Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ямасаки, Перезагрузка четырехмерного суперконформного индекса, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 177–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:55:45

© 2013 г.

М. Ямасаки*

ПЕРЕЗАГРУЗКА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО СУПЕРКОНФОРМНОГО ИНДЕКСА

Рассматривается четырехмерный $\mathcal{N} \geq 1$ суперконформный индекс и его обобщение на линзовое пространство. Обсуждаются его редукции к трехмерной $\mathcal{N} \geq 2$ статистической сумме сферы, к трехмерному $\mathcal{N} \geq 2$ суперконформному индексу и к двумерной $\mathcal{N} \geq (2, 2)$ статистической сумме сфер. Эти редукции применяются к классу четырехмерных $\mathcal{N} = 1$ суперконформных теорий поля, двойственных торическим многообразиям Калаби–Яу, и обнаруживаются неожиданные связи с интегрируемыми спинowymi цепочками и гиперболической геометрией. Сделано замечание, касающееся проблемы классификации инфракрасных неподвижных точек четырехмерных и трехмерных суперсимметричных калибровочных теорий.

Ключевые слова: суперконформный индекс, эллиптическая гамма-функция, статистическая сумма на сфере, размерная индукция.

DOI: 10.4213/tmf8357

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавние построения в суперсимметричных калибровочных теориях для трех и четырех пространственно-временных измерений имеют непосредственную связь с проблемой интегрирования и точной разрешимости. Хотя точная разрешимость суперсимметричных калибровочных теорий за последние десятилетия была исследована в различных контекстах, в работах последнего времени были получены точные выражения для разных статистических сумм на компактных многообразиях как в трех, так и в четырех измерениях. Здесь под точной разрешимостью подразумевается редукция статистической суммы, определенной бесконечномерным интегралом, к конечномерному интегралу по путям или сумме.

Для заданной суперсимметричной теории поля, развивая теорию на разных многообразиях (сохраняющих хотя бы один суперзаряд¹⁾), можно определить различные статистические суммы. Они оказываются мощными инструментами для построения количественных утверждений о суперсимметричных калибровочных теориях.

¹⁾См. работы [1], [2], где обсуждаются возможные выборы четырехмерного многообразия, сохраняющего суперзаряды. Вообще говоря, необходимо включать фоновый поток для R-симметрии.

Мы обсудим четырехмерный $\mathcal{N} \geq 1$ суперконформный индекс (подкрученную статистическую сумму на $S^3 \times S^1$) [3], [4], трехмерную $\mathcal{N} \geq 2$ статистическую сумму на S^3 [5]–[7] и трехмерный $\mathcal{N} \geq 2$ суперконформный индекс на $S^2 \times S^1$ [8], [9]. Все эти величины можно вычислить методом локализации²⁾. Оказывается, что эти величины нечувствительны к общему масштабу компактифицированного многообразия.

Из соображений размерности следует, что статистическая сумма зависит только от размерной комбинации – произведения энергетического масштаба на размер многообразия. Оказывается, что статистические суммы не зависят от радиуса и, следовательно, от энергетического масштаба, и можно вычислять статистические суммы инфракрасных теорий, определенные по ультрафиолетовому лагранжиану. Это позволяет нам количественно проверять двойственность между сильно спаренными инфракрасными неподвижными точками. Мы выполнили ряд интересных проверок, включая четырехмерную двойственность Зайберга [10] и трехмерную зеркальную симметрию [11].

На более практическом уровне двойственность в калибровочной теории приводит к весьма нетривиальным новым или известным тождествам для специальных функций, таких как классические и квантовые дилוגарифмические функции и эллиптические гамма-функции, которые мы определим ниже.

Ввиду наличия в литературе множества точных статистических сумм возникает вопрос: есть ли какие-то количественные соотношения между ними? Мы приведем конкретные соотношения между тремя описанными выше статистическими суммами – суперконформным индексом в четырех и трех измерениях и статистической суммой в трех измерениях — и тем самым предложим единообразный подход к этим трем величинам.

Начнем с четырехмерного суперконформного индекса и его обобщения на линзовое пространство. Будем называть их просто четырехмерный индекс и четырехмерный индекс линзового пространства соответственно. В нашем контексте четырехмерный индекс линзового пространства – это самая важная величина, из которой выводятся все остальные либо специализацией, либо редукцией [12].

Статья организована следующим образом. Введя выражение для четырехмерного индекса линзового пространства в разделе 2, мы обсуждаем размерную редукцию к трем и двум измерениям в разделе 3. Затем мы применяем наши результаты к четырехмерным $\mathcal{N} = 1$ колчановым калибровочным теориям в разделе 4. В разделе 5 мы обсуждаем проблему классификации инфракрасных неподвижных точек суперсимметричных калибровочных теорий.

Статья представляет собой введение к работе [12] и содержит обзор недавних достижений в этой области. Некоторым читателям будет интересен более дискуссионный материал в разделе 5.

2. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ИНДЕКС

2.1. Определение. Перед тем как обсудить четырехмерную суперсимметричную калибровочную теорию, начнем с более простого примера – одномерной суперсимметричной квантовой механики.

²⁾Суперконформный индекс также может быть вычислен путем перехода к пределу свободного поля и не требует локализации. С 2005 года этим способом удалось провести множество вычислений. Однако недавние продвижения в вычислении с помощью локализации определенно вызвали новый подъем интереса к четырехмерному суперконформному индексу, чем и объясняется название этой статьи.

Предположим, что одномерная квантово-механическая система имеет суперзаряд $\mathcal{Q}$. Как хорошо известно, индекс Виттена определяется как

$$\mathcal{I} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [(-1)^{\mathcal{F}} e^{-\beta \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}}], \quad (1)$$

где $\mathcal{F}$ – число фермионов, и след берется по гильбертову пространству теории. Индекс не зависит от параметра β , который можно интерпретировать как радиус термального S^1 . Индекс также инвариантен при гладких деформациях теории и, в частности, не зависит от констант связи.

Имеется естественное обобщение на четырехмерную теорию с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией. В этом случае индекс определяется той же формулой (1) для особым образом выбранного суперзаряда $\mathcal{Q}$. Четырехмерная теория теперь располагается на $S^1 \times T^3$, а $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство на T^3 . Такой индекс вычислен, например, в работе [13]. Однако в настоящей статье мы обсуждаем не эту величину.

В старших размерностях можно видеть, что потенциально существует больше степеней свободы в определении индекса. Мы рассмотрим случай, когда многообразие $S^1 \times T^3$ заменяется на $S^1 \times S^3$.

Выбор многообразия $S^1 \times S^3$ может показаться искусственным, но на самом деле такой выбор делается в конформной теории поля, – это радиальное квантование конформной теории поля. Индекс должен тогда определяться формулой

$$\mathcal{I} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{S^3}} [(-1)^{\mathcal{F}} e^{-\beta \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}}], \quad (2)$$

где $\mathcal{H}_{S^3}$ – гильбертово пространство на сфере S^3 . В радиальном квантовании эрмитово сопряженным оператором к $\mathcal{Q}^\dagger$ является оператор $\mathcal{S}$ – генератор суперконформного преобразования (это фермионный аналог утверждения о том, что сдвиги преобразуются обращением в специальное конформное преобразование). Мы предпочитаем использовать $\mathcal{Q} \equiv \overline{\mathcal{Q}}_{2+}$ из четырех суперзарядов $\mathcal{Q}_\alpha, \overline{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$).

Коммутатор можно тогда вычислить из коммутационных соотношений суперконформной алгебры, и только те состояния, которые удовлетворяют равенству

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\} = E - 2j_2 - \frac{3}{2}r = 0, \quad (3)$$

вносят вклад в индекс. Здесь и далее E – это энергия, j_1, j_2 – спины при $SO(4) \sim SU(2)_1 \times SU(2)_2$, а r – $U(1)_R$ R-симметрия.

С этим определением, однако, имеется проблема: индекс, определенный выше, вообще говоря, определен некорректно и расходится. Дело в том, что имеется бесконечно много состояний, вносящих вклад в (3). Это отличает его от индекса Виттена (1), в который вклад вносит только вакуум, и сходимость автоматически имеет место.

Один из способов справиться с этой проблемой – ввести дополнительные химические потенциалы для направлений j_1 и j_2 , вместе с направлением S^1 . Это эквивалентно включению линий Вилсона в направлении S^1 . Здесь необходима осторожность, поскольку суперзаряд $\mathcal{Q}$ преобразуется нетривиально относительно j_2 и несовместим с включением линии Вилсона для j_2 . Выручает то, что существует также $U(1)$ R-симметрия r , относительно которой преобразуется $\mathcal{Q}$. Комбинируя их в $2j_2 + r$, можно сохранить $\mathcal{Q}$. Можно также модифицировать индекс, включая химические потенциалы z_I для симметрии ароматов F_I , которая также коммутирует

с суперзарядом $\mathcal{Q}$. Перечисленные операторы исчерпывают весь набор операторов, коммутирующих с $\mathcal{Q}$. Теперь мы приходим к определению четырехмерного индекса:

$$\mathcal{I}(t, y, z) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{S^3}} [(-1)^{\mathcal{F}} t^{3(2j_2+r)} y^{2j_1} z^F], \quad (4)$$

где след берется по всем полям, удовлетворяющим формуле (3), а z^F – краткое обозначение для $\prod_I z_I^{F_I}$. Множитель 3 в степени t пишется по общепринятому соглашению и включен сюда для соответствия с литературой.

Суперконформный индекс был введен в 2005 г. в качестве количественного инструмента изучения суперконформных теорий поля; он является наиболее общим индексом, записанным для суперконформных теорий поля (он остается инвариантным, когда короткие мультиплеты суперконформной алгебры комбинируются в длинные мультиплеты), по крайней мере в теории представлений суперконформной алгебры [4]. Более современное представление заключается в том, что это просто (подкрученная) статистическая сумма на $S^3 \times S^1$. На самом деле определение (4) можно использовать в неконформной теории, и это просто статистическая сумма на $S^1 \times S^3$ с включенными по направлению S^1 линиями Вилсона. В этом смысле термин “суперконформный индекс” неправилен, поскольку эту величину можно определить и для неконформной теории. Мы, тем не менее, используем название суперконформный индекс, чтобы соответствовать литературе.

В настоящей работе мы рассмотрим обобщение $S^3 \times S^1$ индекса до индекса линзового пространства $S^3/\mathbb{Z}_p \times S^1$, где $\mathbb{Z}_p$ действует на $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ по правилу

$$(z_1, z_2) \sim (\omega z_1, \omega^{-1} z_2), \quad \omega = e^{2\pi/p}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbb{Z}_p$ – часть $U(1)_1 \subset SU(2)_1$ изометрии, поворачивающей j_1 , а значит, она сохраняет суперзаряд $\mathcal{Q}$. Определение индекса то же, что и в (4), с той только разницей, что гильбертово пространство $\mathcal{H}_{S^3}$ заменяется на $\mathcal{H}_{S^3/\mathbb{Z}_p}$.

Существенное отличие от случая не-орбиобразий заключается в том, что в теории на орбиобразии имеется множество вырожденных вакуумов, параметризованных нетривиальной голономией V в направлении S^1_{H} (заметим, что $\pi_1(S^3/\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$). Голономия V удовлетворяет условию $V^p = 1$ и отображается в элемент максимального тора сопряжением с элементом алгебры Картана

$$V = (\omega^{m_1}, \dots, \omega^{m_N}), \quad (6)$$

где $\omega = e^{2\pi i/p}$ и целые числа $m = (m_1, \dots, m_N)$ удовлетворяют условию $0 \leq m_i \leq p-1$. Это означает, что гильбертово пространство в (4) разлагается на разные пространства, параметризованные m :

$$\mathcal{H}_{S^3} = \bigoplus_m \mathcal{H}_{S^3, m}. \quad (7)$$

Эта голономия m разбивает калибровочную группу на произведение p подгрупп,

$$G \rightarrow \prod_{I=0}^{p-1} G_I, \quad (8)$$

где ранг G_I задается числом N_I . Например, в случае калибровочной группы $U(N)$ имеем $U(N) \rightarrow \prod_I U(N_I)$.

2.2. Интегральное выражение. Запишем выражение для нашего четырехмерного индекса линзового пространства как

$$\mathcal{I}_p(t, y, z) = \sum_m \mathcal{I}_{p,m}(t, y, z) = \sum_m \int [d\sigma]_m \mathcal{I}_{\text{chiral}}^m[\sigma; t, y, z] \mathcal{I}_{\text{vector}}^m[\sigma; t, y]. \quad (9)$$

Здесь индекс представляет собой сумму индексов, параметризованных множеством голономий (см. (7)). Мера $[d\sigma]_m$ берется по подгруппе Картана ($e^{i\sigma_i}$) калибровочной группы (σ_i периодически с периодом 2π) и дается выражением³⁾

$$[d\sigma]_m \equiv \left(\prod_I |\mathcal{W}_I| \right)^{-1} \prod_{i=1}^N \frac{d\sigma_i}{2\pi}, \quad (10)$$

где $\mathcal{W}_I$ – группа Вейля G_I (см. (8)), а последнее произведение берется по корням калибровочной группы ненарушенной симметрии G . Величина (10) – мера Хаара калибровочной группы $\prod_I G_I$ нарушенной симметрии под действием m (8).

Множители $\mathcal{I}_{\text{chiral}}^m$ и $\mathcal{I}_{\text{vector}}^m$ – это однопетлевые детерминанты из киральных и векторных мультиплетов соответственно. Детерминант векторного мультиплета дается выражением

$$\mathcal{I}_{\text{vector}}^m[\sigma; t, y] = \prod_{\alpha} [\Gamma_{p,\alpha(m)}(e^{i\alpha(\sigma)}; t^3 y, t^{-3} y)]^{-1}, \quad (11)$$

где α – корень ненарушенной калибровочной группы G . Например, при $G = U(N)$ имеем $\alpha(\sigma) = \sigma_i - \sigma_j$. Мы также воспользовались обобщением эллиптической гамма-функции, определенным формулой

$$\Gamma_{p,M}(x; a, b) = \prod_{\substack{n_1, n_2 \geq 0, \\ n_1 - n_2 \equiv M \pmod{p}}} \frac{1 - x^{-1} a^{n_1+1} b^{n_2+1}}{1 - x a^{n_1} b^{n_2}}. \quad (12)$$

При $p = 1$ оно сводится к эллиптической гамма-функции $\Gamma(x; a, b)$, известной в литературе:

$$\Gamma(x; a, b) = \prod_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{1 - x^{-1} a^{n_1+1} b^{n_2+1}}{1 - x a^{n_1} b^{n_2}}. \quad (13)$$

Эта функция удовлетворяет тождеству, подобному тождеству $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, верному для обычной гамма-функции, чем обосновывается название “эллиптическая гамма-функция”:

$$\Gamma(pz; p, q) = \theta(z; q)\Gamma(z; p, q), \quad \Gamma(qz; p, q) = \theta(z; p)\Gamma(z; p, q), \quad (14)$$

где

$$\theta(z; q) = \prod_{j \geq 0} (1 - z^{-1} q^{j+1})(1 - z q^j). \quad (15)$$

Подробнее о свойствах этой функции см., например, [14].

³⁾В работе [12] мера содержит дополнительный множитель $\prod_{\substack{\alpha \in G, \\ \alpha(m)=0}} 2 \sin \frac{\alpha(a)}{2}$. В настоящей статье он включается в $\mathcal{I}_{\text{vector}}$.

Для кирального мультиплета имеем

$$\mathcal{I}_{\text{chiral}}^m[\sigma; t, y, z] = \prod_{\Phi} \prod_{\rho_{\Phi}} \Gamma_{p, \rho(m)}(t^{6R_{\Phi}} e^{i\rho_{\Phi}(\sigma)}; t^3 y, t^3 y^{-1}), \quad (16)$$

где Φ пробегает все киральные мультиплеты теории, а для поля Φ мы обозначили соответствующие R-заряд и вес представления как R_{Φ} и ρ_{Φ} соответственно. Например, если Φ находится в фундаментальном (антифундаментальном) представлении, $\rho_{\Phi}(\sigma)$ даются значением σ_i ($-\sigma_i$), а если Φ находится в присоединенном представлении, то $\rho_{\Phi}(\sigma)$ даются значением $\sigma_i - \sigma_j$. Заметим, что R-заряд в этом выражении, вообще говоря, аномален (ср. [15]); этим принимается во внимание смешивание ультрафиолетовой R-симметрии и глобальных симметрий при переходе из ультрафиолетовой теории к инфракрасной неподвижной точке. Мы не приводим здесь вывод этого результата и отсылаем заинтересованного читателя к работе [12].

Приведем пример $p = 2$ для четырехмерной $\mathcal{N} = 1$ $SU(2)$ -суперсимметричной квантовой хромодинамики с N_f ароматами. Поскольку в этом случае нет различия между фундаментальным и антифундаментальным представлениями для $SU(2)$ -теорий, мы можем думать о материи как о $2N_f$ фундаментальных представлениях. Наложим $SU(N_f) \times SU(N_f)$ симметрию и обозначим R-заряды ароматов как R_f , $R_{\bar{f}}$, а глобальную симметрию химических потенциалов – как u_i , v_i , где $\prod_{i=1}^{N_f} u_i = \prod_{i=1}^{N_f} v_i = 1$. Подгруппа Картана в этом случае $(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma, -\sigma)$. Поскольку у нас $p = 1$, голономиями являются $m = (0, 0)$ или $m = (1, 1)$. Мера просто определяется как

$$[d\sigma]_{(0,0)} = \frac{1}{2} d\sigma, \quad [d\sigma]_{(1,1)} = d\sigma. \quad (17)$$

Однопетлевые детерминанты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{chiral}}^{(0,0)}[\sigma; t, y, z] &= \prod_{j=1}^{N_f} \left[\prod_{\epsilon=\pm 1} \Gamma_{2,0}(t^{6R_f} e^{i\epsilon\sigma} u_j; t^3 y, t^3 y^{-1}) \right] \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{N_f} \left[\prod_{\epsilon=\pm 1} \Gamma_{2,0}(t^{6R_{\bar{f}}} e^{i\epsilon\sigma} v_j; t^3 y, t^3 y^{-1}) \right], \\ \mathcal{I}_{\text{chiral}}^{(1,1)}[\sigma; t, y, z] &= \prod_{j=1}^{N_f} \left[\prod_{\epsilon=0, \pm 1} \Gamma_{2,1}(t^{6R_f} e^{i\epsilon\sigma} u_j; t^3 y, t^3 y^{-1}) \right] \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{N_f} \left[\prod_{\epsilon=0, \pm 1} \Gamma_{2,1}(t^{6R_{\bar{f}}} e^{i\epsilon\sigma} v_j; t^3 y, t^3 y^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\mathcal{I}_{\text{vector}}^{(0,0)} = \mathcal{I}_{\text{vector}}^{(1,1)} = \prod_{\epsilon=0, \pm 1} [\Gamma_{2,0}(e^{2i\epsilon\sigma}; t^3 y, t^{-3} y)]^{-1}. \quad (19)$$

Четырехмерный индекс получается подстановкой этих выражений в (9).

Как мы кратко объясняли в разделе 1, четырехмерный индекс линзового пространства должен быть одним и тем же на паре четырехмерных $\mathcal{N} \geq 1$ теорий,

попадающих в одну и ту же инфракрасную неподвижную точку. Это значит, что начав с пары теорий, связанных двойственностью Зайберга или двойственностью Кутасова–Швиммера, и связывая содержание материи, ранг калибровочных групп и т. д., мы получим равенство эллиптических гамма-функций (12) на орбиобразиях, что обобщает похожее обсуждение четырехмерного индекса в случае не-орбиобразий (см., например, [16], [17]). Есть математический интерес в том, чтобы доказать каждое из этих тождеств. Заметим, что для выполнения равенства существенно рассмотреть сумму по голономиям m .

3. РЕДУКЦИЯ К ТРЕМ И К ДВУМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Теперь рассмотрим редукции четырехмерного индекса линзового пространства к трехмерному индексу, трехмерной статистической сумме S^3 и двумерной статистической сумме S^2 . Это проиллюстрирует богатство информации, заложенной в нашем индексе линзового пространства.

Начнем с четырехмерного суперконформного индекса на $S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_p$ и рассмотрим размерные редукции⁴⁾ к трем измерениям вдоль S^1 . Для этого есть два естественных варианта выбора. Поскольку мы исходим из $S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_p$, один вариант выбора состоит во взятии температурной S^1 (которую мы обозначим как S^1_T), а другой – во взятии S^1_H из слоения Хопфа $S^3/\mathbb{Z}_p$, где определено $\mathbb{Z}_p$ -действие в (5). В обоих случаях интуитивно ожидается, что мы получим статистическую сумму в трех измерениях – трехмерную $S^3/\mathbb{Z}_p$ статистическую сумму в первом случае и трехмерный $S^2 \times S^1$ суперконформный индекс во втором. Это ожидание можно подтвердить явным вычислением, имеем [18]–[20] (см. также [21])

$$\mathcal{I}_{4d}[S^1_T \times S^3/\mathbb{Z}_p] \rightarrow \mathcal{Z}_{3d}[S^3/\mathbb{Z}_p] \quad \text{при} \quad S^1_T \rightarrow 0. \quad (20)$$

и [12]

$$\mathcal{I}_{4d}[S^1_T \times S^3/\mathbb{Z}_p] \rightarrow \mathcal{I}_{3d}[S^1_T \times S^2] \quad \text{при} \quad S^1_H \rightarrow 0. \quad (21)$$

Заметим, что полученная трехмерная $\mathcal{N} = 2$ калибровочная теория не является наиболее общей; к примеру, она не содержит член Черна–Саймонса, у которой нет аналога в четырех измерениях. Следует также отметить, что члены Черна–Саймонса можно получить, проинтегрировав вещественные массовые параметры теории, а эту операцию можно реализовать на уровне $S^3/\mathbb{Z}_p$ статистической суммы. Ниже мы не будем обсуждать члены Черна–Саймонса или их редукции к двум измерениям⁵⁾.

Можно далее размерно редуцировать теорию до двух измерений. Одна такая редукция – это предел при $p \rightarrow \infty$ ($S^1_H \rightarrow 0$) трехмерной статистической суммы линзового пространства на $S^3/\mathbb{Z}_p$

$$\mathcal{Z}_{3d}[S^3/\mathbb{Z}_p] \rightarrow \mathcal{Z}_{2d}[S^2] \quad \text{при} \quad S^1_H \rightarrow 0. \quad (22)$$

⁴⁾Заметим, что это не простая размерная редукция, в том смысле, что включены линии Вилсона по S^1 .

⁵⁾Это делает некоторые выражения, например S^2 статистическую сумму, расходящимися.

Рис. 1. Коммутативная диаграмма, соответствующая двум редукциям от четырех измерений к двум. Они связаны обменом S_T^1 и S_H^1 .

Другая редукция – предел при $S_T^1 \rightarrow 0$ трехмерного индекса на $S_T^1 \times S^2$, и у нас снова получается статистическая сумма двумерной теории на S^2 :

$$I_{3d}[S_T^1 \times S^2] \rightarrow \mathcal{Z}_{2d}[S^2] \quad \text{при} \quad S_T^1 \rightarrow 0. \quad (23)$$

Можно скомбинировать эти редукции с нашими предыдущими редукциями и редцировать четырехмерную теорию к двумерной: одна редукция комбинирует (20) и (22), а другая – (21) и (23). Результаты этих двух редукций совпадают (см. рис. 1). Две редукции связаны переменной порядка двух пределов (двойным виновским поворотом) $S_T^1 \rightarrow 0$ и $S_H^1 \rightarrow 0$.

Обсудим теперь каждую из этих редукций подробнее.

3.1. Редукция к трехмерному индексу. Сначала рассмотрим редукцию (21). Она представляет собой просто предел при $p \rightarrow \infty$; действие $\mathbb{Z}_p$ делит размер слоя Хопфа S^1 в p раз, а значит, слой исчезает в пределе $p \rightarrow \infty$. Этот предел элементарно берется [12], и результат совпадает с формулами из работы [9], полученными с помощью локализации.

Для большей прозрачности определим сначала трехмерный суперконформный индекс формулой

$$\text{Tr}[(-1)^{\mathcal{F}} x^{E+j_3} z^F], \quad (24)$$

где F – число фермионов, E – энергия, j_3 – третья компонента спина, а F – заряд аромата. Тогда матричная модель для трехмерного суперконформного индекса [9] имеет вид

$$I_{3d}[S^1 \times S^2] = \sum_m \int [d\sigma]_{3d} I_{\text{vector}}^m[\sigma] I_{\text{chiral}}^m[\sigma], \quad (25)$$

где

$$I_{\text{vector}}^m[\sigma] = \prod_{\alpha \neq 0} (1 - e^{i\alpha(\sigma)} x^{|\alpha(m)|}), \quad (26)$$

$$I_{\text{chiral}}^m[\sigma] = \prod_{\Phi} \prod_{n \geq 0} \frac{1 - e^{-i\rho_{\Phi}(a)} z^{-F_{\Phi}} x^{|\rho_{\Phi}(m)|+2-Q_{\Phi}+2n}}{1 - e^{i\rho_{\Phi}(\sigma)} z^{F_{\Phi}} x^{|\rho_{\Phi}(m)|+Q_{\Phi}+2n}}, \quad (27)$$

F_{Φ} – заряд аромата Φ .

Можно понимать этот результат как альтернативный вывод трехмерного суперконформного индекса. Результат довольно нетривиален, поскольку в трех измерениях ответ удалось получить только после тщательного анализа лагранжиана и его локализации трехмерной $\mathcal{N} = 2$ теории на S^2 , а числа m задают монопольные заряды конфигураций в седловых точках. Совсем другая ситуация в нашей редукции четырех измерений: эти числа – просто голономии вдоль S^1 , а окончательное выражение для трехмерного индекса можно получить просто переходом к пределу свободного поля.

3.2. Редукция к трехмерной статистической сумме. Редукция (20) – это редукция к трехмерной статистической сумме на $S^3/\mathbb{Z}_p$. Это предел, где размер термального S^1 превращается в нуль, что означает, что все химические потенциалы стремятся к единице. Мы, тем не менее, можем поддерживать их соотношение конечным, и записывая

$$t = e^{-\beta/3}, \quad y = e^{-\beta\eta}, \quad z_I = e^{-\beta\mu_I}, \quad (28)$$

и переходя к пределу $\beta \rightarrow 0$. Полученная статистическая сумма расходится при $\beta \rightarrow 0$ в соответствии с бесконечной башней мод Калуцы–Клейна, и необходимо регуляризовать расходимость. Технически эта редукция – предел, заменяющий эллиптическую гамма-функцию (13) (или ее обобщение (12)) на квантовую дилогарифмическую функцию (последняя функция обсуждалась в [22]–[24]). Полученное выражение дает [18]–[20], [12] статистическую сумму на $S^3/\mathbb{Z}_p$ ⁶⁾, где μ_I – вещественный массовый параметр для глобальной симметрии F_I , а η дает однопараметрическую деформацию 3-сферы, введенную в [29].

Более явно, полученная статистическая сумма (где $\eta = \mu_I = 0$) записывается как матричный интеграл

$$Z_{\text{3d}}[S^3/\mathbb{Z}_p] = \sum_m \int [d\sigma]_m Z_{\text{vector}}^m[\sigma] Z_{\text{chiral}}^m[\sigma], \quad (29)$$

где мы снова имеем сумму по голономиям $m = (m_0, \dots, m_{N-1})$, а мера такая же, как определялась ранее в (10). Множители Z_{vector}^m и Z_{chiral}^m – это однопетлевые детерминанты калибровочного сектора и сектора материи. Для векторного мультиплетта имеем⁷⁾

$$Z_{\text{vector}}^m[\sigma] = \prod_{\alpha > 0} \frac{(p \operatorname{sh}[(\pi/p)(\alpha(\sigma) + i\alpha(m))]) (p \operatorname{sh}[(\pi/p)(\alpha(\sigma) - i\alpha(m))])}{(\alpha(\sigma))^{2\delta_{\alpha(m),0}}}. \quad (30)$$

⁶⁾См. [24] для случая чистой калибровочной теории, а также [26]–[28], где рассматриваются только векторные мультиплеты.

⁷⁾При вычислении однопетлевого детерминанта присутствует постоянный множитель p перед sh (см. (51) в [12]). Этот множитель, являющийся просто мультипликативной константой статистической суммы, часто опускают, но он играет важную роль в нашем пределе $p \rightarrow \infty$.

Для киральных мультиплетов, если обозначить аномальный R-заряд для кирального мультиплета Φ как Q_Φ , а вес представления – как ρ_Φ , имеем

$$Z_{\text{chiral}}^m[\sigma] = \prod_{\Phi} \prod_{\rho_\Phi} \prod_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l+2-Q_\Phi+i\rho(\sigma)}{l+Q_\Phi-i\rho(\sigma)} \right)^{N_\rho(l)}, \quad (31)$$

где $N_\rho(l)$ определяется как количество полуцелых чисел $m_1 \in \{-l/2, -l/2+1, \dots, l/2-1, l/2\}$, удовлетворяющих условию

$$2m_1 \equiv \rho(m) \pmod{p}. \quad (32)$$

Условие (32) представляет собой эффект действия $\mathbb{Z}_p$.

3.3. Редукция к двум измерениям. Рассмотрим, наконец, редукцию формул (22), (23) к двум измерениям. В нашем анализе это просто предел при $p \rightarrow \infty$ трехмерной статистической суммы линзового пространства или предел при $S^1 \rightarrow 0$ трехмерного индекса, где мы регуляризуем расходимости, следуя двум предыдущим случаям (20), (21). В любом случае мы получаем S^2 статистическую сумму на двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ теории на S^2 (рис. (1)). Это само по себе является полезным инструментом для изучения сильно спаренных инфракрасных неподвижных точек двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ теории в условиях сильной связи, так же как их аналогов старших размерностей. Детали находятся в стадии изучения, но мы приведем некоторые предварительные результаты.

Двумерная статистическая сумма записывается как матричный интеграл

$$\mathcal{Z}_{2d}[S^2] = \sum_m \int [d\sigma]_m Z_{\text{vector}}^m[\sigma] Z_{\text{chiral}}^m[\sigma], \quad (33)$$

суммирование проводится по $m = (m_0, \dots, m_{N-1})$, что в двух измерениях представляет собой квантованный поток калибровочного поля S^2 .

Множители $Z_{\text{vector}}^m[\sigma]$ и $Z_{\text{chiral}}^m[\sigma]$ – это однопетлевые детерминанты из векторных мультиплетов и киральных мультиплетов соответственно. Для векторных мультиплетов

$$Z_{\text{vector}}^m[\sigma] = \prod_{\alpha>0} [\alpha(\sigma)^2 + \alpha(m)^2], \quad (34)$$

а для киральных мультиплетов (используя те же обозначения, что и в предыдущих формулах)

$$Z_{\text{chiral}}^m[\sigma] = \prod_{\Phi} \prod_{\rho_\Phi} \frac{\Gamma(|\rho_\Phi(m)|/2 + Q_\Phi/2 - i\rho_\Phi(\sigma))}{\Gamma(|\rho_\Phi(m)|/2 + 1 - Q_\Phi/2 + i\rho_\Phi(\sigma))}. \quad (35)$$

Этот результат можно было получить, взяв двумерный предел $p \rightarrow \infty$ статистической функции $S^3/\mathbb{Z}_p$. В этом пределе выражение (30) сводится к

$$Z_{\text{vector}}^m[\sigma] \rightarrow \prod_{\alpha>0} (\alpha(\sigma) + i\alpha(m))(\alpha(\sigma) - i\alpha(m)), \quad (36)$$

что совпадает с (34). Для кирального мультиплета условие (32) превращается в пределе $p \rightarrow \infty$ в равенство $2m_1 = \rho_\Phi(m)$. Такое m_1 существует только тогда, когда $l = |\rho_\Phi(m)| + 2n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и мы имеем

$$Z_{\text{chiral}}^m[\sigma] \rightarrow \prod_{\rho_\Phi} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{2n + |\rho_\Phi(m)| + 2 - Q_\Phi + i\rho_\Phi(\sigma)}{2n + |\rho_\Phi(m)| + Q_\Phi - i\rho_\Phi(\sigma)}. \quad (37)$$

Воспользовавшись формулой для (регуляризованного) бесконечного произведения

$$\prod_{n=0}^{\infty} (n+x) = [\Gamma(x)]^{-1}, \quad (38)$$

получаем (35).

Чтобы доказать равенство (38), обозначим левую часть (38) как $\gamma(x)$ и продифференцируем ее логарифм:

$$\frac{d}{dx} \log \gamma(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x} = \zeta_H(x, s) \Big|_{s=1},$$

где $\zeta_H(x, s)$ – дзета-функция Гурвица. Вблизи $s = 1$ функция $\zeta_H(x, s)$ разлагается как

$$\zeta(s, x) \sim \frac{1}{s-1} - \frac{d}{dx} \log \Gamma(x).$$

Вычитая расходящуюся часть $1/(s-1)$, имеем $\gamma(x) = [\Gamma(x)]^{-1}$ с точностью до не меняющей сути константы. Заметим, что гамма-функция действительно имеет полюсы при $\mathbb{Z}_{<0}$, точно так же, как и $[\gamma(x)]^{-1}$.

Можно также провести вторую редукцию (23). Начнем с (25), заменим σ на $\beta\sigma$ и запишем $x = e^{-\beta/2}$ и $t_a = e^{-\beta\nu_a/2}$. Перейдем к пределу $\beta \rightarrow 0$, оставляя ν_a постоянным. В этом пределе

$$I_{\text{vector}}^m[\sigma] \rightarrow \prod_{\alpha \neq 0} (i\alpha(\sigma) + \alpha(m)), \quad (39)$$

что совпадает с (34). Имеем также (при $\nu_a = 0$)

$$I_{\text{chiral}}^m[\sigma] \rightarrow \prod_{\Phi} \prod_{n \geq 0} \left(\frac{i\rho_\Phi(\sigma) + (|\rho_\Phi(m)| + 2 - Q_\Phi + 2n)/2}{-i\rho(\sigma) + (|\rho_\Phi(m)| + Q_\Phi + 2n)/2} \right), \quad (40)$$

что совпадает с (35) в силу (38).

Мы обсуждали здесь редукции (20)–(23) на уровне статистической суммы. Это можно также делать на уровне лагранжиана в духе [20]. Например, трехмерный $\mathcal{N} = 2$ лагранжиан и двумерный $\mathcal{N} = (2, 2)$ лагранжиан должны совпасть с точностью до несущественного сдвига вспомогательных полей.

Имеется еще и другой род редукции к двумерной статистической сумме. Например, в работе [17] обсуждается редукция четырехмерного суперконформного индекса к двумерной вертексной статистической сумме. Эта редукция – предел $\epsilon_1 \rightarrow 0$, и математически она основана на том, что асимптотическая часть эллиптической гамма-функции дается гамма-функцией.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ КОЛЧАНАМ

До сих пор наши рассуждения были довольно общими и подходили к любой четырехмерной $\mathcal{N} = 1$ теории. Здесь мы применим наши результаты к особому классу четырехмерных $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных конформных теорий поля, двойственных к торическим многообразиям Калаби–Яу, и их размерным редукциям – трехмерным $\mathcal{N} = 2$ теориям. Оказывается, что четырехмерные суперконформные индексы и трехмерные статистические суммы этих теорий можно замечательно описать геометрически [30], [31].

Проще говоря, наши четырехмерные $\mathcal{N} = 1$ теории описываются ориентированным графом (диаграммой колчана) на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Вершины узла представляют $SU(N)$ калибровочные группы четырехмерной теории, а ребра – бифундаментальные поля материи, преобразующиеся как $(N, \bar{N})$ под действием $SU(N)$ калибровочных групп на двух концах ребра. Наконец, грани графа представляют суперпотенциальный член. Тогда лагранжиан теории определяется по этим данным⁸⁾. Вообще говоря, ничто не гарантирует, что они перейдут в нетривиальную неподвижную точку. Однако, если колчан определен геометрией торического многообразия Калаби–Яу, считается, что они переходят в инфракрасную неподвижную точку.

Теперь первым результатом является то, что четырехмерный индекс идентифицируется со статистической суммой некоторой двумерной спиновой системы, определенной на двумерном торе. Идея довольно проста – в выражении (9) переменную интегрирования σ_i можно считать непрерывным спином, принимающим значения в $U(1)$, а однопетлевой детерминант – болцмановским весом. Величина I_{chiral} представляет взаимодействие ближайших соседей, тогда как I_{vector} – самодействие спина.

Колчан описывается множеством путей (называемых зигзагами) на $\mathbb{T}^2$ [32]. По сути, такой же граф вводился много лет назад в работе Бакстера об интегрируемых системах [33]. Действительно, наш четырехмерный индекс совпадает с интегрируемой спиновой цепочкой, построенной в работах [34], [35], с точностью до незначительного отличия в нормировке, объяснявшегося в [30].

Но все оказывается еще более впечатляющим, поскольку можно обсуждать также редукцию к S^3 статистической сумме (3). С точки зрения интегрируемых спиновых цепочек эта редукция является просто высокотемпературным пределом статистической механической модели, и в нем сохраняется интегрируемость. Критическая точка полученной статистической суммы воспроизводит гиперболический объем 3-многообразия [36].

Наконец, заметим, что имеется сходное обсуждение для класса четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ теорий, полученных из компактификации М5-бран на римановых поверхностях [37]. Показано, что четырехмерный суперконформный индекс эквивалентен статистической сумме с трехпараметрическим семейством двумерных топологических квантовых теорий поля [38], [39]. Показано, что в некотором однопараметрическом срезе эта топологическая квантовая теория совпадает с пределом нулевой площади в двумерной теории Янга–Миллса.

⁸⁾Мы выбираем канонический кэлеров потенциал.

Можно размерно редуцировать теорию к трем измерениям, но трехмерная теория имеет зеркало [40], у которого есть лагранжиан. В этом случае можно вычислить индекс. У этой редукции есть одномерная квантово-механическая интерпретация [21] (см. также [41], [42]), являющаяся размерной редукцией двумерной теории Янга–Миллса.

5. СУЩЕСТВУЕТ ЛИ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНФРАКРАСНЫХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК?

Как обсуждалось в разделе 1, у нас есть теперь разнообразие точных статистических сумм, чтобы количественно изучать инфракрасные неподвижные точки. Это оказалось замечательным достижением, однако еще остаются важные вопросы.

Одна из проблем, которую хотелось бы поднять, – это проблема поиска полного множества точно вычисляемых величин, однозначно характеризующих инфракрасные неподвижные точки. Эта проблема тесно связана с программой классификации инфракрасных неподвижных точек четырех- и трехмерных калибровочных теорий. Заметим, что в литературе имеются некоторые частичные классификационные результаты (см., например, [43]). Однако классификация инфракрасных неподвижных точек четырехмерной $\mathcal{N} = 1$ (или трехмерной $\mathcal{N} = 2$) суперсимметричной конформной теории поля общего вида до сих пор мало изучена. Это было бы важной задачей также с точки зрения феноменологических приложений суперсимметричных калибровочных теорий и их приложений к физике конденсированной материи.

Заметим, что соответствие одной из наших статистических сумм Z (четырёх- или трёхмерного суперконформного индекса и трёхмерной S^3 статистической суммы) – сильный довод в пользу (и необходимое условие) утверждения, что две теории $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ ведут к одной и той же инфракрасной неподвижной точке⁹⁾. Выразим это более формально.

Определим пространство $\mathcal{S}_{\text{IR}}$ всех теорий, переходящих в нетривиальную неподвижную точку в инфракрасной области¹⁰⁾ (с лагранжевым описанием или без него). Можно определить отношение эквивалентности $\sim$ между двумя теориями $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_{\text{IR}}$, определяя $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$, тогда и только тогда, когда две теории переводятся потоком ренормализационной группы в одну и ту же инфракрасную неподвижную точку. Имеется несколько известных операций на лагранжиане, сохраняющих это отношение эквивалентности, например добавление массивной материи, которую можно интегрировать. Имеется “функтор” Z из $\mathcal{S}_{\text{IR}}$ в $\mathbb{R}$ (или полиномиальное кольцо, определенное химическими потенциалами) такой, что

$$\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad Z[\mathcal{T}_1] = Z[\mathcal{T}_2]. \quad (41)$$

⁹⁾ На практике это оказывается серьезным тестом на соответствие, поскольку, например, суперконформный индекс – это степенной ряд по экспонентам химических потенциалов, и надо сопоставить бесконечные наборы числовых коэффициентов. Однако, поскольку статистические функции в настоящей статье независимы от суперпотенциалов (не считая того, что выбор глобальных симметрий отчасти связан с этими данными), априори непонятно, достаточно ли этих статистических сумм для характеристики инфракрасных неподвижных точек.

¹⁰⁾ Это может представляться как часть большой программы определения “пространства квантовых теорий поля” (см., например, обсуждение в [44]). Хочется надеяться, что наша задача гораздо проще, чем эта намного более общая проблема.

Однако, тем не менее, может существовать пара теорий с одинаковой статистической суммой, по крайней мере, для всех известных статистических сумм. Так что проблема состоит в том, чтобы найти набор вычисляемых величин $\{Z_i\}$, однозначно характеризующих инфракрасную неподвижную точку, что означает

$$Z_i[\mathcal{T}_1] = Z_i[\mathcal{T}_2] \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2. \quad (42)$$

Более формально, $\{Z_i\}$ – “универсальный функтор”.

Для изучения структуры $\mathcal{S}_{\text{theory}}$ можно попытаться добавить к ней какую-нибудь структуру произведения. Например, естественная операция такова: взять две теории, глобальные симметрии которых содержат общую подгруппу, и диагонально откалибровать подгруппу, получив новую теорию. Эта идея калибровки – один из главных ингредиентов четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ двойственностей [45], [37]. У этой операции склеивания есть аналог на статистических суммах, так что Z – это “функтор” для подходящим образом определенной структуры произведения.

Однако, как эта конструкция ни заманчива, следует подчеркнуть, что сама по себе она не работает в общем случае (поэтому термин “функтор” мы употребляем в кавычках). Дело в том, что существование инфракрасной неподвижной точки – тонкое свойство теории, вообще говоря, нарушаемое калибровкой¹¹⁾.

Классификация суперсимметричных калибровочных теорий по инвариантам двойственности, намеченная выше, аналогична проблеме классификации узлов¹²⁾ (зацеплений), выражаемой, вообще говоря, при проецировании на двумерные плоскости инвариантами узлов, независимых от выбора проекции. Здесь аналоги статистических сумм – это инварианты узлов, такие как полиномы Александера, Джонса и HOMFLY. Если развивать эту аналогию, то необходимо найти аналоги движений Рейдемейстера – любые проекции одной и той же теории можно связать комбинацией трех базовых движений. Существует множество указаний, что мы уже знаем, по крайней мере, некоторые базовые движения, такие как четырехмерная двойственность Зайберга и трехмерная зеркальная симметрия. Имея теорию $\mathcal{T}$, можно совершить такое преобразование двойственности над частью теории $\mathcal{T}$, а затем с помощью процедуры калибровки, описанной выше, можно получить большой класс суперсимметричных калибровочных теорий.

Существует несколько указаний, что эта базовая картина имеет место, по крайней мере, для ограниченного класса суперсимметричных калибровочных теорий. Первый пример – класс четырехмерных $\mathcal{N} = 1$ колчановых калибровочных теорий, двойственных к торическим многообразиям Калаби–Яу, обсуждавшихся в разделе 4 (мы предлагаем название “класс $\mathcal{T}$ ” для этих теорий, где $\mathcal{T}$ означает “toric”); в этом случае теории связаны комбинацией двух движений, хиггсинга и двойственности Зайберга [30]. Другой пример – это класс трехмерных $\mathcal{N} = 2$ теорий [50] (называемый “класс $\mathcal{R}$ ”), содержащий теории, двойственные к гиперболическим 3-многообразиям. В этом случае неоднозначность в выборе идеальной триангуляции гиперболического 3-многообразия переводится в трехмерную зеркальную симметрию, а выбор поляризации на границе тетраэдра переводится в электромагнитную двойственность трехмерной теории [48].

¹¹⁾О классе примеров этого явления сообщается, например, в [46].

¹²⁾Недавние исследования соответствий между трехмерными теориями [47]–[49] наводят на мысль, что это, на самом деле, больше, чем аналогия.

Подводя итог, отметим, что теперь у нас есть новый класс четырехмерных и трехмерных суперсимметричных конформных теорий поля, а также мы получили новые средства для их количественного изучения. Возможно, эти исследования укажут на явно двойственно инвариантную формулировку четырехмерных инфракрасных неподвижных точек. Это, скорее всего, потребует новой переформулировки суперсимметричных калибровочных теорий.

Благодарности. Результаты разделов 2 и 3 были представлены на Международном семинаре “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS – 2012) в январе 2012 г. Автор благодарит организаторов семинара за приглашение и создание вдохновляющей атмосферы. Эта конференция предоставила замечательную возможность познакомиться с выдающимися русскими физиками и математиками, чьи работы оказали глубокое влияние как на исследования автора, так и в целом на область математической физики. Автор также хотел бы поблагодарить доктора С. Ли за его электронное письмо в октябре 2011 г., где он указал, что выражения, выведенные в настоящей работе, совпадают с результатами, полученными из расчета локализации, которые появились позднее в работах [51] и [52]. Автор благодарит Ф. Бенини, Т. Тишиока и И. Терашима за сотрудничество. Он также признателен за щедрую поддержку Princeton Center for Theoretical Science.

Список литературы

- [1] C. Klare, A. Tomasiello, A. Zaffaroni, *Supersymmetry on curved spaces and holography*, arXiv: [1205.1062](#).
- [2] T. T. Dumitrescu, G. Festuccia, N. Seiberg, *Exploring curved superspace*, arXiv: [1205.1115](#).
- [3] C. Romelsberger, *Nucl. Phys. B*, **747**:3 (2006), 329–353, arXiv: [hep-th/0510060](#).
- [4] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla, S. Raju, *Commun. Math. Phys.*, **275**:1 (2007), 209–254, arXiv: [hep-th/0510251](#).
- [5] A. Kapustin, B. Willett, I. Yaakov, *JHEP*, **03** (2010), 089, 29 pp., arXiv: [0909.4559](#).
- [6] D. L. Jafferis, *The exact superconformal R-symmetry extremizes Z*, arXiv: [1012.3210](#).
- [7] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, *JHEP*, **03** (2011), 127, 14 pp., arXiv: [1012.3512](#).
- [8] S. Kim, *Nucl. Phys. B*, **821**:1–2 (2009), 241–284, arXiv: [0903.4172](#).
- [9] Y. Imamura, S. Yokoyama, *JHEP*, **1104** (2011), 007, 21 pp., arXiv: [1101.0557](#).
- [10] N. Seiberg, *Nucl. Phys. B*, **435**:1–2 (1995), 129–146, arXiv: [hep-th/9411149](#).
- [11] K. A. Intriligator, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **387**:3 (1996), 513–519, arXiv: [hep-th/9607207](#).
- [12] F. Benini, T. Nishioka, M. Yamazaki, *Phys. Rev. D*, **86**:6 (2012), 065015, 10 pp., arXiv: [1109.0283](#).
- [13] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **5**:5 (2002), 841–907, arXiv: [hep-th/0006010](#).
- [14] В. П. Спиридонов, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 3–72.
- [15] C. Romelsberger, *Calculating the superconformal index and Seiberg duality*, arXiv: [0707.3702](#).
- [16] V. Spiridonov, G. Vartanov, *Commun. Math. Phys.*, **3** (2011), 797–874, arXiv: [0910.5944](#).
- [17] V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, *Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities II. Orthogonal groups, knots, and vortices*, arXiv: [1107.5788](#).
- [18] F. A. H. Dolan, V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, *Phys. Lett. B*, **704**:3 (2011), 234–241, arXiv: [1104.1787](#).
- [19] A. Gadde, W. Yan, *Reducing the 4d index to the S^3 partition function*, arXiv: [1104.2592](#).
- [20] Y. Imamura, *JHEP*, **09** (2011), 133, 19 pp., arXiv: [1104.4482](#).
- [21] T. Nishioka, Y. Tachikawa, M. Yamazaki, *JHEP*, **08** (2011), 003, 22 pp., arXiv: [1105.4390](#).

- [22] L. Faddeev, A. Y. Volkov, *Phys. Lett. B*, **315**:3–4 (1993), 311–318, arXiv: hep-th/9307048.
- [23] L. D. Faddeev, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 249–254, arXiv: hep-th/9504111.
- [24] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434, arXiv: hep-th/9310070.
- [25] D. Gang, *Chern–Simons theory on $L(p, q)$ lens spaces and localization*, arXiv: 0912.4664.
- [26] J. Kallen, *JHEP*, **08** (2011), 008, 32 pp., arXiv: 1104.5353.
- [27] K. Ohta, Y. Yoshida, *Non-Abelian localization for supersymmetric Yang–Mills–Chern–Simons theories on Seifert manifold*, arXiv: 1205.0046.
- [28] L. F. Alday, M. Fluder, J. Sparks, *The large N limit of $M2$ -branes on Lens spaces*, arXiv: 1204.1280.
- [29] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, *JHEP*, **05** (2011), 014, 23 pp., arXiv: 1102.4716.
- [30] M. Yamazaki, *JHEP*, **05** (2012), 147, 50 pp., arXiv: 1203.5784.
- [31] Y. Terashima, M. Yamazaki, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:9 (2012), 091602, 4 pp., arXiv: 1203.5792.
- [32] A. Hanany, D. Vegh, *JHEP*, **10** (2007), 029, 35 pp., arXiv: hep-th/0511063.
- [33] R. Baxter, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **289**:1359 (1978), 315–346.
- [34] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, *A master solution of the quantum Yang–Baxter equation and classical discrete integrable equations*, arXiv: 1006.0651.
- [35] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, *Nucl. Phys. B*, **856**:2 (2012), 475–496, arXiv: 1106.5874.
- [36] V. V. Bazhanov, V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, *Nucl. Phys. B*, **784**:3 (2007), 234–258, arXiv: hep-th/0703041.
- [37] D. Gaiotto, *$N = 2$ dualities*, arXiv: 0904.2715.
- [38] A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli, S. S. Razamat, *JHEP*, **03** (2010), 032, 22 pp., arXiv: 0910.2225.
- [39] A. Gadde, L. Rastelli, S. S. Razamat, W. Yan, *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011), 241602, 4 pp., arXiv: 1104.3850.
- [40] F. Benini, Y. Tachikawa, D. Xie, *JHEP*, **09** (2010), 063, 32 pp., arXiv: 1007.0992.
- [41] D. R. Gulotta, C. P. Herzog, S. S. Pufu, *From necklace quivers to the F -theorem, operator counting, and $T(U(N))$* , arXiv: 1105.2817.
- [42] S. Benvenuti, S. Pasquetti, *3D-partition functions on the sphere: exact evaluation and mirror symmetry*, arXiv: 1105.2551.
- [43] S. Cecotti, C. Vafa, *Classification of complete $N = 2$ supersymmetric theories in 4 dimensions*, arXiv: 1103.5832.
- [44] M. R. Douglas, *Spaces of quantum field theories*, arXiv: 1005.2779.
- [45] P. C. Argyres, N. Seiberg, *JHEP*, **12** (2007), 088, 26 pp., arXiv: 0711.0054.
- [46] I. Bah, B. Wecht, *New $N = 1$ superconformal field theories in four dimensions*, arXiv: 1111.3402.
- [47] Y. Terashima, M. Yamazaki, *JHEP*, **08** (2011), 135, 46 pp., arXiv: 1103.5748.
- [48] T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, *Gauge theories labelled by three-manifolds*, arXiv: 1108.4389.
- [49] S. Cecotti, C. Cordova, C. Vafa, *Braids, walls, and mirrors*, arXiv: 1110.2115.
- [50] T. Dimofte, D. Gaiotto, S. Gukov, *3-Manifolds and 3d indices*, arXiv: 1112.5179.
- [51] N. Doroud, J. Gomis, B. Le Floch, S. Lee, *Exact results in $D = 2$ supersymmetric gauge theories*, arXiv: 1206.2606.
- [52] F. Benini, S. Cremonesi, *Partition functions of $N = (2, 2)$ gauge theories on S^2 and vortices*, arXiv: 1206.2356.