Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, Свойства максимумов функции кратности, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 99–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:50:41

© 2013 г.

В. Д. Ляховский*

СВОЙСТВА МАКСИМУМОВ ФУНКЦИИ КРАТНОСТИ

Функция кратности $M(\nu, p)$ в разложении тензорной степени алгебры $(L^\omega)^{\otimes p}$ переопределена как гладкая функция в весовом пространстве $P_{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Изучается поведение максимумов функции кратности. В результате для любой фиксированной степени p можно легко найти подмодуль с максимальной кратностью.

Ключевые слова: алгебры Ли, теория представлений, тензорные степени, интегрируемые модели.

DOI: 10.4213/tmf8354

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовых моделях (таких, как интегрируемые системы, конформные теории поля и квантовая гравитация) чрезвычайно важной является проблема разложения тензорного произведения. Спинового цепочки представляют собой естественные примеры таких систем. Если имеется $\mathfrak{g}$ -инвариантность, то компоненты преобразуются как $\mathfrak{g}$ -модули L^ω со старшими весами, при этом состояния системы ведут себя как $(L^\omega)^{\otimes p}$ со старшим весом $p\omega$. Структура спектра гамильтониана определяется кратностями $m(\nu, p)$ в разложении

$$(L^\omega)^{\otimes p} = \sum_{\nu} m(\nu, p) L^\nu. \quad (1)$$

В таком контексте $\mathfrak{g}$ является простой классической алгеброй Ли, а L^ω – фундаментальным $\mathfrak{g}$ -модулем минимальной размерности (со старшим весом ω). Мы можем рассматривать $(L^\omega)^{\otimes p}$ как $\oplus^p \mathfrak{g}$ -неприводимый модуль, а разложение считать редукцией алгебры $\oplus^p \mathfrak{g}$ к диагональной подалгебре в ней.

Основной задачей так называемой проблемы тензорных степеней является определение всех компонент разложения вместе с их кратностями [1]. Существует множество комбинаторных исследований этой проблемы (см., например, статьи [2] и [3]), а также ряд работ, связанных с фермионными формулами (например, статьи [4]–[6]). На этом пути были разработаны различные комбинаторные методы и получены важные результаты общего характера. Практические вычисления с использованием указанных комбинаторных формул едва ли возможны во всех случаях, за исключением простейших примеров [7].

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakh1507@nm.ru

В настоящей статье мы рассматриваем кратности $M(\nu, p)$ в разложении (1) как функции, параметризованные параметром p и определенные на всем весовом пространстве: $\nu \in P_{\mathfrak{g}}$. Будучи ограниченной на замкнутую фундаментальную камеру Вейля $C^{(0)}$, функция кратности совпадает с соответствующими коэффициентами кратности:

$$M^{\otimes p \omega}(\nu, p) \downarrow_{\overline{C^{(0)}}} = m^{\otimes p \omega}(\nu, p).$$

Используя свойства симметрии Вейля, мы найдем явные общие решения для последовательностей A и B [8], [9].

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ КРАТНОСТИ

Кратко напомним рекуррентные свойства функций кратности. Рассмотрим формулу Вейля в терминах формальных характеров $\text{ch}(L)$ для тензорного произведения $L^\mu \otimes L^\nu$, интерпретируемого как модуль диагональной подалгебры $\mathfrak{g}_{\text{diag}} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$,

$$\text{ch}(L^\mu) \text{ch}(L^\nu) \downarrow_{P_{\text{diag}}^+} = \sum_{\xi \in P_{\text{diag}}} M_\xi^{\mu\nu} \text{ch}(L^\xi).$$

Ее можно переписать через сингулярные элементы $\Psi^{(\nu)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{(\nu+\rho)}$ (здесь $\epsilon(w)$ – детерминант оператора w , действующего на $P_{\mathfrak{g}}$):

$$\left(\frac{\Psi^{(\mu)} \Psi^{(\nu)}}{\Psi^{(0)} \Psi^{(0)}} \right) \downarrow_{P_{\text{diag}}} = \sum_{\xi \in P_{\text{diag}}} M_\xi^{\mu\nu} \frac{\Psi_{\text{diag}}^{(\xi)}}{\Psi_{\text{diag}}^{(0)}}.$$

Произведение в формальной алгебре коммутирует с операцией проектирования:

$$(\Psi^{(\mu)} \Psi^{(\nu)}) \downarrow_{P_{\text{diag}}} = \Psi_{\downarrow P_{\text{diag}}}^{(\mu)} \Psi_{\downarrow P_{\text{diag}}}^{(\nu)} = \Psi_{\text{diag}}^{(\mu)} \Psi_{\text{diag}}^{(\nu)}.$$

Таким образом, один множитель можно исключить, а другой преобразует соответствующий сингулярный элемент в весовую диаграмму модуля, скажем, $N(L_{\text{diag}}^{(\nu)})$:

$$\begin{aligned} (\Psi_{\text{diag}}^{(0)})^{-1} \Psi_{\text{diag}}^{(\mu)} \Psi_{\text{diag}}^{(\nu)} &= \sum_{\xi \in P_{\text{diag}}} M_\xi^{\mu\nu} \Psi_{\text{diag}}^{(\xi)} = \\ &= N(L_{\text{diag}}^{(\mu)}) \Psi_{\text{diag}}^{(\nu)} = \Psi_{\text{diag}}^{(\mu)} N(L_{\text{diag}}^{(\nu)}). \end{aligned}$$

В результате на функции кратности $M(\nu, p)$ налагается система связей [10], [11]:

$$M_{\xi}^{\otimes p \omega} - M_{\xi - \omega}^{\otimes (p-1) \omega} = M_{\xi - \omega + \alpha_1}^{\otimes (p-1) \omega} + M_{\xi - \omega + \alpha_1 + \alpha_2}^{\otimes (p-1) \omega} + \dots + M_{\xi - \omega + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}^{\otimes (p-1) \omega}.$$

Для решения рекуррентных соотношений используются свойства симметрии Вейля. В работах [8], [9] доказано, что общие решения для последовательностей A и B имеют вид

$$\begin{aligned} M_{A_n}^{\otimes p \omega}(\nu\{a_i\}) &= \frac{p! \prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^{n-1} (a_j + a_{j+1}) \dots \prod_{j=1}^2 (\sum_{k=1}^{n-1} a_{j+k}) (\sum_{k=1}^n a_k)}{\prod_{l=0}^n \left(\frac{1}{n+1} \left(p + \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{s=1}^l (-s a_s) + \sum_{t=l}^{n-1} (n-t) a_{t+1} \right) \right)!}, \\ M_{B_n}^{\otimes p \omega}(\nu\{a_i\}) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(p+2k)! \prod_{l=1}^n a_l \prod_{i < j} (a_i^2 - a_j^2)}{2^{2k} \left(\frac{p+a_{k+1}+2n-1}{2} \right)! \left(\frac{p-a_{k+1}+2n-1}{2} \right)!}. \end{aligned}$$

Здесь $M^{\otimes p\omega}$ – функции координат a_i старшего веса ν в базисе фундаментальных весов, измеренных от центральной точки симметрии Вейля: $\nu + \rho = \sum_i a_i \omega_i$ (в случае B_n рассматриваются координаты в базисе $\{e_i/2\}$). В частности, для алгебр A_2 и B_2 и старшего веса $\nu + \rho = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ получим следующие компактные выражения:

$$M_{A_2}(p; \{a_1, a_2\}) = \frac{p! a_1 a_2 (a_1 + a_2)}{\left(\frac{p-(a_1+2a_2)+3}{3}\right)! \left(\frac{p+(2a_1+a_2)+3}{3}\right)! \left(\frac{p+(-a_1+a_2)+3}{3}\right)!},$$

$$M_{B_2}(p; \{a_1, a_2\}) = \frac{p! (p+2)! a_1 a_2 (a_1 + a_2) (a_1 - a_2)}{4 \left(\frac{p+a_1+3}{2}\right)! \left(\frac{p+a_2+3}{2}\right)! \left(\frac{p-a_1+3}{2}\right)! \left(\frac{p-a_2+3}{2}\right)!}.$$

Явные выражения для функций кратности дают нам уникальную возможность изучения свойств сложных квантовых систем. Например, в специальной системе координат зависимость функции кратности от p становится полиномиальной. Пусть центр новой системы для алгебры $\mathfrak{g} = A_2$ находится на конце старшего веса $(p+1)\omega_1 + \omega_2$. Положим

$$a_1 = \frac{1}{2}(2p - 3b_1 - b_2 + 2), \quad a_2 = b_2 + 1.$$

В координатах $\{b_j\}$ функция кратности имеет вид

$$M_{A_2}(p; b_1, b_2) = \frac{p!}{(p - b_1 + 2)!} (2p - 3b_1 - b_2 + 2)(2p - 3b_1 + b_2 + 4) \times \\ \times \frac{1}{4} \frac{b_2 + 1}{\left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)! \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + 1\right)!}.$$

Используя данную форму записи, мы можем изучать асимптотические свойства кратностей при $p \rightarrow \infty$. Функция кратности для $\mathfrak{g} = A_2$ в координатах $\{b_j\}$ имеет следующий главный член:

$$M_{A_2}(p; b_1, b_2)|_{p \rightarrow \infty} \sim \frac{b_2 + 1}{\left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)! \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + 1\right)!} p^{b_1}.$$

Важно также знать, какой из неприводимых подмодулей L^ν имеет максимальную кратность в разложении $(L^{\omega_1})^{\otimes p} = \sum_\nu M(\nu, p) L^\nu$. Возникает вопрос: как его координаты $(\nu_{\max} + \rho)_i$ зависят от p ? Проблема в том, что даже в простейшем случае зависимость $(\nu_{\max} + \rho)_i(p) \equiv a_{\max, i}(p)$ нерегулярна. Например, в случае алгебры A_1 имеем $a_{\max}(20) = 5$, $a_{\max}(25) = 6$, а при $p = 30$ максимум возвращается в предыдущую координату: $a_{\max}(30) = 5$. Соответствующие кратности равны $M_{A_1}(20; 5) = 48450$, $M_{A_1}(25; 6) = 1225785$ и $M_{A_1}(30; 5) = 33266625$. В следующем разделе мы обсудим особенности этой проблемы и объясним указанную выше нерегулярность.

3. МАКСИМУМЫ ФУНКЦИИ КРАТНОСТИ. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ

Перепишем функцию кратности для алгебры A_1 через Γ -функцию:

$$M_{A_1}(p; a) = \frac{\Gamma(p+1)a}{\Gamma\left(\frac{p-a+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+a+3}{2}\right)}.$$

Рис. 1. Случай алгебры $A_{(1)}$. Максимум функции кратности движется в направлении старших весов l (последовательно снизу вверх кривые отвечают $p = 10, 15, 20, 25, 30$; каждая кривая масштабирована множителем $1/10$ по отношению к предыдущей.)

Теперь можно определить, каким образом координаты точки $\max(M(p; \{a\}))$ зависят от p . Например, в случае $\mathfrak{g} = A_1$ функция $a_{\max}(p)$ гладкая, и ее значение растет с ростом старшего веса ($p\omega$) (см. рис. 1). Этот процесс описывает появление точек, соответствующих решетке весов P_{A_1} , в окрестности движущейся точки $a_{\max}(p)$ (см. рис. 2). Тонкие сплошные линии на рисунке показывают траекторию изменения окрестности с ростом p , а звездочки указывают точки решетки P_{A_1} , которые являются координатами старшего веса, $(\nu_{\max} + \rho)(p) \equiv a_{\max}(p)$ в разложении (1). Последовательность точек с весом $a_{\max}(p)$ нерегулярна, но основу процесса (при малых p) составляют регулярная и гладкая функция кратности $M_{A_1}(p; a)$ и ее производные.

4. МАКСИМУМЫ ФУНКЦИИ КРАТНОСТИ РАНГА 2

Аналогичным образом введем гладкие функции кратности для A_2 и B_2 :

$$M_{A_2}(p; \{a_1, a_2\}) = \frac{\Gamma(p+1)a_1a_2(a_1+a_2)}{\Gamma\left(\frac{p-(a_1+2a_2)+6}{3}\right)\Gamma\left(\frac{p+(2a_1+a_2)+6}{3}\right)\Gamma\left(\frac{p+(-a_1+a_2)+6}{3}\right)}, \quad (2)$$

$$M_{B_2}(p; \{a_1, a_2\}) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p+3)a_1a_2(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{4\Gamma\left(\frac{p+a_1+5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+a_2+5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-a_1+5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-a_2+5}{2}\right)}. \quad (3)$$

Как мы уже видели в предыдущем примере, наша задача состоит в нахождении максимумов функций (2), (3) и зависимостей этих максимумов от p .

Рис. 2. Случай алгебры $A_{(1)}$. Максимумы функции кратности “активируют” ближайшие целочисленные точки решетки весов.

Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{g} = A_2$. Координаты $l_i(p) := a_{i \max}(p)$ подчиняются следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \Psi \left(\frac{p - (l_1 + 2l_2) + 6}{3} \right) - \frac{1}{3} \Psi \left(\frac{p + (2l_1 + l_2) + 6}{3} \right) - \\ & - \frac{1}{3} \Psi \left(\frac{p + (-l_1 + l_2) + 6}{3} \right) + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1 + l_2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \Psi \left(\frac{p + (2l_1 + l_2) + 6}{3} \right) - \frac{1}{3} \Psi \left(\frac{p - (l_1 + 2l_2) + 6}{3} \right) - \\ & - \frac{1}{3} \Psi \left(\frac{p + (-l_1 + l_2) + 6}{3} \right) - \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_1 + l_2} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где Ψ – логарифмическая производная функции Γ . Для больших p эти уравнения можно упростить, и они принимают вид

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -3 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1 + l_2} \right) \right\} &= \frac{(p - (l_1 + 2l_2) + 6)^2}{(p + (2l_1 + l_2) + 6)(p + (-l_1 + l_2) + 6)}, \\ \exp \left\{ -3 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1 + l_2} \right) \right\} &= \frac{(p - (l_1 + 2l_2) + 6)(p + (-l_1 + l_2) + 6)}{(p + (2l_1 + l_2) + 6)^2}. \end{aligned}$$

Введем в качестве новой координаты c расстояние между началом координат и точкой (l_1, l_2) . В этих обозначениях приближенное решение выглядит так:

$$l_2 = l_1 - \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$c = \sqrt{\frac{3.44 + p}{0.67}} - 0.01. \quad (7)$$

Это означает, что максимум с ростом p движется вдоль корня α_3 , центральной линии на $C_{A_2}^{(0)}$. Заметим, что это приближение хорошо работает при $p \gg 1$ (см. рис. 3).

Можно также задать вопрос, в какой точке весового пространства число состояний максимально. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим произведение функции кратности и размерности соответствующего модуля:

$$M_{A_2}(p; \{a_1, a_2\}) \dim L^{[a_1, a_2]} = M_{A_2}(p; \{a_1, a_2\}) a_1 a_2 (a_1 + a_2). \quad (8)$$

Здесь максимум с ростом p также движется вдоль центральной линии $l_2 \approx l_1 - 0.82$ на $C_{A_2}^{(0)}$ (см. рис. 4).

Соответствующие расчеты для B_2 приводят к следующим соотношениям для координат l_1, l_2 максимума функции кратности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{l_1 - l_2} + \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{p - l_1 + 5}{2}\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{p + l_1 + 5}{2}\right) &= 0, \\ \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{l_1 - l_2} + \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{p - l_2 + 5}{2}\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{p + l_2 + 5}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

На этот раз аргументы l_i функции $M_{B_2}^{\max}(p; \{l_1, l_2\})$ (см. выражение (3)) являются ортонормированными координатами в P_{B_2} . Для больших p снова удобно ввести параметр c (расстояние между началом координат и точкой (l_1, l_2)). Приближенные решения системы (9) выглядят так (см. рис. 5):

$$l_2 = 0.049 + 0.412l_1, \quad c = -0.5 + 2\sqrt{p + 3.13}.$$

Отметим, что в этом случае координаты l_1, l_2 снова удовлетворяют одному линейному условию, а второе уравнение является параболическим.

Для числа состояний, т. е. для функции кратности, умноженной на размерность модуля со старшим весом $\nu = (l_1 - 1)\omega_1 + (l_2 - 1)\omega_2$, результат аналогичен (см. рис. 6):

$$l_2^{\text{st}} = 0.15 + 0.53l_1^{\text{st}}, \quad c^{\text{st}} = -1.46 + 3.57\sqrt{7.14p + 19.90}.$$

Покажем, как работают полученные соотношения. Вернемся к случаю $\mathfrak{g} = A_2$ и найдем решение с максимальной кратностью для $p = 100$. Соотношение (7) приводит к параметру (расстоянию) $c = 12.41$. Это означает, что $l_1 + l_2 = 2c/\sqrt{3} = 14.34$. Принимая во внимание уравнение (6), получим координаты максимальной “кратности” для $p = 100$: $l_1 = 7.42, l_2 = 6.92$. Теперь мы можем воспользоваться гладкостью функции $M_{A_2}(p; \{a_1, a_2\})$ и прийти к выводу, что максимальный коэффициент кратности $m_{A_2}(p; \{a_1, a_2\})$ соответствует точке (a_1, a_2) с целочисленными координатами, ближайшей к точке (l_1, l_2) . Мы должны вспомнить классы конгруэнтности, для алгебры A_2 их три. Для первого класса получим точку (8, 7), для второго – точку (8, 6) и для третьего – точку (7, 7). Эта ситуация показана на рис. 7, 8 и 9 соответственно. Соответствующие индексы Дынкина для неприводимых модулей $L^{[m_1, m_2]}$ в $(L^{\omega_1})^{\otimes 100}$ суть [7, 6], [7, 5] и [6, 6].

Рис. 3. Случай алгебры $A_{(2)}$. Максимум функции кратности в зависимости от расстояния c от центра симметрии Вейля.

Рис. 4. Случай алгебры $A_{(2)}$. Произведение функции кратности $M(\nu)$ и размерности соответствующего модуля L^ν (масштабировано множителем 10^2). Фундаментальная камера Вейля содержит фронтальный пик.

Рис. 5. Случай алгебры $B_{(2)}$. Движение максимума функции кратности хорошо описывается кривой $c = -0.5 + 2\sqrt{p + 3.13}$.

Рис. 6. Случай алгебры $B_{(2)}$. Функция кратности $M(\nu)$, умноженная на размерность соответствующего модуля L^ν (масштабировано множителем 10^4). Фундаментальная камера Вейля содержит фронтальный пик, некоторые пики отрицательны, в отличие от случая $A_{(2)}$.

Рис. 7. Алгебра $A_{(2)}$. Максимумы функции кратности и точки первого класса конгруэнтности на решетке. Здесь и на последующих рисунках максимум для $p = 100$ обозначен звездочкой.

Рис. 8. Алгебра $A_{(2)}$. Точки второго класса конгруэнтности.

Рис. 9. Алгебра $A_{(2)}$. Точки третьего класса конгруэнтности.

5. ВЫВОДЫ

Мы продемонстрировали, что функция кратности $M_g(p; \{a_i\})$ является удобным инструментом для изучения свойств разложений тензорных степеней. Ее можно использовать как для нахождения предельных свойств различных кратностей старших весов, так и для исследования “динамики” (по тензорной степени p) веса с максимальной кратностью.

Возможность построения функций кратности для других модулей (не только для фундаментальных модулей минимальной размерности) является проблемой огромной важности.

Благодарности. Автор выражает благодарность организаторам Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS–2012) за гостеприимство. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 12-01-00207).

Список литературы

- [1] S. Kumar, “Tensor product decomposition”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Hyderabad, August 19–27, 2010), v. 3, eds. R. Bhatia, A. Pal, G. Rangarajan, V. Srinivas, M. Vanninathan, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, 1226–1261.
- [2] А. Н. Кириллов, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **205** (1993), 30–37.
- [3] M. Kleber, *Internat. Math. Res. Notices*, **4** (1997), 187–201, arXiv: q-alg/9611032.
- [4] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, “Remarks on fermionic formula”, *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics*, Proceedings of the International Conference on Representations of Affine and Quantum Affine Algebras and Their Applications (Raleigh, NC, USA, May 21–24, 1998), Contemporary Mathematics, **248**, eds. N. Jing, K. Misra, AMS, Providence, RI, 1999, 243–291, arXiv: math/9812022.
- [5] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, “Combinatorial R -matrices for a family of crystals: $B_n(1)$, $D_n(1)$, $A_{2n}(2)$ and $D_{n+1}(2)$ cases”, *Physical Combinatorics*, Proceedings of a Workshop (Kyoto, Japan, January 29 – February 2, 1999), Progress in Mathematics, **191**, eds. M. Kashiwara, T. Miwa, Birkhäuser, Boston, 2000, 105–139, arXiv: math/0012247.
- [6] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Z. Tsuboi, “Paths, crystals and fermionic Formulae”, *MathPhys Odyssey 2001*, Integrable models and beyond. In honor of Barry M. McCoy, dedicated to his 60th birthday, Progress in Mathematical Physics, **23**, eds. M. Kashiwara, T. Miwa, Birkhäuser, Boston, 2002, 205–272, arXiv: math/0102113.
- [7] M. Kleber, *Finite dimensional representations of quantum affine algebras*, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1998, arXiv: math/9809087.
- [8] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. A*, **343**:1 (2012), 012070, 9 pp.
- [9] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. A*, **343**:1 (2012), 012095, 7 pp.
- [10] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. A*, **346**:1 (2012), 012012, 15 pp., arXiv: 1106.2002.
- [11] П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 283–293.