Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, З. С. Эльканова, А. Б. Урусова, Двусторонние преобразования Дарбу, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 2, 207–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:48:08

© 2012 г. А. Б. Шабат^{*†}, З. С. Эльканова*, А. Б. Урусова*

ДВУСТОРОННИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

Уточняется понятие преобразования Дарбу для дифференциальных операторов порядка выше второго и рассматриваются коммутативные кольца дифференциальных операторов, инвариантных относительно группы растяжений независимой переменной.

Ключевые слова: преобразования Дарбу, коммутативные кольца дифференциальных операторов, уравнение Бесселя третьего порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории преобразований Дарбу для дифференциальных операторов с одной независимой переменной оказывается удобным использовать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что операторы A и A_0 порядка $m > 1$ связаны *двусторонним преобразованием Дарбу* (ДПД), если существуют два дифференциальных оператора T и R ненулевого порядка такие, что

$$T \circ A = A_0 \circ T, \quad A \circ R = R \circ A_0. \quad (1.1)$$

Операторы T и R называются соответственно *левым и правым операторами Дарбу* по отношению к оператору A . *Порядком* ДПД называется сумма $m' = \text{ord } R + \text{ord } T$ порядков T и R . Двустороннее преобразование Дарбу называется *вырожденным*, если его порядок $m' < m = \text{ord } A$.

Из формулы (1.1) находим, что

$$T \circ A \circ R = A_0 \circ TR = TR \circ A_0, \quad R \circ A_0 \circ T = A \circ RT = RT \circ A$$

и, следовательно,

$$TR \in \mathcal{C}(A_0), \quad RT \in \mathcal{C}(A), \quad (1.2)$$

где *централизатор* $\mathcal{C}(B)$ обозначает кольцо дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором B :

$$\mathcal{C}(B) = \{B' : [B', B] = B' \circ B - B \circ B' = 0\}. \quad (1.3)$$

^{*}Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, Россия

[†]Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

Если кольцо $\mathcal{C}(B)$ содержит элементы, отличные от многочленов по степеням B с постоянными коэффициентами, централизатор называется *нетривиальным*. Нас интересуют случаи, когда нетривиальны оба централизатора, $\mathcal{C}(A_0)$ и $\mathcal{C}(A)$. В работе [1] было доказано, что в случае одной независимой переменной отношение коммутативности является транзитивным, т. е.

$$[A, B] = 0, [A, C] = 0 \implies B \circ C = C \circ B. \quad (1.4)$$

Таким образом, множество $\mathcal{C}(A)$ не изменится, если заменить A на любой дифференциальный оператор $\tilde{A} \in \mathcal{C}(A)$ ненулевого порядка. В вырожденном случае мы можем понизить порядок рассматриваемых операторов, выбрав $\tilde{A} = RT \in \mathcal{C}(A)$ и $\tilde{A}_0 = TR \in \mathcal{C}(A_0)$; RT -связь (1.1) при этом не нарушится, т. к. $\tilde{A}R = R\tilde{A}_0 = RTR$ и $T\tilde{A} = \tilde{A}_0T = TRT$. Отметим также, что правые операторы преобразования R можно умножать на элементы централизатора $\mathcal{C}(A)$, поскольку $R' = BR$ влечет $AR' = ABR = BAR = BRA_0 = R'A_0$. Аналогичное замечание справедливо и для левых операторов преобразования вида $T' = TB$, $B \in \mathcal{C}(A_0)$. Такие операторы T' и R' естественно заменять неприводимыми.

Операторы ДПД тесно связаны с общей теорией делимости в кольцах некоммутативных многочленов (см., например, работу [2]). Алгебраические аспекты этой теории, связанные с определением 1, требуют дальнейшего исследования. Отметим, что, в отличие от операции деления, формулы (1.1) содержат скрытый “спектральный” параметр λ и эквивалентны, очевидно, следующим соотношениям:

$$T \circ (A + \lambda) = (A_0 + \lambda) \circ T, \quad (A + \lambda) \circ R = R \circ (A_0 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Основной целью настоящей работы является построение с помощью ДПД разнообразных примеров коммутативных колец $\mathcal{C}(A)$, где A – факторизованный оператор третьего порядка:

$$A = a_0 D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3 = a_0 (D - f_3)(D - f_2)(D - f_1). \quad (1.6)$$

Левое преобразование Дарбу T из формул (1.1) можно в этом случае определить следующим образом:

$$T: a_0 (D - f_3)(D - f_2)(D - f_1) \rightarrow (D - f_1)a_0 (D - f_3)(D - f_2). \quad (1.7)$$

Напомним, что по существу факторизационная формула (1.6) эквивалентна следующей:

$$A\psi = a_0 \frac{\langle \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi \rangle}{\langle \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle}, \quad \langle \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Здесь $\psi_j \in \text{Ker } A$ связаны с функциями f_j соотношениями, использующими логарифмические производные $D \ln \varphi = \varphi' / \varphi$:

$$f_1 = \frac{\psi'_1}{\psi_1}, \quad f_2 + f_1 = D \ln \langle \psi_1, \psi_2 \rangle, \quad f_3 + f_2 + f_1 = D \ln \langle \psi_1, \psi_2, \psi_3 \rangle.$$

Расширив определение 1, будем использовать наряду с преобразованиями Дарбу обычное сопряжение посредством оператора умножения на функцию $p = p(x)$,

$$A \rightarrow p^{-1} \circ A \circ p, \quad (1.8)$$

и замену независимой переменной $\hat{x} = \chi(x)$,

$$\begin{aligned} d\hat{x} &= a(x)dx, & \frac{d}{d\hat{x}} &= \frac{1}{a(x)} \frac{d}{dx} \iff D = \hat{a}\hat{D}, & \hat{D} &= bD, \\ ab &= 1, & \hat{a}(\hat{x}) &= a(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Известно (см., например, монографию [3]), что с помощью комбинации этих преобразований линейное уравнение третьего порядка можно, по крайней мере в принципе, привести к виду $y''' = h(x)y$. Преобразование Дарбу нулевого порядка, т. е. сопряжение (1.8), позволяет упростить вид операторов преобразования. Например, для оператора Дарбу первого порядка, связывающего два оператора A и $\hat{A}$ вида (1.6),

$$A \circ (pD + q) = (pD + q) \circ \hat{A}, \quad \hat{A} = \hat{a}_0 D^3 + \hat{a}_1 D^2 + \hat{a}_2 D + \hat{a}_3,$$

мы находим

$$\hat{a}_0 = a_0, \quad \hat{a}_1 = a_1 - a'_0 + 3a_0(\ln p)'.$$

Сопряжение (1.8) позволяет, очевидно, переписать эти уравнения в виде

$$A \circ (D - f) = (D - f) \circ \hat{A}, \quad f = -\frac{q}{p}, \quad \hat{a}_1 = a_1 - a'_0, \quad \hat{a}_0 = a_0. \quad (1.10)$$

В случае $m = 2$ дифференциальных операторов второго порядка преобразования, аналогичные (1.5) и (1.7), позволяют конструировать коммутативные кольца достаточно общего вида [4]¹⁾. В случае $m = 3$ приходится работать с ДПД различных порядков и учитывать при построении централизатора $\mathcal{C}(A)$ образующие этого коммутативного кольца, отличные от A . В дальнейшем предполагается, что $\mathcal{C}(A_0)$ состоит из операторов с постоянными коэффициентами. Роль A_0 при этом, как правило, играет оператор D^3 . Приведенный ниже пример показывает, что дополнительные условия на порядки операторов преобразования T и R в формуле (1.1) играют существенную роль.

ПРИМЕР 1. Выбрав $\hat{A} = A_0 = D^3$, $A = D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3$, рассмотрим более подробно операторное соотношение (1.10), соответствующее правому оператору Дарбу первого порядка. В силу (1.10) мы, не ограничивая общности, полагаем $a_1 = 0$ и находим, что

$$(D^3 + a_2 D + a_3)(D - f) = (D - f)D^3 \implies a_2 = 3f_x, \quad a_3 = 3(f_{xx} + ff_x). \quad (1.11)$$

Таким образом, мы имеем равенство коэффициентов при D^2 и D . Оставшееся равенство свободных членов запишем в следующем виде:

$$f'' + 3ff' + f^3 = \varepsilon, \quad f = (\ln \psi)_x \implies \frac{\psi'''}{\psi} = f'' + 3ff' + f^3 = \varepsilon. \quad (1.12)$$

¹⁾ Оба оператора T и R в работе [4] имеют первый порядок.

Согласно определению 1 в дополнение к правому преобразованию $R = D - f$ нужно найти дифференциальный оператор T такой, что $TA = A_0T$. В невырожденном случае при $R = D - f$ мы можем выбрать в качестве T оператор второго порядка $T = D^2 + aD + b$:

$$(D^2 + aD + b)(D^3 + a_2D + a_3) = D^3(D^2 + aD + b), \quad a = f + \alpha, \quad b = 2f_x + f^2 + \alpha f + \beta.$$

Учитывая (1.12), находим далее

$$RT = A + \alpha(D^2 + f_x - f^2) - \beta f - \varepsilon,$$

и условие $RT \in \mathcal{C}(A)$ сводится к обращению в ноль дополнительных параметров: $\alpha = \beta = 0$. Таким образом мы убеждаемся, что в невырожденном случае уравнение (1.12) обеспечивает существование левого и правого преобразований Дарбу из формулы (1.1). Отметим, что при $\varepsilon = 0$ мы имеем

$$f'' + 3ff' + f^3 = 0 \iff f = \frac{1}{x + \alpha} + \frac{1}{x + \beta}.$$

Рассмотрим теперь вырожденный случай $T = aD + b$, $\text{ord } R + \text{ord } T = 2 < \text{ord } A$. Записав операторные соотношения (1.1) как

$$\begin{aligned} (D^3 + a_2D + a_3)(D - f) &= (D - f)D^3 \implies a_2 = 3f_x, \quad a_3 = 3(f_{xx} + ff_x), \\ (aD + b)(D^3 + a_2D + a_3) &= D^3(aD + b) \implies TR = aD^2 + (b - af)D - af_x - bf, \end{aligned}$$

находим, пользуясь условием $TR \in \mathcal{C}(A_0)$, что

$$a = 1, \quad b = f, \quad f_x + f^2 = \varepsilon, \quad A = D^3 + 3f_xD + f^3.$$

Найденные условия обеспечивают выполнение операторных соотношений (1.1) в вырожденном случае $\text{ord } RT = 2$. При этом, как уже отмечалось выше, рассматриваемую пару операторов (A, A_0) третьего порядка можно заменить парой операторов второго порядка $\tilde{A} = RT = D^2 + 2f_x + \varepsilon \in \mathcal{C}(A)$ и $\tilde{A}_0 = D^2$, удовлетворяющих операторным соотношениям

$$\tilde{A} \circ (D - f) = (D - f) \circ D^2, \quad (D + f) \circ \tilde{A} = D^2 \circ (D + f).$$

В следующем разделе роль $\mathcal{C}(A_0)$ играет кольцо, изоморфное кольцу $\mathcal{C}(D_x)$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Мы покажем, что в рассматриваемом случае структура кольца $\mathcal{C}(A)$ определяется минимальным порядком оператора преобразования R .

2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В этом разделе рассматривается задача на собственные функции, $A\psi = \lambda\psi$, в случае дифференциальных операторов, инвариантных относительно группы растяжений:

$$A = D_x^m + \frac{\beta_1}{x}D_x^{m-1} + \frac{\beta_2}{x^2}D_x^{m-2} + \dots + \frac{\beta_m}{x^m}, \quad \beta_j \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Замена независимой переменной

$$x = -e^{-t}, \quad D_x = e^t D_t, \quad D_t = -x D_x \quad (2.2)$$

приводит эти операторы к виду, инвариантному относительно преобразований из группы сдвигов $t \rightarrow t + \text{const}$. Мы будем записывать эти операторы в факторизованном виде (см. (1.6))

$$A = A^{(m)} = e^{mt}(D_t + \alpha_1)(D_t + \alpha_2) \dots (D_t + \alpha_m), \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

тем самым предполагая дополнительно, что их коэффициенты являются целыми числами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Целые числа α_j , которые соответствуют элементам $\psi_j(t)e^{-\alpha_j t}$, принадлежащим ядру $\text{Ker}(A)$ оператора (2.3), будем называть *корневыми числами*, или просто корнями оператора A .

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Замена независимой переменной (2.2) переводит оператор (2.3) порядка m с корнями α_i , $i = 1, \dots, m$, в оператор (2.1) следующего вида:

$$A^{(m)} = \frac{(-1)^m}{x^m} (xD_x - \alpha_1) \dots (xD_x - \alpha_m). \quad (2.4)$$

Частным случаем этой леммы является формула

$$A_0^{(m)} = e^{mt} D_t (D_t + 1) (D_t + 2) \dots (D_t + m - 1) = (e^t D_t)^m = D_x^m. \quad (2.5)$$

Инвариантность оператора (2.4) относительно группы растяжений позволяет записывать его собственные функции в виде $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$, где $\varphi(x)$ – одно из решений уравнения $A\varphi = \varphi$. Например, для оператора (2.5) функции

$$\varphi_j(x) = e^{\varepsilon_j x}, \quad \varepsilon_j^m = \lambda, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.6)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения $A_0^{(m)}\varphi = \lambda\varphi$. Отметим, наконец, что при $m = 2$ задача $A\psi = \lambda\psi$ на собственные функции оператора (2.3) приводит нас к уравнению Бесселя:

$$\frac{1}{x^2} (xD_x - \alpha_1)(xD_x - \alpha_2)\psi = \left(D_x^2 + \frac{\beta_1}{x} D_x + \frac{\beta_2}{x^2} \right) \psi = \lambda\psi. \quad (2.7)$$

Очевидно, что при любых постоянных α и k имеет место формула

$$e^{kt}(D_t + \alpha) = (D_t + \alpha + k) \circ e^{kt}. \quad (2.8)$$

Вследствие этого преобразование Дарбу (1.7) первого порядка факторизованного оператора (2.3) сводится теперь к сдвигу одного из его корней:

$$A \rightarrow (D_t + \alpha_j)A(D_t + \alpha_j)^{-1} \iff \alpha_j \rightarrow \alpha_j + m. \quad (2.9)$$

Это преобразование мы называем далее *элементарным преобразованием* Дарбу. Соответственно преобразование Дарбу нулевого порядка (1.8) сводится теперь к общему сдвигу корней оператора (2.3):

$$A \rightarrow e^{-\sigma t} \circ A \circ e^{\sigma t}, \quad \alpha_j \rightarrow \alpha_j + \sigma, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sigma \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

В силу формулы (2.8), выбирая в качестве операторов Дарбу (1.1) операторы

$$T = e^{\alpha t} a(D_t), \quad R = e^{\beta t} b(D_t), \quad (2.11)$$

где $a(D_t)$ и $b(D_t)$ – многочлены относительно D_t с постоянными коэффициентами, мы получаем

$$R \circ T = e^{(\alpha+\beta)t} b(D_t + \alpha) a(D_t), \quad T \circ R = e^{(\alpha+\beta)t} a(D_t + \beta) b(D_t).$$

Напомним, что степени этих многочленов должны обеспечивать выполнение условия невырожденности ДПД:

$$\text{ord } T + \text{ord } R = \deg a(D_t) + \deg b(D_t) \geq m.$$

Наибольший интерес для нас представляет правый оператор преобразования Дарбу, переводящий собственные функции (2.6) оператора A_0 в собственные функции оператора A :

$$\psi = R\varphi \implies A\psi = AR\varphi = RA_0\varphi = \lambda\psi. \quad (2.12)$$

ПРИМЕР 2. В случае оператора третьего порядка

$$A = e^{3t}(D_t + \alpha_1)(D_t + \alpha_2)(D_t + \alpha_3) \quad (2.13)$$

мы находим

$$\tilde{A} = \frac{1}{x^3}(xD_x - \alpha_1)(xD_x - \alpha_2)(xD_x - \alpha_3) = D_x^3 + \frac{3 - \sigma_1}{x}D_x^2 + \frac{1 - \sigma_1 + \sigma_2}{x^2}D_x - \frac{\sigma_3}{x^3},$$

где $\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$, $\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. В частности, при

$$A = e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 5), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 5 \quad (2.14)$$

мы имеем $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 0$, при этом, как нетрудно проверить непосредственно, пользуясь определением (1.1) (см. также теорему 1 ниже),

$$R = D_t + 2, \quad T = e^{3t}D_t(D_t + 1), \quad TR = A_0^{(3)}, \quad RT = A.$$

Замена (2.2) дает теперь

$$\tilde{A}R = \left(D_x^3 - \frac{3}{x}D_x^2\right)R = RD_x^3, \quad R = xD_x - 2.$$

Отсюда с учетом (2.12) следует, что собственные функции рассматриваемого оператора находятся по формуле

$$\psi = R(\varphi) = (xD_x - 2)e^x = (x - 2)e^x, \quad x = \varepsilon x', \quad (2.15)$$

где роль спектрального параметра берет на себя свободный параметр ε . Преобразование (1.8) является, очевидно, специальным случаем операторного соотношения (1.11) из раздела 1:

$$\left(D_x^3 - \frac{6}{x^2}D_x\right)\left(D_x - \frac{2}{x}\right) = \left(D_x - \frac{2}{x}\right)D_x^3,$$

и, соответственно, функция $f = 2/x$ является частным решением уравнения (1.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\underline{\alpha}$ – наименьший из корней α_i , $i = 1, \dots, m$, оператора A вида (2.3). Тогда элементарное преобразование называется *транспозицией*, если $\alpha_j = \underline{\alpha}$ в формуле (2.9).

Из определения 3 и формулы (2.9) легко выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Оператор (2.3) эквивалентен оператору (2.5) с точностью до сдвига (2.10) в том и только в том случае, когда он не меняется при транспозиции.*

В общем случае действие элементарного преобразования (2.9) сводится к замене в разложении (2.3) одного из корневых чисел α_i на $\alpha_i + t$. Поэтому по модулю целого числа t , равного порядку рассматриваемого оператора, множество целых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ не меняется при транспозициях. Для простоты мы формулируем основную теорему, уточняющую результаты работ [5], [6], в частном случае $t = 3$.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор (2.13) связан ДПД с оператором $(e^t D_t)^3$ в том и только в том случае, когда в разложении (2.13) корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ различны по модулю 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм построения оператора T преобразования Дарбу из формулы (1.1) заключается в выборе минимального $\alpha_i = \underline{\alpha}$ из набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и последующей замене α_i на $\alpha_i + 3$ посредством транспозиции (2.9). Если длина интервала, занятого числами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, больше 2, то транспозиция (2.9) уменьшает эту длину. Если длина уже равна 2, то транспозиция переводит рассматриваемый набор чисел в себя по модулю 3. В этом случае в силу леммы 2 множество корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ совпадает с множеством $\{0, 1, 2\}$ с точностью до общего сдвига. Остается, таким образом, подключить к оператору T сопряжение (2.10).

Для построения правого оператора Дарбу R нужно применить тот же алгоритм к сопряженному оператору

$$A^* = -(D_t - \alpha_1)(D_t - \alpha_2)(D_t - \alpha_3) \circ e^{3t} = -e^{3t} \prod (D_t + \alpha'_i), \quad \alpha'_i = 3 - \alpha_i. \quad (2.16)$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы остается в силе при любом $t > 1$. В частности, при $t = 2$ оператор A из уравнения (2.7) с целыми корнями α_1, α_2 приводится с помощью ДПД к оператору D_x^2 в том и только в том случае, когда эти корни различны по модулю 2. Нетрудно убедиться, что это условие совпадает с известным критерием разрешимости уравнения Бесселя (2.7) в элементарных функциях.

Обобщение теоремы 1 на случай $t > 3$ и дополнительные детали доказательства поясняются следующим примером.

ПРИМЕР 3. Выберем числа $(0, 1, 2, 3, 9)$, где $9 \equiv 4 \pmod{5}$, в качестве корней $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$ оператора A вида (2.3) порядка $m = 5$. Следующая последовательность транспозиций:

$$(0, 1, 2, 3, 9) \rightarrow (1, 2, 3, 5, 9) \rightarrow (2, 3, 5, 6, 9) \rightarrow (3, 5, 6, 7, 9) \rightarrow (5, 6, 7, 8, 9)$$

сжимает длину интервала корней до абсолютного минимума (ср. с леммой 2). Полученный оператор $\hat{A}$ с корнями $(5, 6, 7, 8, 9)$ и оператор $A_0 = A_0^{(5)}$ с корнями $(0, 1, 2, 3, 4)$

связаны формулой (2.10): $\hat{A} = e^{-5t} A_0^{(5)} e^{5t}$. В результате в соответствии с формулой (1.1) мы получаем

$$T = e^{5t} D_t (D_t + 1) (D_t + 2) (D_t + 3) \implies TA = A_0^{(5)} T.$$

Выбранная нормировка, при которой минимальный корень помещается в нуле, упрощает вид второго оператора R из формулы (1.1). Аналогично формуле (2.16) имеем

$$A^* = -e^{5t} (D_t - 4) (D_t + 2) (D_t + 3) (D_t + 4) (D_t + 5).$$

Каноническая транспозиция с минимальным $\alpha_i = -4$ дает

$$A^* \rightarrow -e^{5t} (D_t + 1) (D_t + 2) (D_t + 3) (D_t + 4) (D_t + 5) = -(D_t \cdot e^t)^5 = A_0^*,$$

или $A \circ R = R \circ A_0$, $R = D_t + 4$. В полном согласии с общими формулами (1.3) находим, что $TR = A_0$, $RT = A$ и

$$A = R \cdot A_0^{(m)} \cdot R^{-1}, \quad R = D_t + 4, \quad (2.17)$$

где $A_0^{(m)}$ – оператор (2.5) пятого порядка.

Заметим, что при любом $m > 5$ оператор (2.5) делится справа на $R = D_t + 4$ и, следовательно, формула (2.17) при любом $m > 5$ определяет дифференциальный оператор A' . Этот оператор $A' \in \mathcal{C}(A)$, поскольку

$$A' \cdot R = R \cdot A_0^{(m)} \implies A' \cdot AR = A' \cdot R \cdot A_0^{(5)} = R \cdot A_0^{(5+m)} = A \cdot A'R. \quad (2.18)$$

Поэтому, полагая в формуле (2.17) $m = 5, 6, 7, 8, 9$, мы получаем пять образующих $A^{(m)}$ коммутативного кольца $\mathcal{C}(A)$. Например,

$$A^{(7)}: (0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11),$$

где в скобках перечислены корни оператора $A^{(7)}$ вида (2.3). Так как $TR \in \mathcal{C}(A_0)$, левое преобразование Дарбу также переводит $A^{(m)}$ в $A_0^{(m)}$:

$$TA^{(m)} = TRA_0^{(m)} R^{-1} = A_0^{(m)} TRR^{-1} = A_0^{(m)} T.$$

Таким образом, мы установили, что ДПД, о которых говорится в теореме 1, продолжаются с оператора A на все пять образующих коммутативного кольца $\mathcal{C}(A)$, тем самым устанавливается двусторонняя связь этого кольца с соответствующим подкольцом более широкого коммутативного кольца $\mathcal{C}(A_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия теоремы 1 не гарантируют невырожденность соответствующего ДПД. Например, в случае оператора A третьего порядка с корнями $(0, 2, 4)$ мы находим, следуя доказательству теоремы 1, что $\text{ord } T = \text{ord } R = 1$. С другой стороны, в случае правого оператора преобразования $R = D_t + m - 1$ первого порядка с произвольным $m = 2, 3, \dots$ формула $A^{(m)} = R \cdot A_0^{(m)} \cdot R^{-1}$ дает нам оператор порядка m , связанный с $A_0^{(m)}$, как нетрудно проверить, невырожденным ДПД, в котором $TR = A_0^{(m)}$. При $m = 2$ в этом случае возникает уравнение Бесселя, соответствующее собственным функциям оператора $A = e^{2t} D_t (D_t + 3)$. Случай $m = 3$

приводит нас к оператору (2.14), который рассматривался в примере 2. При каждом $m > 1$ в дополнение к указанному выше оператору $A^{(m)}$ порядка m формулы

$$A^{(n)} = R \cdot A_0^{(n)} \cdot R^{-1}, \quad R = D_t + m - 1, \quad n = m, m + 1, \dots, 2m - 1, \quad (2.19)$$

определяют m образующих централизатора $\mathcal{C}(A^{(m)})$. Можно убедиться, что все эти образующие связаны с соответствующими операторами $A_0^{(n)}$ одним и тем же ДПД, вырожденным при $n > m$. При этом

$$T\mathcal{C}(A^{(m)}) \subset \mathcal{C}(A_0^{(m)})T, \quad R\mathcal{C}(A_0^{(m)}) \supset \mathcal{C}(A^{(m)})R. \quad (2.20)$$

2.1. Задача об общей собственной функции. На основе приведенных выше формул (2.19), (2.20) и им аналогичных мы можем построить общую собственную функцию $\psi = R(\varphi)$ коммутативного кольца $\mathcal{C}(A^{(m)})$, используя общую собственную функцию φ исходного коммутативного кольца $\mathcal{C}(A_0^{(m)})$. Эта формула имеет, как было указано в примере 2, следующий вид:

$$\psi = R(\varphi) = P(x)e^x, \quad x = \varepsilon x'. \quad (2.21)$$

Здесь степень многочлена $P(x)$, $x = -e^{-t}$, зависит от порядка оператора Дарбу R , а свободный параметр ε играет в формуле (2.21) роль спектрального параметра (ср. с формулой (2.15)). Найдя общую собственную функцию ψ для коммутативного кольца $\mathcal{C}(A)$, где $A \equiv A^{(m)}$, мы можем использовать эту функцию ψ для построения нового коммутативного кольца $\mathcal{C}(\hat{A})$. Можно было бы, например, применить общее для образующих $A_n \in \mathcal{C}(A)$ элементарное преобразование Дарбу, аналогичное (1.7):

$$(D - f)A_n = \hat{A}_n(D - f), \quad f = (\ln \psi)', \quad A_n\psi = \lambda_n\psi.$$

Полученное таким образом новое коммутативное кольцо $\mathcal{C}(\hat{A})$ имеет операторы $\hat{A}_n$ в качестве своих образующих.

Интересная задача о свойствах таких колец при $m > 2$ мало изучена и выходит, к сожалению, за рамки настоящей работы. Мы ограничимся здесь построением различных связанных с теоремой 1 коммутативных колец и получим при $m = 3$ для них явный вид многочленов $P(x)$ в приведенной выше формуле (2.21).

Мы рассматриваем операторы A третьего порядка, связанные преобразованиями Дарбу с оператором D_x^3 . Классификацию рассматриваемых операторов удобно связать со структурой централизатора $\mathcal{C}(A)$. Из транзитивности (1.4) отношения коммутативности (теорема Шура) следует, что в случае одной независимой переменной дифференциальные операторы положительного порядка, входящие в централизатор $\mathcal{C}(A)$, перестановочны и образуют коммутативное кольцо, которое нельзя пополнить. Более того, любое такое максимальное коммутативное кольцо совпадает с централизатором любого из входящих в него дифференциальных операторов, имеющих положительный порядок, и различные максимальные коммутативные кольца могут пересекаться только по операторам “нулевого” порядка, т. е. операторам умножения на функцию. Обозначим через m минимальный ненулевой порядок операторов, входящих в данное максимальное коммутативное кольцо $\mathcal{R}$ и назовем соответствующий оператор $A_m \in \mathcal{R}$, $\text{ord } A_m = m > 0$, *минимальным* оператором этого кольца.

Если $m = 1$, то минимальный оператор $A_m \in \mathcal{R}$ порядка 1 эквивалентен оператору D с точностью до обратимых преобразований (1.8), (1.9), и максимальное кольцо есть $\mathcal{R} = \mathcal{C}_0(A_m)$, где $\mathcal{C}_0(A)$ – множество многочленов от A с постоянными коэффициентами. Кольца $\mathcal{C}_0(A)$ с одной образующей интереса для нас не представляют, и мы называем их тривиальными. В нетривиальном максимальном коммутативном кольце $\mathcal{R}$ существует оператор A_{n_1} , $\text{ord } A_{n_1} = n_1 > m$, который является в свою очередь минимальным в множестве операторов $B \in \mathcal{R}$, $\text{ord } B > m$, удовлетворяющих условию $\text{ord } B \not\equiv 0 \pmod{m}$. Напомним, что старшие коэффициенты a_0 и b_0 коммутирующих дифференциальных операторов порядков m и n соответственно удовлетворяют уравнению

$$m \frac{b_{0,x}}{b_0} = n \frac{a_{0,x}}{a_0}.$$

Из этого уравнения следует, что старшие коэффициенты коммутирующих операторов одинакового порядка пропорциональны, поэтому оператор $B \in \mathcal{R}$, $\text{ord } B = km$, можно всегда заменить оператором $B - \alpha A_m^k$ из $\mathcal{R}$ меньшего порядка.

Если $m = 2$, то нетривиальное максимальное коммутативное кольцо есть $\mathcal{R} = \mathcal{C}_0(A_m, A_{n_1})$, т.е. кольцо с двумя образующими A_m , $m = 2$, и A_{n_1} , $n_1 > 2$. Действительно, число n_1 нечетно по определению, и при $n < n_1$ оператор B , $\text{ord } B = n$, принадлежит кольцу $\mathcal{R}$, следовательно, $B \in \mathcal{C}_0(A_m)$, а при $n > n_1$ порядок соответствующего оператора B можно понизить вычитанием $A_m^{k_1}$ или $A_m^{k_1} A_{n_1}^{k_2}$ при четном или нечетном n соответственно. Полное описание максимальных коммутативных колец $\mathcal{R} = \mathcal{C}_0(A_m, A_{n_1})$ сводится в определенном смысле к записанным в виде нелинейных дифференциальных уравнений условиям коммутирования образующих, $[A_m, A_{n_1}] = 0$. Структура этих уравнений полностью определяется парой целых чисел (m, n_1) . Можно проверить, что при взаимно простых порядках m, n операторное соотношение, связывающее коммутирующие операторы A , $\text{ord } A = m$, и B , $\text{ord } B = n$, записывается как уравнение плоской алгебраической кривой, совпадающей при отсутствии младших членов с уравнением $B^m = A^n$ (см. работу [5]).

Для изучения различных операторов Дарбу, связанных с теоремой 1, мы привлекаем результаты работы [7] по исследованию решений полиномиального уравнения

$$a(\lambda + n)b(\lambda) = a(\lambda)b(\lambda + m), \quad (2.22)$$

где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Это уравнение (ср. с соотношениями (2.11)), уточняющее в определенном смысле результаты классической работы [5], является критерием коммутирования операторов $A = e^{mt}a(D_t)$ и $B = e^{nt}b(D_t)$. Из уравнения (2.22) мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Совпадение минимальных корней двух операторов вида (2.3) является необходимым условием их перестановочности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\underline{\alpha}$ есть наименьший из корней оператора $A = e^{mt}a(D_t)$. Тогда $a(\underline{\alpha} + \lambda) \neq 0$ при $\lambda > 0$. Полагая $\lambda = \underline{\alpha}$ в полиномиальном уравнении (2.22), мы находим $a(\underline{\alpha} + n)b(\underline{\alpha}) = 0$, $a(\underline{\alpha} + n) \neq 0$, следовательно, $b(\underline{\alpha}) = 0$. Аналогично проверяется, что $a(\underline{\beta}) = 0$, где $\underline{\beta}$ – наименьший из корней чисел второго из коммутирующих операторов. Лемма доказана.

Таблица 1

Корни оператора A	Порядок ДПД	Оператор Дарбу	Порядки образующих
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 5, 7$	$m' = 5$	$R: 1, 2, 4$	$n = 3, 5, 7$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 1, 8$	$m' = 6$	$R: 2, 5$	$n = 3, 7, 8$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 4, 8$	$m' = 6$	$R: 1, 2, 5$	$n = 3, 4$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 2, 10$	$m' = 8$	$R: 1, 4, 7$	$n = 3, 8, 10$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 1, 11$	$m' = 9$	$R: 2, 5, 8$	$n = 3, 10, 11$

Из доказанной леммы и определения 3 следует, что алгоритм построения ДПД, указанный в доказательстве теоремы 1, применим ко всем образующим кольца $\mathcal{C}(A)$.

Используя теорему 1 и результаты работы [7], мы приходим (см. табл. 1) к списку операторов $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ третьего порядка вида (2.13) с корнями $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, связанных с помощью ДПД с оператором $A_0 = (e^t D_t)^3$. В табл. 1 обозначение $R: a, b, c$ используется для оператора Дарбу $R = (D_t + a)(D_t + b)(D_t + c)$. Аналогично (см. пример 2)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 1, 5 \iff A = e^{3t}(D_t + \alpha_1)(D_t + \alpha_2)(D_t + \alpha_3) = e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 5).$$

Во втором столбце табл. 1 приведен порядок m' соответствующего ДПД из определения 1, а в последнем столбце указаны порядки образующих A_n соответствующего коммутативного кольца $\mathcal{C}(A)$. Эти образующие находятся с помощью формулы, аналогичной (2.19):

$$A_n = R \cdot A_0^{(n)} \cdot R^{-1}, \quad n = m, n_1, n_2. \quad (2.23)$$

Так как корни оператора $A_0^{(n)}$ совпадают с числами $0, 1, \dots, n-1$, из формулы (2.23) следует, в частности, что $A_n \in \mathcal{C}(A)$ при $n > \max(a, b, c)$ в случае $R: a, b, c$.

Вид второго оператора Дарбу T (см. (1.1), (2.11)) однозначно определяется по табл. 1, так же, как это было сделано в примере 3.

Как видно из табл. 1, при $m = 3$ число образующих коммутативного кольца $\mathcal{C}(A)$, как правило, равно трем. Исключение составляет “самосопряженный” оператор $A = e^{3t}D_t(D_t + 4)(D_t + 8)$, собственные функции которого выражаются формулой вида (2.21):

$$\varphi = R(\widehat{\varphi}) = (xD_x - 1)(xD_x - 2)(xD_x - 5)e^x = (x^3 - 5x^2 + 10x - 10)e^x, \quad x = \lambda x'.$$

Аналогичные вычисления для других операторов из табл. 1 приводят к результату для многочленов $P(x)$ (см. формулу (2.21)), отраженному в табл. 2.

К этому списку можно добавить формулу (2.15) с $P(x) = x - 2$ для оператора с корнями $(0, 1, 5)$, рассмотренного ранее в примере 2.

ТАБЛИЦА 2

Корни оператора A	Оператор Дарбу	Многочлен $P(x)$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 5, 7$	$R: 1, 2, 4$	$P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = (x - 2)^3$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 1, 8$	$R: 2, 5$	$P(x) = x^2 - 6x + 10 = (x - 3 + i)(x - 3 - i)$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 4, 8$	$R: 1, 2, 5$	$P(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 10$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 2, 10$	$R: 1, 4, 7$	$P(x) = x^3 - 9x^2 + 28x - 28$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, 1, 11$	$R: 2, 5, 8$	$P(x) = x^3 - 12x^2 + 52x - 80$

Благодарности. Авторы благодарны В. Э. Адлеру и Г. Б. Шабату за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6501.2010.2) и РФФИ (грант № 10-01-00088).

Список литературы

- [1] I. Schur, *Sitzungsber. Berl. Math. Gen.*, **4** (1905), 2–8.
- [2] O. Ore, *Ann. Math.*, **34**:3 (1993), 480–508.
- [3] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [4] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21.
- [5] J. L. Burchinal, T. W. Chaundy, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **134**:824 (1932), 471–485.
- [6] В. В. Соколов, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 82–83.
- [7] А. Б. Шабат, З. С. Эльканова, *ТМФ*, **162**:3 (2010), 334–344.

Поступила в редакцию 4.05.2012