Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Аминов, Предельная связь цепочек Тоды с эллиптическим $SL(N, \mathbb{C})$ -волчком, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 179–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:53:12

© 2012 г.

Г. А. Аминов^{*†}

ПРЕДЕЛЬНАЯ СВЯЗЬ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ $SL(N, \mathbb{C})$ -ВОЛЧКОМ

Изучается предельная связь между эллиптическим $SL(N, \mathbb{C})$ -волчком и цепочками Тоды. Показано, что в случае неавтономного $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка, уравнения движения которого связаны с уравнением Пенлеве VI, оказывается возможным модифицировать предложенную ранее процедуру и получить в пределе неавтономную цепочку Тоды, уравнения движения которой эквивалентны частному случаю уравнения Пенлеве III. Получен предел пары Лакса эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка, который позволяет представить уравнения движения неавтономной цепочки Тоды в виде уравнения изомонодромных деформаций.

Ключевые слова: интегрируемые системы, неавтономные системы, уравнения Пенлеве, предел Иноземцева, топологическая структура фазовых пространств.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], где рассмотрен случай автономного $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка. В статье рассматриваются четыре интегрируемые системы, уравнения движения которых имеют представление Лакса со спектральным параметром [2]–[4]: периодическая и непериодическая цепочки Тоды, эллиптическая модель Калоджеро–Мозера и эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок. Перечисленные системы связаны между собой, что было установлено ранее в работах [5]–[8]. Иноземцевым [5] предложена процедура, задающая предельную связь между цепочками Тоды и эллиптической моделью Калоджеро–Мозера. Левин, Ольшанецкий и Зотов [6] построили сингулярное симплектическое преобразование от системы Калоджеро–Мозера к эллиптическому $SL(N, \mathbb{C})$ -волчку.

Для получения предельных систем эллиптического волчка, эквивалентных цепочкам Тоды, используется процедура, близкая к пределу Иноземцева. Предел Иноземцева является комбинацией тригонометрического предела, бесконечного сдвига координат частиц и перенормировки константы связи. Чтобы получить предельные системы, эквивалентные цепочкам Тоды, необходимо комбинировать предел Иноземцева и бесконечный сдвиг спектрального параметра. Так как спектральный параметр эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка задан на комплексном торе T^2 с модулем τ ,

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: aminov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

то в тригонометрическом пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ мы получим системы со спектральным параметром, заданным на бесконечном комплексном цилиндре $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

В случае эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка удобно воспользоваться явной формой (см. ниже формулу (7)) симплектического отображения из фазового пространства эллиптической системы Калоджеро–Мозера в фазовое пространство волчка. При этом используемые в пределе Иноземцева сдвиги координат эллиптической системы Калоджеро–Мозера задают перенормировку координат эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка (см. раздел 2).

В случае эллиптического $SL(N > 2, \mathbb{C})$ -волчка вывести явный вид симплектического отображения между фазовыми пространствами эллиптической системы Калоджеро–Мозера и эллиптического волчка значительно сложнее. Поэтому мы будем перенормировать координаты в соответствии с предельным поведением матриц Лакса, обобщая (см. раздел 3) таким образом метод, развитый для случая $N = 2$, на случай $N > 2$.

Описанную выше предельную процедуру можно далее обобщить на неавтономный случай. В разделе 4 будет рассмотрена система неавтономного эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка, в котором роль времени играет параметр эллиптической кривой τ [9], [10]. Уравнения движения неавтономного $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка записываются в форме уравнения изомонодромных деформаций [11]–[13]:

$$\partial_\tau L^{\text{rot}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{rot}} = 2[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}],$$

где $L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}$ – матрицы Лакса эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка. Обобщение предельной процедуры будет состоять в том, что мы представим параметр эллиптической кривой как сумму двух слагаемых: $\tau = \tau_1 + \tau_2$. Мнимая часть второго слагаемого τ_2 в пределе стремится к бесконечности, а первое слагаемое будет играть роль времени в предельной системе. Таким образом будут получены неавтономная цепочка Тоды и одновременно представление ее уравнений движения в форме уравнения изомонодромных деформаций.

Так как уравнения движения неавтономного эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка эквивалентны частному случаю уравнения Пенлеве VI [14], [15], то уравнения движения полученной неавтономной цепочки Тоды эквивалентны частному случаю уравнения Пенлеве III [16], [17].

Приведем необходимые сведения об интегрируемых системах, рассматриваемых в статье.

1.1. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является примером волчка Эйлера–Арнольда [18], фазовое пространство которого задается орбитой коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{R}^{\text{rot}} = \{\mathbf{S} \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}), \mathbf{S} = g^{-1} \mathbf{S}^{(0)} g\},$$

где $g \in SL(N, \mathbb{C})$ определено по модулю левых сдвигов G_0 , коммутирующих с $\mathbf{S}^{(0)}$. На фазовом пространстве волчка $\mathcal{R}^{\text{rot}}$ существует невырожденная симплектическая форма Кириллова–Костанта

$$\omega^{\text{rot}} = \text{Tr}(\mathbf{S}^{(0)} dg g^{-1} \wedge dg g^{-1}).$$

Динамика системы задается гамильтонианом

$$H^{\text{rot}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{S} J(\mathbf{S}), \quad (1)$$

где

$$J(\mathbf{S}) = \sum_{mn} J_{mn} s_{mn} T_{mn}, \quad J_{mn} = E_2\left(\frac{m+n\tau}{N}, \tau\right),$$

$$m, n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

$E_2(z, \tau)$ – вторая функция Эйзенштейна [19], определенная на комплексном торе $T^2: \mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$ с $\omega_1 = 1/2$, $\tau = \omega_2/\omega_1$, а s_{mn} – координаты в некотором специальном базисе $\{T_{mn}\}$ в алгебре $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, который образует синус-алгебру (см. приложение А).

Уравнения движения можно записать в форме Лакса [20]:

$$\frac{dL^{\text{rot}}}{dt} = N[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}]. \quad (2)$$

Множитель N в уравнении (2) связан с определением матриц Лакса в базисе синус-алгебры (см. приложение А):

$$L^{\text{rot}} = \sum_{m,n} s_{mn} \varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) T_{mn}, \quad \varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e\left(-\frac{nz}{N}\right) \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, z\right),$$

$$M^{\text{rot}} = \sum_{m,n} s_{mn} f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) T_{mn}, \quad f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e\left(-\frac{nz}{N}\right) \partial_u \phi(u, z)|_{u=-(m+n\tau)/N},$$

где $e(z) \equiv e^{2\pi iz}$, $i \equiv \sqrt{-1}$ и ϕ является комбинацией тета-функций (см. приложение Б).

Гамильтониан (1) связан с матрицей Лакса следующим образом:

$$H^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(L^{\text{rot}})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} S^2 E_2(z, \tau). \quad (3)$$

Скобки Пуассона для переменных s_{mn} следуют из коммутатора $[T_{ab}, T_{cd}]$ (см. (II.1) в приложении А) базисных элементов T_{ab} и T_{cd} :

$$\{s_{ab}, s_{cd}\} = 2i \sin\left[\frac{\pi}{N}(bc - ad)\right] s_{a+c, b+d}. \quad (4)$$

Переход к стандартному базису (II.2) дает

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = N(S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj}). \quad (5)$$

1.2. Эллиптическая модель Калоджеро–Мозера. Эллиптическая система Калоджеро–Мозера впервые была описана в квантовом случае [21], [22]. Фазовое пространство представляет собой пространство импульсов и координат частиц в системе центра масс:

$$\mathcal{R}^{\text{CM}} = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \sum_{i=1}^N u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N v_i = 0 \right\},$$

с канонической симплектической формой $\omega^{\text{CM}} = (d\mathbf{v} \wedge d\mathbf{u})$. Квадратичный по импульсам $\mathbf{v}$ гамильтониан имеет вид

$$H^{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{2} + m^2 \sum_{i>j} E_2(u_i - u_j, \tau).$$

Уравнения движения, заданные этим гамильтонианом, могут быть представлены в форме Лакса:

$$\frac{dL^{\text{CM}}}{dt} = [L^{\text{CM}}, M^{\text{CM}}],$$

где

$$\begin{aligned} L_{ij}^{\text{CM}} &= \delta_{ij} v_i + m(1 - \delta_{ij}) \phi(u_i - u_j, z), \\ M_{ij}^{\text{CM}} &= -\delta_{ij} \sum_{k \neq j} E_2(u_j - u_k) + \frac{\partial \phi(u, z)}{\partial u} \Big|_{u=u_i - u_j}. \end{aligned}$$

1.3. Цепочки Тоды. Периодическая и неперидическая цепочки Тоды являются системами с N взаимодействующими частицами на прямой. Фазовое пространство представляет собой пространство импульсов и координат частиц в системе центра масс:

$$\mathcal{R}^T = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \sum_{i=1}^N u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N v_i = 0 \right\},$$

с канонической симплектической формой $\omega^T = (d\mathbf{v} \wedge d\mathbf{u})$. Гамильтониан неперидической системы имеет вид

$$H^{\text{aT}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + 4\pi^2 M^2 \sum_{i=1}^{N-1} e(u_{i+1} - u_i),$$

для периодического случая имеем

$$H^{\text{pT}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + 4\pi^2 M^2 \sum_{i=1}^N e(u_{i+1} - u_i), \quad u_{N+1} = u_1.$$

Уравнения движения как периодической, так и неперидической цепочек Тоды эквивалентны следующим уравнениям Лакса [23]–[25]:

$$\frac{d}{dt} L^{\text{aT}} = [L^{\text{aT}}, M^{\text{aT}}], \quad \frac{d}{dt} L^{\text{pT}} = [L^{\text{pT}}, M^{\text{pT}}].$$

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ $SL(2, \mathbb{C})$ -ВОЛЧОК И ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Левин, Ольшанецкий и Зотов в работе [6] установили связь между эллиптической системой Калоджеро–Мозера и эллиптическим $SL(N, \mathbb{C})$ -волчком в форме следующего сингулярного калибровочного преобразования:

$$L^{\text{rot}}(z) = \Xi(z) L^{\text{CM}}(z) \Xi^{-1}(z).$$

Это преобразование приводит к симплектическому отображению фазовых пространств

$$\mathcal{R}^{\text{CM}} \rightarrow \mathcal{R}^{\text{rot}}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{S}, \quad (6)$$

которое при $N = 2$ принимает вид

$$\begin{aligned} s_{01} &= -v \frac{\theta_{01}(0)\theta_{01}(2u)}{\vartheta'(0)\vartheta(2u)} - m \frac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{10}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ s_{10} &= v \frac{\theta_{10}(0)\theta_{10}(2u)}{\vartheta'(0)\vartheta(2u)} + m \frac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ s_{11} &= -iv \frac{\theta_{00}(0)\theta_{00}(2u)}{\vartheta'(0)\vartheta(2u)} - im \frac{\theta_{00}^2(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{10}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Основная идея используемой процедуры состоит в том, чтобы рассмотреть координаты эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка как функции от координат системы Калоджеро–Мозера $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и затем применить используемый в пределе Иноземцева сдвиг координат $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

2.1. Предельная система, эквивалентная периодической цепочке Тоды.

Чтобы получить в пределе периодическую цепочку Тоды, мы комбинируем сдвиг координат $u = U + \tau/4$, скейлинг константы связи $M = mq^{1/4}$ ($q \equiv e(\tau)$), сдвиг спектрального параметра $z = \tilde{z} + \tau/2$ и тригонометрический предел $q \rightarrow 0$. Тогда из симплектического отображения фазовых пространств (7) получим разложение функций $s_{ij}(u, v)$ по степеням q . За координаты предельного волчка примем перенормированные координаты $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{10} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{10} = -\frac{iv}{\pi}, \\ \tilde{s}_{01} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{01} q^{1/4} = M \cos(2\pi U), \\ \tilde{s}_{11} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{11} q^{1/4} = -M \sin(2\pi U). \end{aligned} \quad (8)$$

Перенормированные координаты (8) образуют алгебру Ли, которая получается контракцией из алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$\{\tilde{s}_{10}, \tilde{s}_{11}\} = 2i\tilde{s}_{01}, \quad \{\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{01}\} = 0, \quad \{\tilde{s}_{01}, \tilde{s}_{10}\} = 2i\tilde{s}_{11}. \quad (9)$$

Симплектический лист задается выражением

$$\tilde{s}_{01}^2 + \tilde{s}_{11}^2 = \text{const} = M^2,$$

которое является пределом функции Казимира эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка

$$s_{01}^2 + s_{10}^2 + s_{11}^2 = \text{const} = m^2.$$

Формулы (8) определяют симплектическое отображение канонических координат (U, v) в координаты на симплектическом листе предельного волчка и будут далее называться формулами бозонизации.

Учитывая поведение функций $\varphi\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)$ (П.10) и $f\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)$ (П.11) (см. приложение Б) в рассматриваемом пределе, получаем пару Лакса и гамильтониан предельного волчка [1]:

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{\text{rot}} &= \lim_{q \rightarrow 0} L^{\text{rot}} = 4\pi \begin{pmatrix} \frac{i}{4}\tilde{s}_{10} & \tilde{s}_{01} \sin(\pi\tilde{z}) - \tilde{s}_{11} \cos(\pi\tilde{z}) \\ \tilde{s}_{01} \sin(\pi\tilde{z}) + \tilde{s}_{11} \cos(\pi\tilde{z}) & -\frac{i}{4}\tilde{s}_{10} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{M}^{\text{rot}} &= \lim_{q \rightarrow 0} M^{\text{rot}} = \pi^2 \begin{pmatrix} \tilde{s}_{10} & 4(\tilde{s}_{01} + i\tilde{s}_{11})e\left(-\frac{\tilde{z}}{2}\right) \\ 4(\tilde{s}_{01} - i\tilde{s}_{11})e\left(-\frac{\tilde{z}}{2}\right) & -\tilde{s}_{10} \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}^{\text{rot}} &= \lim_{q \rightarrow 0} H^{\text{rot}} = -\pi^2 \tilde{s}_{10}^2 + 8\pi^2 \tilde{s}_{01}^2 - 8\pi^2 \tilde{s}_{11}^2.\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что уравнения движения в пределе сохраняют форму Лакса:

$$\frac{d\tilde{L}^{\text{rot}}}{dt} = \{\tilde{H}^{\text{rot}}, \tilde{L}^{\text{rot}}\} = 2[\tilde{L}^{\text{rot}}, \widetilde{M}^{\text{rot}}].$$

Используя формулы бозонизации (8), можно получить периодическую цепочку Тоды [1].

2.2. Предельная система, эквивалентная неперидической цепочке Тоды. В случае неперидической цепочки Тоды будем использовать следующие параметры сдвига координат и перенормировки константы связи: $u = U + \tau/8$, $M = mq^{1/8}$. Сдвиг спектрального параметра остается тем же: $z = \tilde{z} + \tau/2$. Тригонометрический предел $q \rightarrow 0$ дает координаты предельного волчка:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{10} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{10} = -\frac{iv}{\pi}, \\ \tilde{s}_{01} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{01}q^{1/4} = \frac{1}{2}Me(U), \\ \tilde{s}_{11} &= \lim_{q \rightarrow 0} s_{11}q^{1/4} = \frac{i}{2}Me(U).\end{aligned}\tag{10}$$

Перенормированные координаты (10) образуют ту же алгебру (9), что и в периодическом случае, однако симплектический лист определяется другим выражением:

$$\tilde{s}_{01}^2 + \tilde{s}_{11}^2 = 0.$$

Пара Лакса и гамильтониан предельного волчка принимают вид [1]

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{\text{rot}} &= 4\pi \begin{pmatrix} \frac{i}{4}\tilde{s}_{10} & \tilde{s}_{01} \sin(\pi\tilde{z}) - \tilde{s}_{11} \cos(\pi\tilde{z}) \\ \tilde{s}_{01} \sin(\pi\tilde{z}) + \tilde{s}_{11} \cos(\pi\tilde{z}) & -\frac{i}{4}\tilde{s}_{10} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{M}^{\text{rot}} &= \pi^2 \begin{pmatrix} \tilde{s}_{10} & 4(\tilde{s}_{01} + i\tilde{s}_{11})e\left(-\frac{\tilde{z}}{2}\right) \\ 4(\tilde{s}_{01} - i\tilde{s}_{11})e\left(-\frac{\tilde{z}}{2}\right) & -\tilde{s}_{10} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\tilde{H}^{\text{rot}} = -\pi^2 \tilde{s}_{10}^2 + 8\pi^2 \tilde{s}_{01}^2 - 8\pi^2 \tilde{s}_{11}^2.$$

Формулы бозонизации (10) преобразуют предельный волчок в непериодическую цепочку Тоды [1].

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ $SL(N > 2, \mathbb{C})$ -ВОЛЧОК И ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Рассмотрим предел, являющийся комбинацией сдвига спектрального параметра $z = \tilde{z} + \tau/2$, скейлинга координат и тригонометрического предела $q \rightarrow 0$. При этом скейлинг координат определяется не симплектическим отображением фазовых пространств (6), как в случае $N = 2$, а поведением матрицы Лакса системы эллиптического волчка в описанном пределе.

3.1. Предельная система, эквивалентная периодической цепочке Тоды.

Поведение матрицы Лакса эллиптического волчка в описанном пределе определяется разложением в ряд по q функции $\varphi\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)$ (см. приложение Б). Учитывая это, используем следующую перенормировку координат:

$$s_{mn} = \tilde{s}_{mn} q^{-g(n)}, \quad g(n) = \frac{1 - \delta_{n0}}{2N}, \quad m, n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

которая дает тридиагональную матрицу Лакса предельной системы. Перенормированные координаты образуют в пределе алгебру Ли относительно скобок Пуассона [1]. Предельные матрицы Лакса и гамильтониан

$$\tilde{L}^{\text{rot}} = \lim_{q \rightarrow 0} L^{\text{rot}}, \quad \widetilde{M}^{\text{rot}} = \lim_{q \rightarrow 0} M^{\text{rot}}, \quad \tilde{H}^{\text{rot}} = \lim_{q \rightarrow 0} H^{\text{rot}}$$

удовлетворяют уравнению Лакса

$$\frac{d\tilde{L}^{\text{rot}}}{dt} = \{\tilde{H}^{\text{rot}}, \tilde{L}^{\text{rot}}\} = N[\tilde{L}^{\text{rot}}, \widetilde{M}^{\text{rot}}] \quad (11)$$

и не зависят от переменных $\tilde{s}_{mn}$, $1 < n < N-1$, $0 \leq m \leq N-1$. Поэтому гамильтоновы уравнения движения для этих переменных не описываются уравнением (11). Однако на симплектическом листе общего положения эти переменные являются функциями от переменных, входящих в матрицу Лакса [1].

Для координат предельной системы можно ввести формулы бозонизации. Для этого удобно перейти к стандартному базису с помощью формулы (П.2). В стандартном базисе формулы бозонизации для перенормированных координат $\tilde{S}_{ij}$ имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ii} &= \frac{N}{2\pi i} (v_{i-1} - v_i), \\ \tilde{S}_{i,i+1} &= M \text{Ne}(u_i), \\ \tilde{S}_{i+1,i} &= M \text{Ne}(-u_i), \\ \tilde{S}_{i,i+k} &= c_{i,i+k} e\left(\sum_{n=i}^{i+k-1} u_n\right), \quad 2 \leq k \leq N-2, \quad c_{i,i+k} = \text{const}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – канонические координаты:

$$\{v_i, u_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\},$$

и

$$\sum_{i=1}^N u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N v_i = 0.$$

Переменные $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ имеют динамику периодической цепочки Тоды в системе центра масс. С учетом (12) и калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{rot}} &\rightarrow g^{-1} \tilde{L}^{\text{rot}} g, & \widetilde{M}^{\text{rot}} &\rightarrow g^{-1} \widetilde{M}^{\text{rot}} g + \frac{1}{N} g^{-1} \dot{g}, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} e\left(\frac{i\tilde{z}}{N}\right) \prod_{k=1}^{i-1} e(-u_k) \end{aligned} \quad (13)$$

предельные матрицы Лакса и гамильтониан переходят в известные матрицы Лакса и гамильтониан периодической цепочки Тоды

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{rot}} &= 2\pi i M N \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{v_1}{2\pi i M} & e(u_2 - u_1) & 0 & \dots & 0 & -e(\tilde{z}) \\ -1 & \frac{v_2}{2\pi i M} & e(u_3 - u_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{v_3}{2\pi i M} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{v_{N-1}}{2\pi i M} & e(u_N - u_{N-1}) \\ e(u_1 - u_N - \tilde{z}) & 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{v_n}{2\pi i M} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{M}^{\text{rot}} &= 4\pi^2 M N \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & e(u_2 - u_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e(u_3 - u_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e(u_N - u_{N-1}) \\ e(u_1 - u_N - \tilde{z}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}^{\text{rot}} &= N^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{2} + 4\pi^2 M^2 N^2 \sum_{i=1}^N e(u_{i+1} - u_i) = N^2 H^{\text{PT}}. \end{aligned}$$

3.2. Предельная система, эквивалентная неперидической цепочке Тоды. Для получения матрицы Лакса неперидической цепочки Тоды необходимо рассмотреть перенормировку координат в стандартном базисе, отличную от предыдущего случая:

$$S_{ij} = \tilde{S}_{ij} q^{-\mathfrak{g}(i,j)}, \quad \mathfrak{g}(i,j) = \frac{1 - \delta_{ij} - \delta_{i1}\delta_{jN}/2}{2N}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Алгебра координат предельной системы в стандартном базисе имеет тот же предел, что и в периодическом случае, а предельные матрицы Лакса и гамильтониан удовлетворяют тому же матричному уравнению Лакса (11). Следующие переменные не входят в предельные матрицы Лакса и гамильтониан:

$$\{\tilde{S}_{ij}, \quad 1 < (j-i) \bmod N < N-1, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N\} \cup \{\tilde{S}_{1N}\}.$$

Гамильтоновы уравнения движения для этих переменных интегрируются после разрешения уравнения (11) [1].

Для переменных предельной системы можно ввести следующие формулы бозонизации [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ii} &= \frac{N}{2\pi i} (v_{i-1} - v_i), & i \in \{1, \dots, N\}, \\ \tilde{S}_{i,i+1} &= M \text{Ne}(u_i), & i \in \{1, \dots, N\}, \\ \tilde{S}_{i+1,i} &= M \text{Ne}(-u_i), & i \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \tilde{S}_{1,N} &= \text{const} \cdot e(-u_N), \\ \tilde{S}_{i,i+k} &= c_{i,i+k} e\left(\sum_{n=i}^{i+k-1} u_n\right), & 2 \leq k \leq N-2, \quad c_{i,i+k} = \text{const}. \end{aligned} \quad (14)$$

Канонические координаты $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ имеют динамику неперидической цепочки Тоды в системе центра масс. После подстановки (14) и калибровочного преобразования (13) предельные матрицы Лакса и гамильтониан принимают известную форму матриц Лакса и гамильтониана неперидической цепочки Тоды:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{rot}} &= 2\pi i M N \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{v_1}{2\pi i M} & e(u_2 - u_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \frac{v_2}{2\pi i M} & e(u_3 - u_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{v_3}{2\pi i M} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{v_{N-1}}{2\pi i M} & e(u_N - u_{N-1}) \\ e(u_1 - u_N - \tilde{z}) & 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{v_N}{2\pi i M} \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}^{\text{rot}} &= 4\pi^2 M N \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & e(u_2 - u_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e(u_3 - u_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e(u_N - u_{N-1}) \\ e(u_1 - u_N - \tilde{z}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}^{\text{rot}} &= N^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{2} + 4\pi^2 M^2 N^2 \sum_{i=1}^{N-1} e(u_{i+1} - u_i) = N^2 H^{\text{aT}}. \end{aligned}$$

4. НЕАВТОНОМНЫЕ $SL(2, \mathbb{C})$ -ВОЛЧОК И ЦЕПОЧКА ТОДЫ

Рассмотрим неавтономный $SL(2, \mathbb{C})$ -волчок, в котором роль времени играет параметр эллиптической кривой τ . Пара Лакса волчка удовлетворяет уравнению изо-мономных деформаций

$$\partial_\tau L^{\text{rot}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{rot}} = 2[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}], \quad (15)$$

которое эквивалентно уравнениям движения

$$\frac{ds_{mn}}{d\tau} = \{H^{\text{rot}}, s_{mn}\}.$$

Выше в автономном случае мы получили цепочку Тоды из эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка. Теперь нашей целью является получение неавтономной цепочки Тоды, уравнения движения которой в случае $N = 2$ эквивалентны частному случаю уравнения Пенлеве III. Для этого модифицируем предельную процедуру следующим образом.

Представим параметр эллиптической кривой τ в виде $\tau = \tau_1 + \tau_2$ и рассмотрим тригонометрический предел $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$, оставляя τ_1 в качестве времени. Таким образом,

$$\frac{ds_{mn}}{d\tau} = \frac{ds_{mn}}{d\tau_1}.$$

Как и в автономном случае, произведем сдвиг спектрального параметра $z = \tilde{z} + \tau/2$ и скейлинг координат

$$s_{mn} = \tilde{s}_{mn} q_2^{-g(n)},$$

или

$$s_{10} = \tilde{s}_{10}, \quad s_{01} = \tilde{s}_{01} q_2^{-1/4}, \quad s_{11} = \tilde{s}_{11} q_2^{-1/4},$$

где $q_2 \equiv e(\tau_2)$.

Поскольку в рассматриваемой предельной процедуре сдвиг спектрального параметра зависит от времени, уравнение (15) преобразуется к виду

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{rot}} - \partial_{\tilde{z}} \left(\frac{M^{\text{rot}}}{2\pi i} + \frac{1}{2} L^{\text{rot}} \right) = 2[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}],$$

где $L^{\text{rot}} = L^{\text{rot}}(\mathbf{s}, \tilde{z} + \tau/2, \tau)$, $M^{\text{rot}} = M^{\text{rot}}(\mathbf{s}, \tilde{z} + \tau/2, \tau)$.

Гамильтониан эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка записывается в виде (1):

$$H^{\text{rot}} = -J_{01} s_{01}^2 - J_{10} s_{10}^2 - J_{11} s_{11}^2.$$

В пределе $q_2 \rightarrow 0$

$$J_{10} = \pi^2 + o(1), \quad J_{01} = -8\pi^2 q^{1/2} + o(q_2^{1/2}), \quad J_{11} = 8\pi^2 q^{1/2} + o(q_2^{1/2}),$$

где $q \equiv e(\tau)$. Тогда для гамильтониана имеем

$$\tilde{H}^{\text{rot}} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} H^{\text{rot}} = -\pi^2 s_{10}^2 - 8\pi^2 q_1^{1/2} (\tilde{s}_{11}^2 - \tilde{s}_{01}^2),$$

где $q_1 \equiv e(\tau_1)$.

Предельная алгебра получается контракцией из алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$\{\tilde{s}_{10}, \tilde{s}_{11}\} = 2i\tilde{s}_{01}, \quad \{\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{01}\} = 0, \quad \{\tilde{s}_{01}, \tilde{s}_{10}\} = 2i\tilde{s}_{11}.$$

Уравнения движения в пределе сохраняют свою форму

$$\frac{d\tilde{s}_{mn}}{d\tau_1} = \{\tilde{H}^{\text{rot}}, \tilde{s}_{mn}\}$$

и эквивалентны уравнению изомонодромных деформаций

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L}^{\text{rot}} - \partial_{\tilde{z}} \widetilde{M}^{\text{rot}} = [\tilde{L}^{\text{rot}}, \widetilde{M}^{\text{rot}}], \quad (16)$$

где

$$\tilde{L}^{\text{rot}} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} 4\pi i L^{\text{rot}}, \quad \widetilde{M}^{\text{rot}} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} (2M^{\text{rot}} + 2\pi i L^{\text{rot}}).$$

Как и в автономном случае, алгебра допускает бозонизацию:

$$\tilde{s}_{10} = -\frac{iv}{\pi}, \quad \tilde{s}_{01} = M \cos(2\pi U), \quad \tilde{s}_{11} = -M \sin(2\pi U).$$

После этого пара Лакса приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{rot}} &= \begin{pmatrix} 4\pi v & 16iM\pi^2 \sin(\pi(2U + \tilde{z}))q_1^{1/4} \\ -16iM\pi^2 \sin(\pi(2U - \tilde{z}))q_1^{1/4} & -4\pi v \end{pmatrix}, \\ \widetilde{M}^{\text{rot}} &= \begin{pmatrix} 0 & 8M\pi^2 \cos(\pi(2U + \tilde{z}))q_1^{1/4} \\ 8M\pi^2 \cos(\pi(2U - \tilde{z}))q_1^{1/4} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Запишем гамильтониан

$$\tilde{H}^{\text{rot}} = v^2 + 8M^2\pi^2 e\left(\frac{\tau_1}{2}\right) \cos(4\pi U)$$

и уравнения движения предельной системы в переменных U и v

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau_1} &= 32M^2\pi^3 e\left(\frac{\tau_1}{2}\right) \sin(4\pi U), \\ \frac{dU}{d\tau_1} &= 2v. \end{aligned} \quad (17)$$

Покажем, что уравнения (17) эквивалентны частному случаю уравнения Пенлеве III. Для этого выполним замену переменной $32iM\pi e(\tau_1/4) = t$ и представим систему (17) одним дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{1}{t} \frac{d}{dt} t \frac{d(4\pi U)}{dt} = \sin(4\pi U).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущей работе [1] с помощью предельной процедуры, близкой к пределу Иноземцева, из эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка были получены системы, эквивалентные цепочкам Тоды. В настоящей работе дано обобщение предложенной ранее процедуры на неавтономные $SL(2, \mathbb{C})$ -волчок и цепочку Тоды. То, что неавтономные $SL(2, \mathbb{C})$ -волчок и цепочка Тоды связаны некоторым пределом Иноземцева, было известно ранее [16]. Однако в настоящей работе показано, что неавтономную цепочку Тоды из неавтономного $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка можно получить вместе с линейной задачей, а именно предложенный предел матриц Лакса эллиптического $SL(2, \mathbb{C})$ -волчка дает возможность записать уравнения движения неавтономной цепочки Тоды в форме уравнения изомонодромных деформаций. Аналогичный результат можно получить и для неавтономного $SL(N > 2, \mathbb{C})$ -волчка, но уравнения движения таких неавтономных систем не будут напрямую связаны с уравнениями Пенлеве.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена предельная связь линейных задач для частных случаев уравнений Пенлеве VI и Пенлеве III. Естественным продолжением задачи будет описание предельной связи линейных задач для уравнений Пенлеве VI и Пенлеве III общего вида.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Синус-алгебра

Для упрощения формул будем использовать знак $\vee$ в качестве логического “или”, а также следующее обозначение:

$$\tilde{\delta}(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Элементы T_{mn} базиса в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, который порождает синус-алгебру, можно определить так:

$$(T_{mn})_{ij} = e\left(\frac{mn}{2N}\right) e\left(\frac{im}{N}\right) \tilde{\delta}(j - i - n), \quad (m \neq 0) \vee (n \neq 0),$$

$$m, n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

При $m, n \in \mathbb{Z}$, $(m \not\equiv 0 \pmod{N}) \vee (n \not\equiv 0 \pmod{N})$, для элементов базиса синус-алгебры и координат в этом базисе выполняются свойства квазипериодичности:

$$T_{mn} = e\left(\frac{mn - (m \bmod N)(n \bmod N)}{2N}\right) T_{m \bmod N, n \bmod N},$$

$$s_{mn} = e\left(\frac{(m \bmod N)(n \bmod N) - mn}{2N}\right) s_{m \bmod N, n \bmod N},$$

где $e((mn - (m \bmod N)(n \bmod N))/(2N)) = \pm 1$.

Коммутационные соотношения имеют вид

$$[T_{mn}, T_{kl}] = 2i \sin\left[\frac{\pi}{N}(kn - ml)\right] T_{m+k, n+l}. \quad (\text{П.1})$$

Между координатами $\{S_{ij}\}$ в стандартном базисе и координатами $\{s_{mn}\}$ в базисе синус-алгебры существует следующая связь:

$$S_{ij} = \sum_{m,n} s_{mn} (T_{mn})_{ij}, \quad s_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} S_{ij} (T_{-m,n})_{ij}. \quad (\text{П.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вырождения эллиптических функций

Определения и свойства эллиптических функций в основном заимствованы из монографий [19] и [26]. Основным объектом является тета-функция с характеристиками:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{(j+a)^2/2} e((j+a)(z+b)).$$

Нам также понадобятся функции Эйзенштейна:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(z) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M (z+n)^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ E_k(z) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M \varepsilon_k(z+n\tau). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Для взятия пределов от матриц Лакса используются разложения в ряд следующих функций:

$$\vartheta(z) = \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{(j+1/2)^2/2} e\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (\text{П.4})$$

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad (\text{П.5})$$

$$\varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e\left(-\frac{nz}{N}\right) \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, z\right), \quad (\text{П.6})$$

$$f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e\left(-\frac{nz}{N}\right) \partial_u \phi(u, z)|_{u=(m+n\tau)/N}. \quad (\text{П.7})$$

Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \phi(u, z)\phi(-u, z) &= E_2(z) - E_2(u), \\ \partial_u \phi(u, z) &= \phi(u, z)(E_1(u+z) - E_1(u)) \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

и обладают свойствами четности

$$\begin{aligned} E_k(-z) &= (-1)^k E_k(z), \quad \vartheta(-z) = -\vartheta(z), \\ \phi(u, z) &= \phi(z, u) = -\phi(-u, -z) \end{aligned}$$

и квазипериодичности

$$\begin{aligned} E_1(z+1) &= E_1(z), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \\ E_2(z+1) &= E_2(z), \quad E_2(z+\tau) = E_2(z), \\ \vartheta(z+1) &= -\vartheta(z), \quad \vartheta(z+\tau) = -q^{-1/2} e(-z) \vartheta(z), \\ \phi(u+1, z) &= \phi(u, z), \quad \phi(u+\tau, z) = e(-z) \phi(u, z). \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Положим $z = \tilde{z} + \tau/2$ и исследуем вырождения эллиптических функций (II.6), (II.7) в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$. С учетом (II.5) разложение в ряд функции $\varphi\left[\frac{m}{n}\right](z)$ сводится к разложению в ряд тета-функции. Рассматривая главный ненулевой член в разложениях, получим

$$\vartheta\left(-\frac{m}{N} - \frac{n}{N}\tau\right) = \begin{cases} 2q^{1/8} \sin\left(\pi \frac{m}{N}\right) + o(q^{1/8}), & n = 0, \\ iq^{1/8-n/(2N)} e\left(-\frac{m}{2N}\right) + o(q^{1/8-n/(2N)}), & 0 < n < N, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vartheta\left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} - \frac{m}{N} - \frac{n}{N}\tau\right) = \\ = \begin{cases} -iq^{n/(2N)-1/8} e\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{N} - \tilde{z}\right)\right) + o(q^{n/(2N)-1/8}), & 0 \leq n < \frac{N}{2}, \\ -2q^{1/8} \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) + o(q^{1/8}), & n = \frac{N}{2}, \\ iq^{3/8-n/(2N)} e\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) + o(q^{3/8-n/(2N)}), & \frac{N}{2} < n < N, \end{cases} \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, \tilde{z} + \frac{\tau}{2}\right) = \\ = \begin{cases} -\pi e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin^{-1}\left(\pi \frac{m}{N}\right) + o(1), & n = 0, \\ 2\pi iq^{n/N} e\left(\frac{m}{N}\right) + o(q^{n/N}), & 0 < n < \frac{N}{2}, \\ 4\pi q^{1/2} \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right) e\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{N} + \tilde{z}\right)\right)\right) + o(q^{1/2}), & n = \frac{N}{2}, \\ -2\pi iq^{1/2} e(\tilde{z}) + o(q^{1/2}), & \frac{N}{2} < n < N, \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left[\frac{m}{n}\right]\left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2}\right) = \\ = \begin{cases} -\pi e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin^{-1}\left(\pi \frac{m}{N}\right) + o(1), & n = 0, \\ 2\pi iq^{n/(2N)} e\left(\frac{m}{N} - \frac{n\tilde{z}}{N}\right) + o(q^{n/(2N)}), & 0 < n < \frac{N}{2}, \\ 4\pi q^{1/4} e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) + o(q^{1/4}), & n = \frac{N}{2}, \\ -2\pi iq^{(N-n)/(2N)} e\left(\frac{N-n}{N}\tilde{z}\right) + o(q^{(N-n)/(2N)}), & \frac{N}{2} < n < N. \end{cases} \quad (\text{II.10}) \end{aligned}$$

Чтобы найти предел функции $f\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right]$, разложим функцию $E_1(\tilde{x} - \sigma\tau)$ в ряд по q . Учитывая (П.3), получим

$$\begin{aligned} E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M \varepsilon_1(\tilde{x} + (n - \sigma)\tau) = \varepsilon_1(\tilde{x} - \sigma\tau) + \\ &+ \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^M (\varepsilon_1(\tilde{x} + (n - \sigma)\tau) + \varepsilon_1(\tilde{x} - (n + \sigma)\tau)). \end{aligned}$$

Используя явное выражение для функции $\varepsilon_1(x)$ [19]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \\ &= \pi i \frac{e(x) + 1}{e(x) - 1} = \pi i \times \begin{cases} -1 - 2e(x) + o(e(x)), & \operatorname{Im} x \rightarrow +\infty, \\ 1 + 2e(x) + o(e(x)), & \operatorname{Im} x \rightarrow -\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

можно получить следующий результат для главного члена в разложении функции $E_1(\tilde{x} - \sigma\tau)$:

$$E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) = \begin{cases} \pi \operatorname{ctg}(\pi \tilde{x}) + o(1), & \sigma = 0, \\ \pi i + 2\pi i q^\sigma e(-\tilde{x}) + o(q^\sigma), & 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \\ \pi i + 2\pi i q^{1/2} (e(-\tilde{x}) - e(\tilde{x})) + o(q^{1/2}), & \sigma = \frac{1}{2}, \\ \pi i - 2\pi i q^{1-\sigma} e(\tilde{x}) + o(q^{1-\sigma}), & \frac{1}{2} < \sigma < 1, \end{cases}$$

а с помощью (П.9) и обобщение последней формулы на случай $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) = \begin{cases} 2\pi i[\sigma] + \pi \operatorname{ctg}(\pi \tilde{x}) + o(1), & \{\sigma\} = 0, \\ 2\pi i[\sigma] + \pi i + 2\pi i q^{\{\sigma\}} e(-\tilde{x}) + o(q^{\{\sigma\}}), & 0 < \{\sigma\} < \frac{1}{2}, \\ 2\pi i[\sigma] + \pi i + 2\pi i q^{1/2} (e(-\tilde{x}) - e(\tilde{x})) + o(q^{1/2}), & \{\sigma\} = \frac{1}{2}, \\ 2\pi i[\sigma] + \pi i - 2\pi i q^{1-\{\sigma\}} e(\tilde{x}) + o(q^{1-\{\sigma\}}), & \frac{1}{2} < \{\sigma\} < 1, \end{cases}$$

где $\{\sigma\}$ – дробная часть числа σ .

Теперь рассмотрим разложение функции $\partial_u \phi(u, z)|_{u=\tilde{u}-\sigma\tau}$ в пределе $\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty$ с учетом формулы (П.8). Положив $z = \tilde{z} + \tau/2$ и рассматривая все возможные значения σ , найдем

$$\partial_u \phi(u, z)|_{u=\tilde{u}-\sigma\tau} = \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2} \pi \tilde{u} + o(1), & \sigma = 0, \\ 4\pi^2 q e(-\tilde{u}) + o(q), & 0 < \sigma < \frac{3}{4}, \\ 4\pi^2 q^{3/4} [e(-\tilde{u}) - e(\tilde{u} + \tilde{z})] + o(q^{3/4}), & \sigma = \frac{3}{4}, \\ -4\pi^2 q^{3/2-\sigma} e(\tilde{u} + \tilde{z}) + o(q^{3/2-\sigma}), & \frac{3}{4} < \sigma < 1. \end{cases}$$

С помощью (II.7) окончательно получаем

$$f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} \right) = \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2} \left(\pi \frac{m}{N} \right) + o(1), & n = 0, \\ 4\pi^2 e \left(\frac{m}{N} \right) e \left(-\frac{n\tilde{z}}{N} \right) q^{n/(2N)} + o(q^{n/(2N)}), & 0 < n < \frac{3N}{4}, \\ 4\pi^2 \left[e \left(\frac{m}{N} \right) - e \left(-\frac{n}{N} + \tilde{z} \right) \right] e \left(-\frac{3}{4}\tilde{z} \right) q^{3/8} + o(q^{3/8}), & n = \frac{3N}{4}, \\ -4\pi^2 e \left(-\frac{m}{N} + \tilde{z} \right) e \left(-\frac{n\tilde{z}}{N} \right) q^{3(1-n/N)/2} + o(q^{3(1-n/N)/2}), & \frac{3N}{4} < n < N. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Благодарности. Автор благодарит А. М. Левина за многочисленные обсуждения и А. Смирнова за полезные замечания. Особую благодарность автор выражает М. А. Олшанецкому и А. В. Зотову за постановку задачи и ценные обсуждения, а также С. Артамонову за плодотворную совместную работу. Автор благодарен организационному комитету семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS–2011), на которой докладывались изложенные в настоящей работе результаты. Работа была поддержана РФФИ (гранты № 09-02-00-393, 09-01-92437-КЭ), Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 14.740.11.0347) и грантом Президента РФ МК-1646.2011.1.

Список литературы

- [1] G. Aminov, S. Arthamonov, *J. Phys. A*, **44**:7 (2011), 075201, 34 pp.
- [2] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31.
- [3] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:2 (1976), 75–76.
- [4] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 28–41.
- [5] V. I. Inozemtsev, *Commun. Math. Phys.*, **121**:4 (1989), 629–638.
- [6] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133.
- [7] А. В. Зотов, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 258–277.
- [8] А. В. Смирнов, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 355–369.
- [9] K. Takasaki, *Lett. Math. Phys.*, **44**:2 (1998), 143–156.
- [10] Yu. Chernyakov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A*, **39**:39 (2006), 12083–12101.
- [11] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, “Hierarchies of isomonodromic deformations and Hitchin systems”, *Moscow Seminar in Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **191**(43), eds. A. Yu. Morozov et al., AMS, Providence, RI, 1999, 223–262.
- [12] K. Okamoto, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **146** (1987), 337–381.
- [13] M. Jimbo, T. Miwa, *Physica D*, **2**:3 (1981), 407–448.
- [14] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **268**:1 (2006), 67–103, arXiv: math/0508058.
- [15] A. Zotov, *Lett. Math. Phys.*, **67**:2 (2004), 153–165, arXiv: hep-th/0310260.
- [16] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **42**:3 (2001), 1443–1473, arXiv: math/0004118.

- [17] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé Transcendents: The Riemann–Hilbert Approach*, Mathematical Surveys and Monographs, **128**, AMS, Providence, RI, 2006.
- [18] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [19] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.
- [20] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **150**, 1986, 104–118.
- [21] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **12**:3 (1971), 419–436.
- [22] J. Moser, *Adv. Math.*, **16**:2 (1975), 197–220.
- [23] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555.
- [24] H. Flashka, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1924–1925.
- [25] H. Flashka, *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [26] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.