Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Артамонов, Новые интегрируемые системы как предел эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 196–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:45:05

© 2012 г.

С. Б. Артамонов^{*†}

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КАК ПРЕДЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО $SL(N, \mathbb{C})$ -ВОЛЧКА

Рассмотрен скейлинговый предел эллиптического волчка. Этот предел является комбинацией скейлинга переменных эллиптического волчка, бесконечного сдвига спектрального параметра и тригонометрического предела. Приведены общие необходимые ограничения на скейлинги переменных и примеры такого вырождения. Определенный подкласс предельных систем интегрируем в смысле Лиувилля, что можно показать и непосредственно.

Ключевые слова: интегрируемые системы, предел Иноземцева, тест на интегрируемость, эллиптический волчок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемый в настоящей работе предел является обобщением предела Иноземцева в применении к эллиптическому $SL(N, \mathbb{C})$ -волчку. Предел Иноземцева – это процедура вырождения эллиптической системы Калоджеро–Мозера в цепочку Тоды [1]. Между тем в работе [2] было показано соответствие орбиты наименьшей размерности эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка и фазового пространства эллиптической системы Калоджеро–Мозера, что делает естественным перенос техники вырождения эллиптической системы Калоджеро–Мозера в цепочку Тоды на эллиптический волчок. Однако вырождение эллиптического волчка может привести к более широкому классу систем, если не ограничиваться орбитой наименьшей размерности. Определенные способы вырождения эллиптического волчка приводят к системам, интегрируемость которых была доказана непосредственно [3]. В настоящей работе мы даем более изящное описание этих систем на языке системы корней исходной алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ и показываем, что частные случаи такого вырождения, соответствующие предельным переходам к периодической и непериодической цепочкам Тоды, естественным образом связаны с пределом Иноземцева системы Калоджеро–Мозера для системы корней алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$.

Рассматриваемый предел приводит к контракции исходной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ относительно скобок Пуассона. В примерах, приведенных в разделе 4, предельная

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия.

E-mail: artamonov@itep.ru

алгебра получается разрешимой. Чтобы показать интегрируемость предельных систем, необходимо найти размерность фазового пространства. Один из способов сделать это – оценить сверху степень вырождения тензора Пуассона и указать необходимый набор независимых функций Казимира. Для определенного подкласса систем, рассмотренных в разделе 4, удастся непосредственно найти размерность фазового пространства и привести достаточное число независимых гамильтонианов, таким образом показав интегрируемость предельных систем в смысле Лиувилля.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ВОЛЧОК

Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является примером волчка Эйлера–Арнольда [4]. Он задан на орбите коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$

$$\mathcal{R}^{\text{rot}} = \{\mathbf{S} \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}), \quad \mathbf{S} = g^{-1} \mathbf{S}^{(0)} g\},$$

где $\mathbf{S}^{(0)} \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ – элемент, задающий орбиту, а $g \in SL(N, \mathbb{C})$ определен с точностью до умножения слева на элемент стационарной подгруппы G_0 элемента $\mathbf{S}^{(0)}$. На фазовом пространстве $\mathcal{R}^{\text{rot}}$ задана симплектическая форма Кириллова–Костанта

$$\omega^{\text{rot}} = \text{Tr}\{\mathbf{S}^{(0)}(dg)g^{-1} \wedge (dg)g^{-1}\}.$$

Гамильтониан определяется как квадратичная форма оператора J , обратного к тензору инерции:

$$H^{\text{rot}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{S} J(\mathbf{S}).$$

Далее будет рассмотрен специальный оператор J , который обеспечит нам интегрируемость системы. В базисе синус-алгебры в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}) \ni \mathbf{S}$ (см. приложение А) он приводится к диагональному виду:

$$J(\mathbf{S}) = \sum_{m,n} J_{mn} s_{mn} T_{mn}, \quad J_{mn} = E_2\left(\frac{m+n\tau}{N}, \tau\right),$$

где $m, n \in \{0, \dots, N-1\}$, $m^2 + n^2 \neq 0$. Здесь $E_2(z, \tau)$ – вторая функция Эйзенштейна [5], определенная на комплексном торе $T^2: \mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$ с полупериодами $\omega_1 = 1/2$ и $\tau = \omega_2/\omega_1$, а s_{mn} – координаты $\mathbf{S}$ в базисе синус-алгебры $\{T_{mn}\}$.

Гамильтоновы уравнения движения эллиптического волчка могут быть представлены в форме Лакса [6]:

$$\frac{dL^{\text{rot}}}{dt} = \{H^{\text{rot}}, L^{\text{rot}}\} = N[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}], \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L^{\text{rot}} &= \sum_{m,n} s_{mn} \varphi\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right](z) T_{mn}, & \varphi\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right](z) &= e\left(-\frac{nz}{N}\right) \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, z\right), \\ M^{\text{rot}} &= \sum_{m,n} s_{mn} f\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right](z) T_{mn}, & f\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right](z) &= e\left(-\frac{nz}{N}\right) \partial_u \phi(u, z)|_{u=-(m+n)/N}, \end{aligned}$$

$e(z) \equiv e^{2\pi iz}$, а ϕ – комбинация тета-функций (см. формулу (Б.1) в приложении Б). Множитель N вынесен из второй матрицы Лакса M^{rot} для удобства сравнения

с работами, в которых используется другая нормировка базисных элементов T_{mn} синус-алгебры. Матрица Лакса квазипериодична по спектральному параметру:

$$L^{\text{rot}}(z+1) = T_{10} L^{\text{rot}}(z) T_{10}^{-1}, \quad L^{\text{rot}}(z+\tau) = T_{01} L^{\text{rot}}(z) T_{01}^{-1}. \quad (2)$$

Таким образом, $\text{Tr}(L^{\text{rot}}(z))^k$ – двоякопериодические функции с полюсом порядка не выше k , следовательно, они могут быть разложены по базису двоякопериодических функций на торе, составленному, например, из второй функции Эйзенштейна и ее производных:

$$\text{Tr}(L^{\text{rot}}(z))^k = H_{k,0} + E_2(z)H_{k,2} + E_2'(z)H_{k,3} + \dots + E_2^{(k-2)}(z)H_{k,k}. \quad (3)$$

Среди коэффициентов разложения присутствует и квадратичный гамильтониан

$$H^{\text{rot}} = \frac{1}{2} H_{2,0} = \frac{1}{2} \text{Tr}(L^{\text{rot}})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} S^2 E_2(z, \tau).$$

Скобка Пуассона в базисе синус-алгебры имеет следующий вид:

$$\{s_{ab}, s_{cd}\} = 2i \sin\left(\frac{\pi}{N}(bc - ad)\right) s_{a+c, b+d}. \quad (4)$$

Используя формулы перехода (A.2) (см. приложение A), из соотношения (4) можно получить скобку Пуассона для компонент S_{ij} в матричной записи **S**:

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = N(S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj}). \quad (5)$$

Из компонент S_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, N\}$, можно выбрать координаты в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, исключив любой из диагональных элементов с помощью соотношения $\sum_{i=1}^N S_{ii} = 0$. В дальнейшем будем называть S_{ij} координатами в стандартном базисе в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, подразумевая, что один из диагональных элементов является не самостоятельной координатой, а просто обозначением, например $S_{NN} = -\sum_{i=1}^{N-1} S_{ii}$.

Линейные скобки (4), (5) можно записать в терминах эллиптической r -матрицы Белавина–Дринфельда $r(z)$ [7]–[9]:

$$\{L_1^{\text{rot}}(z_1), L_2^{\text{rot}}(z_2)\} = [r(z_1 - z_2), L_1^{\text{rot}}(z_1) + L_2^{\text{rot}}(z_2)],$$

где $L_1(z) = L(z) \otimes \text{Id}$, $L_2(z) = \text{Id} \otimes L(z)$. Сама классическая r -матрица определяется следующим образом:

$$r(z) = - \sum_{m,n} \varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) T_{mn} \otimes T_{-m, -n}.$$

3. СКЕЙЛИНГОВЫЙ ПРЕДЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Переход к пределу состоит в скейлинге переменных эллиптического волчка, бесконечном сдвиге спектрального параметра $z = \tilde{z} + \tau/2$ и взятии тригонометрического предела $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$. Для координат эллиптического волчка в стандартном базисе возможны разные варианты скейлинга:

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij} q^{\mathfrak{g}(i,j)}, \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (6)$$

Рассмотрим ограничения, налагаемые на функцию $\mathfrak{g}(i, j)$ требованием сходимости матрицы Лакса и структурных констант алгебры Ли скобок Пуассона.

3.1. Сходимость матриц Лакса. Используя определения матриц Лакса (1) и разложения (Б.3) (см. приложение Б), мы получаем, что для сходимости матриц Лакса необходимо выполнение условия $s_{mn} = O(q^{-\min\{n \bmod N, (-n) \bmod N\}/2N})$. Переход от координат в базисе синус-алгебры к координатам в стандартном базисе осуществляется с помощью формул (А.2) из приложения А.

Отвлекаясь от громоздких формул, мы можем дать координатам в базисе синус-алгебры очень простую интерпретацию. Пусть E_{ij} – матрица, в которой единица стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца, а остальные элементы нулевые. Зафиксируем базис в подалгебре Картана $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ обычным образом:

$$\mathfrak{h} = \mathcal{L}(\{h_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}, 1 \leq i < N\});$$

здесь и далее под $\mathcal{L}(X)$ мы будем понимать линейную оболочку множества X . В качестве простых корней выберем естественный набор

$$\Delta_+ = \{e_i = E_{i, i+1}, 1 \leq i < N\}. \quad (7)$$

На основании формул (А.2) заключаем, что элемент s_{ab} является линейной комбинацией координат, соответствующих корням $\alpha \in \Phi$, $\text{ht } \alpha \equiv b \bmod N$, где Φ – решетка корней алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$. Далее, принимая во внимание (А.1), видим, что индексу a в s_{ab} соответствует номер гармоники в фурье-разложении по указанным элементам. Таким образом, получаем следующее необходимое условие существования предела матриц Лакса L^{rot} и M^{rot}

$$\mathfrak{g}(i, j) \leq \frac{1}{2N} \min\{(i - j) \bmod N, (j - i) \bmod N\}, \quad (8)$$

где ограничение на $\mathfrak{g}(i, j)$ зависит только от разности $i - j$.

3.2. Сходимость структурных констант. Рассмотрим преобразование структурных констант алгебры Ли скобки Пуассона (5) при подстановке (6):

$$S_{ij} = \tilde{S}_{ij} q^{-\mathfrak{g}(i, j)},$$

откуда для скобок новых переменных получаем

$$\{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{kl}\} = Nq^{\mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(k, i)} (\delta_{il} \tilde{S}_{kj} q^{-\mathfrak{g}(k, j)} - \delta_{kj} \tilde{S}_{il} q^{-\mathfrak{g}(i, l)}). \quad (9)$$

Структурные константы сходятся при $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ или, что то же самое, при $q \rightarrow 0$, если при всех i, j, k , кроме $i = j = k$,

$$\mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(k, i) - \mathfrak{g}(k, j) \geq 0; \quad (10)$$

ниже будет показано, что при условии сходимости матрицы Лакса неравенство (10) выполнено и для $i = j = k$. Легко видеть, что случаю равенства в (10) соответствует не исчезающая в пределе структурная константа алгебры Ли $C_{(i, j), (k, i)}^{(k, j)}$, все остальные константы в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю. Сразу же можно заметить, что скейлинги, сохраняющие все структурные константы описанного вида, являются просто диагональными зависящими от q калибровками. Предположим, что в (10) достигается равенство, тогда:

1) если $N > 1$, то $\mathfrak{g}(i, i) = 0$;

2) имеют место равенства $\mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(j, i) = 0$ и $\mathfrak{g}(i, j) = \text{sign}(j - i) \sum_{k=i}^{j-1} \mathfrak{g}(k, k+1)$.

Из последнего соотношения непосредственно следует, что новые переменные $\tilde{S}_{ij}$ представляют собой результат калибровки S_{ij} с помощью матрицы

$$Q = \text{diag}\{q^{\sum_{k=1}^i \mathfrak{g}(k, k+1)}, 1 \leq i < N\},$$

исключение составляет лишь тривиальный случай $N = 1$. В случаях, когда не все константы сохраняются, описанная процедура называется контракцией алгебры.

3.3. Анализ способов вырождения. Наложив оба условия сходимости, рассмотрим некоторые свойства получаемых предельных систем. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \left\{ \tilde{S}_{ij} : \mathfrak{g}(i, j) < \frac{1}{2N} \min\{(i - j) \bmod N, (j - i) \bmod N\} \right\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \left\{ \tilde{S}_{ij} : \mathfrak{g}(i, j) = \min\{(i - j) \bmod N, (j - i) \bmod N\} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переменные $\mathcal{S}_2$ входят в матрицы Лакса, а значит, и предельные уравнения движения для них могут быть представлены в форме Лакса.

Из (10) получаем, что если $N > 1$, то $\mathfrak{g}(i, i) \geq 0$; из (8) вытекает неравенство $\mathfrak{g}(i, i) \leq 0$; объединяя два последних утверждения, заключаем, что с необходимостью неравенство $N > 1$ влечет $\mathfrak{g}(i, i) = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. После взятия предела $q \rightarrow 0$ мы получаем, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$ – подалгебра относительно скобки Пуассона.

Данного утверждения достаточно для замкнутости подсистемы, зависящей от переменных из множества $\mathcal{S}_2$. Однако его можно еще усилить, поскольку в $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$ есть две подалгебры $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^-)$ такие, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+ \cup \mathcal{S}_2^-) = \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$, где

$$\mathcal{S}_2^+ = \left\{ \tilde{S}_{ij} : \mathfrak{g}(i, j) = \frac{(j - i) \bmod N}{2N} \right\}, \quad \mathcal{S}_2^- = \left\{ \tilde{S}_{ij} : \mathfrak{g}(i, j) = \frac{(i - j) \bmod N}{2N} \right\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В пределе $q \rightarrow 0$ мы получаем, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^\pm)$ – подалгебры относительно скобки Пуассона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение только для $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$, рассуждения для $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^-)$ будут аналогичными. Пусть $\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk} \in \mathcal{S}_2^+$. Заметим, что в случае, когда у переменных нет одинаковых индексов, скобка между ними заведомо равна нулю, значит, мы не ограничили общность рассуждений. Далее, если

$$(j - i) \bmod N \leq N/2, \quad (k - i) \bmod N \leq N/2,$$

то $0 \leq (j - i) \bmod N + (k - j) \bmod N \leq N$.

Если

$$(j - i) \bmod N + (k - j) \bmod N = N,$$

то $(k - i) \equiv 0 \bmod N$, следовательно, $k = i$, поскольку $k, i \in \{1, \dots, N\}$. Таким образом, $\mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(j, i) > 0 = \mathfrak{g}(i, i) = \mathfrak{g}(j, j)$, отсюда $\{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk}\} = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$.

Если

$$(j - i) \bmod N + (k - j) \bmod N = 0,$$

то $j \equiv i \equiv k \bmod N$, следовательно, $i = j = k$, поскольку $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$. Таким образом, $\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk} \in \mathfrak{h}$, откуда $\{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk}\} = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$.

Если

$$0 < (j - i) \bmod N + (k - j) \bmod N < N,$$

то $(j - i) \bmod N + (k - j) \bmod N = (k - i) \bmod N$. Из неравенства (8) следует, что $\mathfrak{g}(i, k) \leq ((k - i) \bmod N)/(2N)$. Рассмотрим два случая: если

$$\mathfrak{g}(i, k) < \frac{(k - i) \bmod N}{2N} = \mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(j, k),$$

то $\{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk}\} = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$; если

$$\mathfrak{g}(i, k) = \frac{(k - i) \bmod N}{2N} = \mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(j, k),$$

то $\{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{jk}\} = -N\tilde{S}_{ik} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)/\mathfrak{h}$ коммутирует с $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^-)/\mathfrak{h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{S}_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)/\mathfrak{h}$ и $S_{jk} \in \mathcal{S}_2^-/\mathfrak{h}$, тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(i, k) &= \frac{1}{2N} \min\{(i - k) \bmod N, (k - i) \bmod N\} < \\ &< \frac{1}{2N} \max\{(j - i) \bmod N, (j - k) \bmod N\} < \mathfrak{g}(i, j) + \mathfrak{g}(j, k). \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Подалгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$ разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим элементы производного ряда подалгебры $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$ через $G^{(i)}$, имеем $G^{(0)} = \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. Из утверждения 3 получаем, что $G^{(1)} \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}_2)/\mathfrak{h}$. Теперь по индукции покажем, что

$$G^{(i)} = \mathcal{L}(\{\tilde{S}_{ij} : \tilde{S}_{ij} \in \mathcal{S}_2, ((j - i) \bmod N) \in \{2^{i-1}, \dots, N - 2^{i-1}\}\}). \quad (12)$$

Для $G^{(1)}$ база очевидна. Чтобы показать индукционный переход, вспомним, что $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2^+ \cup \mathcal{S}_2^-$. Учитывая утверждение 3, получаем, что для $i \geq 1$

$$G^{(i)} = (G^{(i)} \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)) + (G^{(i)} \cap \mathcal{L}(\mathcal{S}_2^-))$$

(для $i \geq 2$ эта сумма всегда прямая), таким образом, достаточно показать, что утверждение верно для $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^\pm)$. Проведем рассуждения только для $\mathcal{S}_2^+$. Положим

$$G_+^{(i)} \equiv \mathcal{L}(\{\tilde{S}_{ij} : \tilde{S}_{ij} \in \mathcal{S}_2, ((j - i) \bmod N) \in \{2^{i-1}, \dots, \lfloor N/2 \rfloor\}\}), \quad (13)$$

здесь и далее $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x . Как следует из (9), все ненулевые структурные константы алгебры Ли скобок Пуассона, которые сохранились в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$, обязаны быть ненулевыми до взятия предела. Учитывая, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$ – подалгебра, получаем

$$[G_+^{(i)}, G_+^{(i)}] \subset G_+^{(i+1)},$$

где $G_+^{(i+1)}$ определяется по формуле (13). Рассуждения для $\mathcal{S}_2^-$ аналогичны. Учитывая соотношение $G^{(i)} = G_+^{(i)} + G_-^{(i)}$, получаем искомое утверждение (12).

4. ПРИМЕРЫ ВЫРОЖДЕНИЯ

Теперь приведем примеры вырождения эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка. Для этого рассмотрим скейлинги переменных, зависящие только от высоты корня в выбранном нами базисе (7):

$$\tilde{S}_{ij} = q^{\mathfrak{g}(j-i)} S_{ij}. \quad (14)$$

Такой способ был предложен в работе [3], здесь мы приведем основные результаты как иллюстрацию утверждений 1–4. Переход к базису синус-алгебры не перемешивает корни с разной высотой, следовательно, соотношение (14) позволяет записать скейлинги в базисе синус-алгебры

$$s_{mn} = \tilde{s}_{mn} q^{-g(n)}, \quad m, n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

Мы будем рассматривать следующие возможности для $g(n)$, которые параметризованы целым числом p , $1 \leq p < N/2$:

$$g(i) = \begin{cases} \frac{k}{2N}, & 0 \leq k \leq p < N/2, \\ \frac{p}{2N}, & p < k < N-p, \\ \frac{N-k}{2N}, & N-p \leq k < N, \end{cases} \quad (15)$$

где $k \equiv i \pmod{N}$, $0 \leq k \leq N$. Неравенство (10) переходит при этом в неравенство $g(k) + g(n) - g(k+n) \geq 0$, в справедливости которого при любых k, n легко убедиться непосредственно.

4.1. Предел матрицы Лакса. Для всех p функция $\mathfrak{g}(i, j) = g(j-i)$, заданная в (15), удовлетворяет неравенству (8). В пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ в матрице Лакса L^{rot} обращаются в ноль элементы, соответствующие следующим координатам:

$$\mathcal{S}_2 = \{\tilde{S}_{ij} : ((j-i) \pmod{N}) \equiv \{p+1, \dots, N-p-1\}\},$$

если указанное множество не пусто. Напротив, сохраняются элементы, соответствующие координатам

$$\mathcal{S}_1 = \{\tilde{S}_{ij} : ((j-i) \pmod{N}) \equiv \{0, \dots, p, N-p, \dots, N-1\}\},$$

таким образом, матрица $\tilde{L}^{\text{rot}} = \lim_{q \rightarrow 0} L^{\text{rot}}$ имеет $2p+1$ диагоналей.

4.2. Алгебра скобок Пуассона предельной системы. При переходе к пределу $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ остаются ненулевыми только следующие скобки:

$$\{\tilde{S}_{ii}, \tilde{S}_{jk}\} = N(\tilde{S}_{ji}\delta_{ik} - \tilde{S}_{ik}\delta_{ij}), \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{kl}\} &= N(\tilde{S}_{kj}\delta_{il} - \tilde{S}_{il}\delta_{kj}) \quad \text{при } 0 < (j-i) \pmod{N} \leq p, \\ &0 < (l-k) \pmod{N} \leq p, \quad 0 < (j+l-i-k) \pmod{N} \leq p, \end{aligned} \quad (16б)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_{ij}, \tilde{S}_{kl}\} &= N(\tilde{S}_{kj}\delta_{il} - \tilde{S}_{il}\delta_{kj}) \quad \text{при } N-p \leq (j-i) \pmod{N} < N, \\ N-p &\leq (l-k) \pmod{N} < N, \quad N-p \leq (j+l-i-k) \pmod{N} < N. \end{aligned} \quad (16в)$$

Чтобы пояснить смысл этих достаточно громоздких выражений, можно воспользоваться обозначениями (11). Выражению (16a) соответствуют сохранившиеся скобки между элементами из $\mathfrak{h}$ и $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ в том виде, в котором они были до взятия предела. Из (16б) следует, что $\tilde{S}_{ij} \in \mathcal{S}_2^+$, $\tilde{S}_{kl} \in \mathcal{S}_2^+$; если $i = l$, то $\tilde{S}_{kj} \in \mathcal{S}_2^+$, а если $k = j$, то $\tilde{S}_{il} \in \mathcal{S}_2^+$. Те же утверждения, с точностью до замены $\mathcal{S}_2^+$ на $\mathcal{S}_2^-$, верны для (16в). Таким образом, можно увидеть непосредственно, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^\pm)$ – подалгебры алгебры Ли скобок Пуассона предельной системы. В действительности при таком скейлинге верно даже более сильное утверждение, вытекающее из явной записи (16).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Подалгебры $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^+)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{S}_2^-)$ суть идеалы алгебры Ли скобок Пуассона (16).*

В дополнение заметим, что данные скобки могут быть записаны с помощью r -матрицы, которая получается в результате предельного перехода из эллиптической r -матрицы, в терминах переменных $\tilde{S}_{ij}$:

$$\{\tilde{L}_1^{\text{rot}}(\tilde{z}_1), \tilde{L}_2^{\text{rot}}(\tilde{z}_2)\} = [\tilde{r}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2), \tilde{L}_1^{\text{rot}}(\tilde{z}_1) + \tilde{L}_2^{\text{rot}}(\tilde{z}_2)].$$

4.3. Интегрируемость. При определенных ограничениях на p можно доказать интегрируемость получающихся в пределе систем непосредственно, приведя достаточное количество независимых интегралов в инволюции. Здесь мы сформулируем основные утверждения без громоздких доказательств, которые можно найти в работе [3]. Чтобы построить семейство гамильтонианов в инволюции, заметим, что до взятия предела матрица Лакса $\tilde{L}^{\text{rot}}(\tilde{z})$ как функция спектрального параметра имела два квазипериода, 1 и τ (см. формулы (2)), вследствие чего мы искали гамильтонианы как коэффициенты разложения (3) по двоякопериодическим функциям на торе. После взятия предела $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$ остается только один квазипериод, 1, и комплексный тор переходит в комплексный цилиндр, следовательно, естественно рассматривать разложение по базису Фурье $\{e(j\tilde{z}) \equiv w^j, j \in \mathbb{Z}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *След k -й степени матрицы Лакса имеет разложение по базису Фурье, в котором только конечное число членов отлично от нуля, а именно*

$$\text{Tr}(\tilde{L}^{\text{rot}}(\tilde{z}))^k = \sum_{j=-M}^M H_{kj} w^j, \quad \text{где } M = \left\lfloor \frac{kp}{N} \right\rfloor, \quad w \equiv e(\tilde{z}). \quad (17)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Коэффициенты H_{kj} находятся в инволюции:*

$$\{H_{k_1 j_1}, H_{k_2 j_2}\} = 0. \quad (18)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Если N и p взаимно просты, то коэффициенты H_{kj} , где $k > 0$, $[jN/p] \leq k \leq N$ и $|j| < p$, вместе с функциями Казимира $\tilde{S}_{i, i+p} \tilde{S}_{i+p, i}$, $1 \leq i \leq N$, и H_{Np} независимы в точке общего положения.*

Собирая все сделанные утверждения, приходим к заключению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Если N и p взаимно просты, то описанные системы интегрируемы в смысле Лиувилля в точке общего положения.*

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в результате перехода к скейлинговому пределу эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка получаются системы, имеющие замкнутую подсистему, связанную с разрешимой алгеброй (утверждение 4), причем уравнения движения данных систем могут быть представлены в форме Лакса. Во всех приведенных примерах переменные, не входящие в матрицу Лакса, на заданном симплектическом листе могут быть выражены алгебраически через переменные, входящие в матрицу Лакса; таким образом, размерность фазового пространства полной предельной системы совпадает с размерностью подсистемы. К сожалению, без привлечения дополнительных условий на скейлинг переменных про общий случай такого сказать нельзя. Как контрпример можно привести хотя бы тривиальный скейлинг $\tilde{S}_{ij} = S_{ij}$ для случая $N \geq 3$. Покажем, что размерность симплектического листа алгебры Ли $\mathcal{L}(S_1 \cup S_2)$ в точке общего положения не совпадает с размерностью симплектического листа подалгебры Ли $\mathcal{L}(S_2)$. В рассмотренном случае тривиального скейлинга имеем

$$\mathcal{L}(S_2) = \mathfrak{h}, \quad \mathcal{L}(S_1) = \mathcal{L}(\{\tilde{S}_{ij} : i \neq j\}),$$

причем структурные константы алгебры Ли $\mathcal{L}(S_1 \cup S_2)$ относительно скобки Пуассона не изменились в пределе $q \rightarrow 0$, следовательно, размерность симплектического листа алгебры Ли $\mathcal{L}(S_1 \cup S_2)$ тоже сохранилась и отлична от нуля в точке общего положения. С другой стороны, подалгебра $\mathcal{L}(S_2)$ в данном случае абелева, значит, размерность симплектического листа алгебры Ли $\mathcal{L}(S_2)$ тождественно равна нулю.

Описанная в разделе 3 техника перехода к пределу с небольшими модификациями может быть применена к вырождению системы Калоджеро–Мозера со спином для анализа способов вырождения спиновых переменных. Несомненно, путем перехода к пределу Иноземцева в системе Калоджеро–Мозера со спином [10]–[13] можно получить более широкий класс систем, чем путем вырождения системы Калоджеро–Мозера без спина. Эта идея вместе с примером вырождения эллиптической $SL(3, \mathbb{C})$ -системы Калоджеро–Мозера впервые была предложена в работе [14]. Для сравнения заметим, что в работе [15] проанализированы способы вырождения системы Калоджеро–Мозера без спина для произвольной системы корней, в пределе возможно сохранить только элементы, соответствующие простым корням и максимальному корню.

Среди систем, описанных в разделе 4, случаю $p = 1$ соответствует цепочка Тоды, при этом в S_1 остаются координаты, соответствующие базисным элементам подалгебры Картана исходной алгебры Ли скобок Пуассона $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, а также соответствующие корням с высотой ± 1 и $\pm(N - 1)$. Поскольку в случае бесспиновой системы Калоджеро–Мозера мы можем отдельно производить скейлинг только констант связи для длинных и коротких корней (а в случае $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ и вовсе остается только одна константа), сохранить члены со взаимодействием, которые отвечают другим корням, а не базисным и максимальному, не представляется возможным. Иначе обстоит ситуация в системе Калоджеро–Мозера со спином. Используя различные скейлинги для разных спиновых переменных, можно оставить и члены со взаимодействием, которые отвечают корням с высотой, отличной от ± 1 .

Матрица Лакса для системы Калоджеро–Мозера со спином в эллиптическом случае записывается следующим образом [16]–[18]:

$$L^{\text{SCM}}(z) = p + \zeta(z) \sum_{i=1}^N \xi_i h_i + \sum_{\alpha \in \Phi} \phi(\alpha \cdot u, z) \xi_\alpha e_\alpha,$$

где Φ – решетка корней, а функция $\phi(u, z)$ определена в (Б.1). В таком случае условие сходимости матрицы Лакса будет следовать не из разложений (Б.3), а из разложения функции $\phi(u, z)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Синус-алгебра

Для упрощения формул введем следующие обозначения:

$$\tilde{\delta}(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{N}, \end{cases} \quad e(z) = e^{2\pi i z}.$$

Элементы T_{mn} базиса синус-алгебры в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ определяются как

$$(T_{mn})_{ij} = e\left(\frac{mn}{2N}\right) e\left(\frac{im}{N}\right) \tilde{\delta}(j - i - n), \quad m, n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad m^2 + n^2 \neq 0. \quad (\text{A.1})$$

Для элементов с индексами $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m \not\equiv 0 \pmod{N}$ или $n \not\equiv 0 \pmod{N}$) можно ввести условие квазипериодичности:

$$\begin{aligned} T_{mn} &= e\left(\frac{mn - (m \bmod N)(n \bmod N)}{2N}\right) T_{m \bmod N, n \bmod N}, \\ s_{mn} &= e\left(\frac{(m \bmod N)(n \bmod N) - mn}{2N}\right) s_{m \bmod N, n \bmod N}, \end{aligned}$$

где

$$e\left(\frac{mn - (m \bmod N)(n \bmod N)}{2N}\right) = \pm 1.$$

Тогда коммутационные соотношения в базисе синус-алгебры приобретают следующий вид:

$$[T_{mn}, T_{kl}] = 2i \sin\left(\frac{\pi}{N}(kn - ml)\right) T_{m+k, n+l}.$$

С координатами $\{S_{ij}\}$ в разложении по стандартному базису в $SL(N, \mathbb{C})$ координаты $\{s_{mn}\}$ в базисе синус-алгебры связаны следующим образом:

$$S_{ij} = \sum_{m,n} s_{mn} (T_{mn})_{ij}, \quad s_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} S_{ij} (T_{-m,n})_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Разложение эллиптических функций

Наши определения и обозначения преимущественно заимствованы из монографий [5] и [19]. Основной объект нашего рассмотрения – это тета-функция Римана

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{(j+a)^2/2} e((j+a)(z+b)).$$

Для записи матриц Лакса нам потребуются следующие функции:

$$\vartheta(z) = \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z, \tau), \quad \phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad (\text{Б.1})$$

а также

$$\begin{aligned} \varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) &= e\left(-\frac{nz}{N}\right) \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, z\right), \\ f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) &= e\left(-\frac{nz}{N}\right) \partial_u \phi(u, z)|_{u=(m+n\tau)/N}. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Рассмотрим разложение функций (Б.2) при $z = \tilde{z} + \tau/2$, $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$. Подробный вывод следующих разложений выписан в работе [3], здесь мы приведем только результаты:

$$\begin{aligned} \varphi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} \right) &= \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi e(m/2N)}{\sin(\pi m/N)} + o(1), & n = 0, \\ 2\pi i q^{n/2N} e\left(\frac{m}{N} - \frac{n\tilde{z}}{N}\right) + o(q^{n/2N}), & 0 < n < \frac{N}{2}, \\ 4\pi q^{1/4} e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) + o(q^{1/4}), & n = \frac{N}{2}, \\ -2\pi i q^{(N-n)/2N} e\left(\frac{N-n}{N}\tilde{z}\right) + o(q^{(N-n)/2N}), & \frac{N}{2} < n < N; \end{cases} \\ f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} \right) &= \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi m/N)} + o(1), & n = 0, \\ 4\pi^2 e\left(\frac{m}{N}\right) e\left(-\frac{n\tilde{z}}{N}\right) q^{n/2N} + o(q^{n/2N}), & 0 < n < \frac{3N}{4}, \\ 4\pi^2 \left[e\left(\frac{m}{N}\right) - e\left(-\frac{n}{N} + \tilde{z}\right) \right] e\left(-\frac{3\tilde{z}}{4}\right) q^{3/8} + o(q^{3/8}), & n = \frac{3N}{4}, \\ -4\pi^2 e\left(-\frac{m}{N} + \tilde{z}\right) e\left(-\frac{n\tilde{z}}{N}\right) q^{3(1-n/N)/2} + o(q^{3(1-n/N)/2}), & \frac{3N}{4} < n < N. \end{cases} \end{aligned}$$

Благодарности. Автор выражает благодарность А. В. Зотову, А. М. Левину за многочисленные обсуждения, А. В. Смирнову за полезные замечания и Г. А. Аминову за продуктивную совместную работу. Особую благодарность автор выражает М. А. Олшанецкому за постановку задачи и многочисленные обсуждения. Автор благодарен организационному комитету Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS–2011) за предоставленную возможность выступить с докладом, на материале которого основана настоящая статья. Работа была поддержана РФФИ (гранты № 09-02-00-393, 09-01-92437-СЕ), Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 14.740.11.0347) и Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-1646.2011.1).

Список литературы

- [1] V. I. Inozemtsev, *Commun. Math. Phys.*, **121**:4 (1989), 629–638.
- [2] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133, arXiv: nlin/0110045.
- [3] G. Aminov, S. Arthamonov, *J. Phys. A*, **44**:7 (2011), 075201, 34 pp.
- [4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [5] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.
- [6] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, “Алгебра Ли и лагранжевы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **150**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1986, 104–118.
- [7] A. A. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200.
- [8] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [9] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, “О решениях уравнения Янга–Бакстера”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. III, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **95**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1980, 129–160.
- [10] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Invent. Math.*, **37**:2 (1976), 93–108.
- [11] J. Gibbons, T. Hermesen, *Physica D*, **11**:3 (1984), 337–348.
- [12] L.-C. Li, P. Xu, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. Math.*, **331**:1 (2000), 55–60.
- [13] L.-C. Li, P. Xu, *Commun. Math. Phys.*, **231**:2 (2002), 257–286, arXiv: math/0105162.
- [14] А. В. Зотов, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 258–277.
- [15] S. P. Khastgir, R. Sasaki, K. Takasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **102**:4 (1999), 749–776, arXiv: hep-th/9907102.
- [16] E. D’Hoker, H. D. Phong, *Regul. Chaotic Dynam.*, **3**:4 (1998), 27–39.
- [17] E. Billey, J. Avan, O. Babelon, *Phys. Lett. A*, **188**:3 (1994), 263–271, arXiv: hep-th/9401117.
- [18] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, “Spin generalization of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation”, *Topics in Topology and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl., **170**(27), ed. S. P. Novikov, 1995, 83–119.
- [19] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.