, что $d_k(\mathfrak{g}^{\otimes k}) = 0$. Отсюда следует существование отображения $\mathfrak{g}^{\otimes k} \rightarrow H^k$. Его ограничение на $\bigwedge^k \mathfrak{g}$ обозначим через μ . Стандартными рассуждениями можно показать, что μ – изоморфизм. Нетривиальным здесь является доказательство сюръективности.

Отметим, что доказательство сюръективности в силу теоремы ПБВ для универсальных обертывающих супералгебр Ли сводится к доказательству сюръективности сужения для следующего комплекса, эквивалентного исходному:

$$0 \rightarrow k \rightarrow \text{Sym}^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Sym}^*(\mathfrak{g}) \otimes \text{Sym}^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \dots. \quad (17)$$

Осталось показать, что первые и вторые когомологии последнего комплекса нулевые. Это может быть проверено непосредственно, однако фактически следует из результатов Лейтеса и Фукса о когомологиях супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m, n)$ (см. [20], стр. 169, а также стр. 148) и хорошо известных вычислений для когомологий алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ со значениями в полупростом модуле (см., например, [21], стр. 534, или [3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вывод системы определяющих соотношений достаточно громоздок, хотя и использует довольно простую технику и основан на простых идеях. Основная идея состоит в том, что, как ассоциативная супералгебра, супералгебра $Y(Q_n)$ порождается системой образующих, которые являются квантованиями токов степеней 0 и 1. Для того чтобы описать систему порождающих соотношений, мы получаем явные формулы для коумножения на квантованиях

этих образующих. После этого соотношения получаются из условия совместности структур супералгебры и косупералгебры, т. е. из того факта, что коумножение есть гомоморфизм ассоциативных супералгебр. Ниже мы приводим некоторые моменты вывода системы определяющих соотношений для янгиана $Y(Q_2)$. Он распадается на ряд вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathfrak{A}$ – супералгебра Ли с инвариантной билинейной формой $(\cdot, \cdot)$; $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ – двойственные относительно этой билинейной формы базисы. Тогда для каждого элемента $g \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство

$$\left[g \otimes 1, \sum e_i \otimes e^i \right] = - \left[1 \otimes g, \sum e_i \otimes e^i \right]. \quad (18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ – супералгебра Ли с невырожденным инвариантным скалярным произведением таким, что $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}^1$ – изотропные подпространства, а $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}^1$ невырожденно спарены, $\mathfrak{A}^0$ – подсупералгебра Ли, $\mathfrak{A}^1$ – модуль над $\mathfrak{A}^0$. Пусть также $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ – двойственные базисы в $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}^1$ соответственно, $\mathbf{t}_0 = \sum_i e_i \otimes e^i$, $\mathbf{t}_1 = \sum_i e^i \otimes e_i$. Тогда для всех $a \in \mathfrak{A}^0$, $b \in \mathfrak{A}^1$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} [a \otimes 1, \mathbf{t}_0] &= -[1 \otimes a, \mathbf{t}_0], & [a \otimes 1, \mathbf{t}_1] &= -[1 \otimes a, \mathbf{t}_1], \\ [b \otimes 1, \mathbf{t}_0] &= -[1 \otimes b, \mathbf{t}_1], & [b \otimes 1, \mathbf{t}_1] &= -[1 \otimes b, \mathbf{t}_0]. \end{aligned}$$

Вычислим значение δ на $h \cdot u$:

$$\begin{aligned} \delta(h \cdot u) &= \left[h \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h \cdot u, \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1}{u - v} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1}{u + v} \right] = \\ &= \left[h \cdot v \otimes 1 - h \cdot u \otimes 1, \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1}{u - v} \right] + \left[h \cdot v \otimes 1 + h \cdot u \otimes 1, \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1}{u + v} \right] = \\ &= \left[h \otimes 1, \frac{1}{2}(\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1) \right] + \left[h \otimes 1, \frac{1}{2}(\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_1) \right] = [h \otimes 1, \mathbf{t}_0] = -[1 \otimes h, \mathbf{t}_1]. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть вычислены значения коцикла на других образующих:

$$\begin{aligned} \delta(k \cdot u) &= -[k \otimes 1, \mathbf{t}_0] = [1 \otimes k, \mathbf{t}_1], \\ \delta(x^\pm \cdot u) &= -[x^\pm \otimes 1, \mathbf{t}_0] = [1 \otimes x^\pm, \mathbf{t}_1], \quad \delta(\hat{x}^\pm \cdot u) = -[\hat{x}^\pm \otimes 1, \mathbf{t}_0] = [1 \otimes \hat{x}^\pm, \mathbf{t}_1]. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta_0(a) := a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Тогда из условия однородности квантования следует, что $\Delta(h_1) = \Delta_0(h_1) + \hbar F(x^+ \otimes x^-, \hat{x}^+ \otimes \hat{x}^- + h \otimes h + k \otimes k)$. Из принципа соответствия (см. п. 5 в определении 2) следует, что

$$\hbar^{-1}(\Delta(h_1) - \Delta^{\text{оп}}(h_1)) = F - \tau F = [1 \otimes h, \mathbf{t}_0].$$

Пусть $\bar{t}_0 = \sum x^+ \otimes x^- - \hat{x}^+ \otimes \hat{x}^-$. Определим $\Delta(k_1)$ формулой

$$\Delta(k_1) = \Delta_0(k_1) + \hbar[1 \otimes k, \mathbf{t}_0].$$

Выполнимость принципа соответствия в этом случае проверяется непосредственно.

Точно так же можно определить коумножение на других образующих. Получаем, что

$$\Delta(x_1^+) = \Delta_0(x_1^+) + \hbar[1 \otimes x^+, t_0], \quad \Delta(x_1^-) = \Delta_0(x_1^-) + \hbar[x^- \otimes 1, t_0].$$

Можно непосредственно проверить, что следующие соотношения сохраняются коумножением:

$$\begin{aligned} [h_1, x_0^\pm] &= \pm 2x_1^\pm, & [k_1, x_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm, \\ [h_1, \hat{x}_0^\pm] &= \pm 2\hat{x}_1^\pm, & [k_1, \hat{x}_0^\pm] &= \pm 2x_1^\pm. \end{aligned}$$

Таким образом, определенная выше операция коумножения действительно является корректно определенным гомоморфизмом ассоциативных супералгебр. Аналогично получаются и остальные определяющие соотношения в янгиане $Y(Q_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Доказательство теоремы техническое и сложное, мы наметим только его примерный план. Доказательство проводится по индукции. Сначала формулы проверяются при малых значениях индекса ($n = 0, 1$), а затем проверяется шаг индукции последовательно для написанных выше определяющих соотношений. При этом последовательность доказательства для определяющих соотношений следующая. Сначала выводятся коммутационные соотношения для h_m , $x_n^\pm$ и $x_k^\pm$, $x_m^\pm$ с использованием определения h_n . Затем таким же образом получаются соотношения для k_m и $x_n^\pm$, а также для h_m и $\hat{x}_n^\pm$ с использованием соотношений для $\hat{x}_k^\pm$ и $x_m^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Докажем сначала полноту $(\Omega, \prec)$. Пусть $\mathfrak{g} = Q_n$. Опуская детали, приведем схему доказательства. Для монома M из $(\Omega, \prec)$ определим его длину $l(M)$ как число множителей – образующих, входящих в M . При переупорядочивании сомножителей в силу определяющих соотношений в янгиане мы будем получать дополнительные слагаемые либо меньшей степени, либо той же степени и меньшей длины. Используя индукцию, получаем, что $Y(\mathfrak{g})$ совпадает с линейной оболочкой $(\Omega, \prec)$.

Докажем теперь линейную независимость мономов из $(\Omega, \prec)$. Это доказательство основано на существовании представления ρ янгиана $Y(\mathfrak{g})$, которое обладает тем свойством, что $\rho(x_{i,0}^\pm)$, $\rho(\hat{x}_{i,0}^\pm)$, $\rho(h_{i,0})$ и $\rho(k_{i,0})$ линейно независимы. Представление ρ , обладающее тем свойством, что $\rho|_{U(\mathfrak{g})}$ – фундаментальное представление, легко строится исходя из вида определяющих соотношений. Более того, можно показать, что существует гомоморфизм $\varphi: U(\mathfrak{g}) \rightarrow Y(\mathfrak{g})$, обладающий тем свойством, что $\varphi|_{U(\mathfrak{g})}$ – тождественное отображение. Если ρ_0 – представление $U(\mathfrak{g})$, обладающее отмеченным выше свойством, то этим же свойством будет обладать и представление $\rho = \rho_0 \circ \varphi$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$.

Предположим, что мономы из $(\Omega, \prec)$ не являются линейно независимыми. Тогда найдутся такие числа $c_1, \dots, c_s \in C \setminus \{0\}$ и мономы $M_1, \dots, M_s \in (\Omega, \prec)$, что

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j M_j = 0. \quad (19)$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. При дальнейшем изложении нам потребуются автоморфизмы τ_a , $a \in \mathbb{C}$. На образующих они определяются формулами

$$\begin{aligned}\tau_a(h_m) &= \sum_{0 \leq r \leq m} C_m^r a^{m-r} h_r, & \tau_a(k_m) &= \sum_{0 \leq r \leq m} C_m^r a^{m-r} k_r, \\ \tau_a(x_m^\pm) &= \sum_{0 \leq r \leq m} C_m^r a^{m-r} x_r^\pm, & \tau_a(\hat{x}_m^\pm) &= \sum_{0 \leq r \leq m} C_m^r a^{m-r} \hat{x}_r^\pm.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что τ_a корректно определены. Пусть $\rho_0 = \rho \circ \varphi: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$ – такое представление $Y(\mathfrak{g})$, что $\rho_0(x_0^+)$, $\rho_0(x_0^-)$, $\rho_0(h_0)$, $\rho_0(\hat{x}_0^+)$, $\rho_0(\hat{x}_0^-)$, $\rho_0(k_0)$ линейно независимы. Пусть L – максимальная из длин мономов $M_1, \dots, M_s$. Перемножая тензорно ρ_0 , мы можем сконструировать представление $\rho: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$ такое, что все мономы от $\rho(x_0^\pm)$, $\rho(h_0)$, $\rho(\hat{x}_0^\pm)$, $\rho(k_0)$ при $l(M) \leq L$ линейно независимы. Определим представление $\tilde{\rho}: Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } \tilde{V} := \text{End} \otimes C[a]$ формулой $\tilde{\rho}(x)(a) = (\rho \circ \tau_a)(x)$, $x \in Y(\mathfrak{g})$. Применяя представление $\tilde{\rho}$ к обеим частям (19) и выбирая в (19) члены старшей степени, соответствующей a , видим, что равенство (19) должно иметь место для некоторых одночленов такой же степени $d = d(M_j)$.

Используя определенные выше автоморфизмы, рассмотрим действие $Y(\mathfrak{g})$ на $(V \otimes C[a_1]) \otimes (V \otimes C[a_2]) \otimes \dots \otimes (V \otimes C[a_m])$. С учетом определения коумножения автоморфизмов τ_a , выбирая члены старшей степени, получаем, что

$$\sum_{1 \leq j \leq s} c_j \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} (ha_1^k \otimes 1^{\otimes(m-1)} + ha_2^k \otimes 1^{\otimes(m-2)} + \dots + 1^{\otimes(m-1)} \otimes ha_m^k)^{m_{kj}} = 0,$$

где $h = \rho(h_0)$. Разлагая произведение, мы собираем члены в выражение $f(a_1, \dots, a_m)h^{\otimes m}$, где f – моном от $a_1, \dots, a_m$. Из этих членов выберем члены с наибольшей степенью a_1 , из отобранных членов выберем члены с наибольшей степенью a_2 и т. д. В конце концов получим член, в котором степени входящих в произведение корневых образующих взаимно различны. Следовательно, равенство (19), с которого мы начали рассуждения, не может иметь места.

Предположим теперь, что линейная независимость доказана для всех мономов с $p \leq l$, где $l \geq 1$, и имеет место равенство (19) с $c_j \neq 0$ и $p(M_j) = l + 1$. Применяя Δ к (19) и разлагая, выберем члены старшей степени. После этого, используя стандартные рассуждения по индукции, получаем, что $c_1 = \dots = c_s = 0$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор признателен рецензенту за конструктивные замечания, способствующие улучшению изложения настоящей работы. Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” в рамках мероприятий 1.2.2 (госконтракт № П1116) и 1.1 (конкурс 2012-1.1-12-000-1003-1775).

Список литературы

- [1] V. G. Kac, *Commun. Math. Phys.*, **53**:1 (1977), 31–64.
- [2] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on Lie Superalgebras*, Academic Press, San Diego, CA, 2000.

- [3] V. G. Drinfel'd, "Quantum groups", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, California, August 3–11, 1986), v. 1, ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1988, 798–820.
- [4] В. Г. Дринфельд, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1060–1064.
- [5] В. Г. Дринфельд, *Докл. АН СССР*, **296**:1 (1987), 13–17.
- [6] В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 69–70.
- [7] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] A. I. Molev, "Yangians and their applications", *Handbook of Algebra*, v. 3, ed. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 2003, 907–959, arXiv: math.QA/0211288.
- [9] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009.
- [10] В. А. Стукопин, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:3 (1994), 85–88.
- [11] M. Nazarov, *Lett. Math. Phys.*, **21**:2 (1991), 123–131.
- [12] G. Arutyunov, S. Frolov, *Foundations of the $AdS^5 \times S^5$ Superstring. Part 1*, arXiv: 0901.4937.
- [13] L. Dolan, C. R. Nappi, E. Witten, "Yangian symmetry in $D = 4$ superconformal Yang–Mills theory", *Quantum Theory and Symmetries*, Proceedings of the 3rd International Symposium (Cincinnati, USA, 10–14 September 2003), eds. P. C. Argyres, T. J. Hodges, F. Mansouri, J. J. Scanio, P. Suranyi, L. C. R. Wijewardhana, World Scientific, Hackensack, NJ, 2004, 300–315, arXiv: hep-th/0401243.
- [14] F. Spill, A. Torrielli, *J. Geom. Phys.*, **59**:4 (2010), 489–502, arXiv: 0803.3194.
- [15] А. И. Молев, М. Л. Назаров, Г. И. Ольшанский, *УМН*, **51**:2(308) (1996), 27–104.
- [16] V. Stukopin, *SIGMA*, **3** (2007), 069, 12 pp.
- [17] В. А. Стукопин, *Современная математика и ее приложения. Алгебра*, **60** (2008), 145–163.
- [18] В. А. Стукопин, *Фундамент. и прикладная математика*, **11**:2 (2005), 185–208.
- [19] В. А. Стукопин, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:2 (2006), 86–90.
- [20] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [21] К. Кассель, *Квантовые группы*, Фазис, М., 1999.