Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Миронов, Групповой подход к τ -функции и ее квантованию, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 2, 163–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:14:44

© 1998 г.

А. Д. Миронов*

ГРУППОВОЙ ПОДХОД К τ -ФУНКЦИИ И ЕЕ КВАНТОВАНИЮ¹⁾

Работа представляет собой обзор результатов, связанных с обобщением понятий τ -функции и интегрируемых иерархий, и их интерпретации на теоретико-групповом языке, допускающем непосредственное проведение процедуры квантования. Подробно обсуждаются различные теоретико-групповые структуры, ассоциированные с данной интегрируемой системой, и их деформация при квантовании.

Содержание

1. Введение
2. Фермионное представление интегрируемых иерархий
 - 2.1. Общее фермионное представление стандартных интегрируемых иерархий
 - 2.2. Билинейные тождества для классической иерархии 2РТ
 - 2.3. Фермионное представление полубесконечных иерархий
3. Теоретико-групповые структуры молекулы Тоды
4. Обобщенная τ -функция и билинейные тождества
 - 4.1. τ -Функция и билинейные тождества
 - 4.2. Пример. Квантовая группа $SL_q(2)$
 - 4.3. Универсальный Т-оператор (групповой элемент)
 - 4.4. τ -Функция и представления алгебры функций
 - 4.5. Разностная иерархия КОС
5. Квантовая и классическая иерархия КП с различными эволюциями
 - 5.1. Структура фундаментальных представлений
 - 5.2. Параметризации группового элемента в фундаментальных представлениях
 - 5.3. Классическая ($q = 1$) иерархия КП/Тоды в разных параметризациях
 - 5.4. Квантовый случай ($q \neq 1$)
6. Волновая функция и S -матрица в квантовой теории Лиувилля (Тоды)
 - 6.1. Классическая система Тоды как гамильтонова редукция
 - 6.2. Квантовая механика Лиувилля, общая схема решения

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

*Отделение теоретической физики Физического института РАН; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ac.ru, mironov@itep.ru

6.3. Квантовая механика Лиувилля, группа $SL(2, \mathbf{R})$

6.4. Квантовая механика Тоды

Приложение 1. Полубесконечные иерархии

Приложение 2. Фундаментальные представления группы $SL_q(p)$

Приложение 3. Явный пример: τ_2 для $SL_q(p)$

Приложение 4. Построение функции Уиттекера для группы $SL(p)$

П4.1. Обозначения

П4.2. Представления

П4.3. Гамильтониан и уравнение Шредингера

П4.4. Решение уравнения Шредингера

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление интегрируемости в последние годы играет все большую и большую роль в физике частиц и теории струн [1, 2]. Один из основных уроков, которому учат многочисленные конкретные примеры, состоит в том, что явление *классической* интегрируемости в *квантовых* теориях поля оказывается весьма общим.

Одним из первых примеров использования именно интегрируемых систем в указанной области теоретической физики явились попытки пертурбативных деформаций конформных теорий [3–5] в “интегрируемых” направлениях. Изучение деформаций, вообще говоря, необходимо для описания непертурбативных решений теории струн. Конечно, пертурбативные деформации конформных теорий дали только описание окрестности критических точек, что не прояснило глобальной структуры конфигурационного пространства теории струн. Однако уже в работах [3–5] (см. также [6, 7]) отмечалась важность именно *интегрируемых* деформаций конформных теорий. Более того, и в непосредственном контексте теории струн ожидалось, что сумма всего пертурбативного ряда для амплитуд (или статистической суммы) описывается некоторой квантовой интегрируемой системой [8, 9]. Здесь важно, что эффективное действие для *квантовой* интегрируемой системы является τ -функцией *классической* интегрируемой системы²⁾. Это удивительное явление уже встречалось в ряде простых примеров [13–16], хотя никогда не было объяснено.

Интересно, что имеющиеся примеры могут быть разделены на два класса: когда классическая интегрируемая система естественно зависит от времен (констант связи) и когда от так называемых переменных Мивы – собственных значений некоторой бесконечной внешней матрицы. Примером первого типа является некоторый функционал корреляторов квантового уравнения Шредингера, который оказывается τ -функцией классического интегрируемого нелинейного уравнения того же типа [13]. Типичный пример второго типа – статистическая сумма шестивершинной модели с нетривиальными граничными условиями, которая оказывается τ -функцией двумеризованной цепочки Тоды в переменных Мивы (которые суть граничные условия) [16].

Однако наиболее содержательным примером рассматриваемого явления интегрируемости являются матричные модели [2, 17–19]. В частности, в матричных моделях ре-

²⁾ Достаточно интересно, что интегрирование некоторых объектов типа τ -функции [10, 11] по универсальному пространству модулей в теории струн [12] приводит опять к τ -функции, заданной на том же универсальном пространстве модулей.

лизуются оба упомянутых выше типа переменных: именно, статистическая сумма дискретных матричных моделей есть τ -функция с временами, являющимися константами связи, а непрерывных — τ -функция, зависящая от внешней матрицы, задающей переменные Мивы.

В действительности явление классической интегрируемости эффективной теории оказывается весьма общим и не специфичным, скажем, для двух измерений. Так, ярким примером является решение четырехмерной $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, найденное недавно Виттенем и Зайбергом [20, 21], классические интегрируемые структуры которого были выявлены в работе [22] (для ознакомления с последними достижениями в этой области см. [1, 23, 24] и приведенные там ссылки). Вследствие такой общности этого явления можно было бы ожидать, что эффективное действие в типичных теориях поля бывает интегрируемым при правильном выборе переменных и, конечно, учете всех возможных взаимодействий. На практике набор этих последних обычно ограничен некоторыми дополнительными соображениями (перенормируемость и т. д.).

Как уже говорилось, хотя явление интегрируемости в теориях поля и теории струн было исследовано в ряде примеров, его источник остается до сих пор не понятым. В настоящей работе обсуждаются вопросы, связанные с общими свойствами квантовых и классических τ -функций, что должно помочь пролить некоторый свет на указанный феномен. Кроме того, здесь же исследуются некоторые непосредственные приложения общего подхода, например вычисление S -матрицы квантовой теории Лиувилля.

Для того чтобы обсуждать, каким образом корреляторы квантовой интегрируемой системы связаны с классическими иерархиями, надо вначале переформулировать квантовую систему в терминах, адекватных этим классическим иерархиям. Ключевым объектом в этих иерархиях является τ -функция, в то время как квантовые интегрируемые системы до сих пор формулировались исключительно в терминах R -матрицы [25–30]. Поэтому основной задачей настоящей работы является обобщение понятия τ -функции таким образом, чтобы оно включало в себя квантовый случай. Для решения этой задачи мы собираемся подробно обсудить само понятие τ -функции и, в частности, выделить различные теоретико-групповые (симметричные) аспекты, связанные с ним. На этом пути естественно вводится понятие *обобщенной* τ -функции, которая все еще может быть описана чисто алгебраически и удовлетворяет набору билинейных тождеств типа уравнений Хироты.

Необходимость обобщения понятия τ -функции трудно переоценить. Начнем с того, что уже упоминавшиеся матричные модели, отвечающие стандартным интегрируемым иерархиям, являются только простейшими моделями. Более сложные и важные физические примеры описывают обобщенную модель Концевича–Казакова–Мигдала [31], многомерные калибровочные теории [32], теории двумерной гравитации, взаимодействующие с конформной материей при $c > 1$ (т.е. отвечающие размерности пространства-времени $d > 2$ снова многомерные модели) и т. д. Все эти примеры отвечают моделям, в которых угловые переменные не могут быть отфакторизованы и затем проинтегрированы. Таким образом, они должны описываться более сложными “обобщенными” иерархиями.

Другой важный класс “обобщенных” интегрируемых иерархий должен отвечать тео-

риям Весса–Зумино–Виттена–Новикова (ВЗВН) уровня, большего чем 1. Дальнейшее развитие в том же направлении должно привести к описанию 2-петлевых, 3-петлевых и т.д. алгебр в рамках интегрируемых иерархий. Все рассмотренные примеры отвечают так называемым некартановским иерархиям [17].

Еще одной важной задачей, которая должна решаться на пути квантования обобщенной τ -функции, является аккуратная регуляризация теории Лиувилля [33]. К этой проблеме, однако, имеются и другие подходы, которые будут частично описаны ниже.

Сразу оговоримся, что мы не обсуждаем вопрос, почему проводимая в работе q -деформация τ -функции отвечает, действительно, квантованию системы, т.е. построению квантовой теории поля (квантовой механики) вместо классической. Вместо этого мы просто отсылаем читателя к работам [25–30], объясняющим, почему переход к квантовым группам и квантовым R -матрицам отвечает квантованию классических систем.

Как уже говорилось, основным инструментом при исследовании обобщенных τ -функций является теория групп. Точнее, при использовании различных симметричных структур интегрируемых иерархий их удается сформулировать на чисто алгебраическом языке. Как обычно в теоретической физике, именно симметричный подход позволяет устанавливать самые общие закономерности, не зависящие от деталей динамики. В частности, именно общая симметричная структура различных эффективных действий квантовой теории поля должна объяснять их типичную интегрируемую структуру. Поэтому важно прояснить различные алгебраические структуры и их роль при квантовании теории.

В качестве типичного примера в данной работе, являющейся обзором статей [34–40], рассматривается интегрируемая система типа Тоды (или Лиувилля как частный пример этой последней). В такой системе, как показано в разделах 3 и 6, имеются три различные групповые структуры. Две из них связаны с действием группы в пространстве спектрального параметра: одна – это группа $gl(\infty)$, грассманиан которой параметризует все решения двумеризованной иерархии Тоды общего вида, другая – группа $sl(n)$, описывающая редукцию всего этого большого пространства решений к решениям $sl(n)$ -Тоды. Таким образом, обе эти группы действуют на решениях интегрируемой иерархии. Именно эти группы заменяются своими квантовыми аналогами при квантовании системы.

Однако процедура квантования не является механической, не любая групповая структура должна быть обязательно проквантована. Действительно, в системе Лиувилля имеется еще одна группа. Она действует в “пространстве-времени”, т.е. на временах интегрируемой системы. При квантовании, однако, эта группа остается классической, меняется только ее трактовка – квантование вводит орбитную интерпретацию. Действительно, если классическая система получается гамильтоновой редукцией свободной системы, заданной на кокасательном расслоении к простой вещественной группе Ли [41–43], то квантовая модель связана с неприводимыми унитарными представлениями той же самой группы. Таким образом, квантовая система должна скорее интерпретироваться в рамках геометрического квантования [44]. Изучению этой групповой структуры посвящен раздел 6. В частности, в этом разделе показано, что методы теории групп позволяют не только построить волновую функцию квантовой теории Тоды (называемую функцией Уиттекера) [45–48], но и найти ее асимптотики [49, 50] и, следовательно,

S -матрицу (или двухточечный коррелятор).

Вычисления такого сорта были известны довольно давно [51], однако они были проделаны в рамках разложения Ивасава и плохо обобщаются на аффинный случай. В разделе 6 мы представляем другое вычисление, основанное на разложении Гаусса. Достоинством этого метода является его непосредственная обобщаемость на лиувиллевскую теорию поля, которой отвечает аффинная алгебра (в этом случае следует использовать “поточечное” разложение Гаусса, аналогичное применяемому при бозонизации теорий ВЗВН [52]). Результаты вычисления волновой функции и ее асимптотик легко продолжаются на этот (аффинный) случай, приводящий к S -матрице двумерной теории Лиувилля. Эта S -матрица совпадает с S -матрицей, полученной недавно Замолотчиковыми [53] и Дорном и Отто [54, 55].

Другие групповые структуры, которые должны заменяться q -деформированными аналогами при квантовании интегрируемой системы, обсуждаются в остальной части статьи. В частности, в разделе 4 исследуется обобщение τ -функции, допускающее непосредственное квантование. Естественно попытаться построить такую квантовую τ -функцию, чтобы она оставалась c -числовой. В пункте 4.5 показано, что такого рода деформацию классической иерархии, действительно, можно проделать, причем результирующая иерархия из дифференциальной превратится в разностную. Однако эта деформация оказывается слишком тривиальной, поскольку сводится к (весьма сложному) переопределению времен первоначальной иерархии. Таким образом, остается задача построения нетривиальной деформации понятия τ -функции (которая приводит к некоммутативному объекту).

Эту задачу удастся решить на чисто алгебраическом пути, в том же разделе 4 τ -функция определяется по представлению любой алгебры как производящая функция ее матричных элементов в некотором (произвольном) представлении. Так, определенная τ -функция удовлетворяет системе билинейных тождеств (БТ). В классическом случае эти БТ дифференциальные. Для квантования иерархии достаточно вместо классической группы взять квантовую. При этом дифференциальные БТ становятся разностными, а сама τ -функция — оператором.

Следует заметить, что τ -функция, определенная по произвольному представлению алгебры, приводит к БТ, заданным *некоммутирующими* потоками, т.е. в стандартном смысле теория перестает быть интегрируемой (по Лиувиллю). Она, однако, сохраняет множество важнейших свойств интегрируемых теорий и отвечает некартановским иерархиям [17], упоминавшимся выше.

Для того чтобы получить τ -функцию, отвечающую стандартной иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) или Тоды, нужно рассмотреть фундаментальные представления группы $SL(\infty)$. Для таких представлений возможна некоторая специальная редукция общей τ -функции, которая приводит к обычным интегрируемым иерархиям.

Следующая проблема — задача построения квантового аналога иерархии КП. Эта задача является крайне нетривиальной, поскольку указанная специальная редукция общей τ -функции, возможная в фундаментальных представлениях, разрушается при квантовании. Удастся, однако, построить квантование некоторой новой классической иерархии, которая является, по сути, иерархией КП, но с необычной эволюцией. Это продемонстрировано в разделе 5.

Для большей стройности изложения часть материала, носящего более технический характер, вынесена в приложения. Некоторые дополнительные детали, оставшиеся вне рамок настоящего обзора, могут быть найдены в оригинальных статьях [34–40] и, особенно, в статье [39], результаты которой будут здесь рассмотрены весьма сжато.

Автор благодарен А. Герасимову, С. Харчеву, С. Хорошкину, Д. Лебедеву, А. Маршакову, А. Морозову, М. Ольшанецкому и Л. Винэ за участие в совместных работах и полезные обсуждения и Г. Вайгту, А. Горскому, В. Добреву, А. Забродину, Ал. Замолодчикову, В. Корепину, Н. Некрасову, Н. Славнову, И. Тютину и Й. Шниттге за полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантами РФФИ-96-01-01106 и INTAS-97-1038.

2. ФЕРМИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

Вначале мы изложим вкратце общее фермионное описание стандартных интегрируемых иерархий, следуя в основном работам киотской школы [56–63] (см. также [64, 65]), и опишем, как на этом языке выглядит важный частный случай – полубесконечные иерархии³⁾. Заметим, что фермионный подход – самый универсальный язык, до сих пор применявшийся для описания интегрируемых систем, поскольку он отвечает формальному грассманиану (грассманиан Сато [66]), сформулированному в терминах формальных рядов. Хотя имеющиеся альтернативные подходы (см., например, [67–69]) лучше описывают, скажем, конечнозонные решения [70], именно грассманиан Сато необходим для работы с сингулярными точками (описывающими, например, матричные модели, см. [71]).

2.1. Общее фермионное представление стандартных интегрируемых иерархий

Мы начнем с описания иерархии двумеризованной решетки Тоды (2РТ), τ -функция которой задается корреляторами в теории свободных фермионов $\psi, \bar{\psi}$ (b, c -система со спином 1/2). А именно, она определена как отношение корреляторов⁴⁾

$$\tau_n(t, \bar{t} | G) \equiv \frac{\langle n | e^H G e^{\bar{H}} | n \rangle}{\langle n | G | n \rangle} \quad (2.1)$$

в теории двумерных свободных фермионных полей $\psi(z), \psi^*(z)$:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{\mathbf{z}} \psi_{\mathbf{z}} z^{\mathbf{z}}, \\ \psi^*(z) &= \sum_{\mathbf{z}} \psi_{\mathbf{z}}^* z^{-\mathbf{z}-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\{\psi_k, \psi_m^*\} = \delta_{km}, \quad \{\psi_k, \psi_m\} = \{\psi_k^*, \psi_m^*\} = 0. \quad (2.3)$$

³⁾ Именно эти полубесконечные иерархии описывают, в частности, матричные модели.

⁴⁾ В дальнейшем тексте мы будем опускать из определения τ -функции коррелятор, служащий нормировочным множителем, всюду, где это не может привести к недоразумениям, т.е. он не сингулярен.

В определении (2.1) использованы следующие обозначения:

$$H = \sum_{k>0} t_k J_k, \quad \bar{H} = \sum_{k>0} \bar{t}_k J_{-k}, \quad (2.4)$$

где токи определены как

$$J(z) = \psi^*(z)\psi(z), \quad \text{т.е.} \quad J_k = \sum_{\mathbf{z}} \psi_i \psi_{i+k}^*. \quad (2.5)$$

Величина G задается формулой

$$G = : \exp \left\{ \sum_{m,n} \mathcal{G}_{mn} \psi_m^* \psi_n \right\} : \quad (2.6)$$

и является элементом группы $GL(\infty)$ (или группы Клиффорда), реализованным в бесконечномерном грассманиане (см. также эквивалентные описания в [67–69]). Нормальное упорядочивание должно пониматься здесь как упорядочивание по отношению к вакууму $|0\rangle$, который определен условиями

$$\psi_m |0\rangle = 0, \quad m < 0; \quad \psi_m^* |0\rangle = 0, \quad m \geq 0. \quad (2.7)$$

Можно рассмотреть и более общее нормальное упорядочивание, определенное по отношению к вакууму $|k\rangle$, который задан условиями

$$\psi_m |k\rangle = 0, \quad m < k; \quad \psi_m^* |k\rangle = 0, \quad m \geq k. \quad (2.8)$$

Конкретное решение иерархии (τ -функция (2.1)) зависит только от выбора элемента G (или эквивалентно может быть определено единственным образом матрицей $\mathcal{G}_{km}$). Замечательным достижением киотской школы является утверждение о том, что любое решение иерархии 2РТ может быть задано некоторым элементом G вида (2.6) и наоборот каждый такой элемент G отвечает некоторому решению иерархии 2РТ.

Заметим, что в рамках описываемого здесь фермионного подхода [56–63] 2РТ является однокомпонентной иерархией наиболее общего вида. Скажем, иерархия КП получается из нее, если приравнять нулю все отрицательные времена и нулевое время или просто как-либо их фиксировать и не рассматривать соответствующие эволюционные уравнения. В этом смысле иерархия КП – это подиерархия 2РТ, а не редукция, и описывается она тем же множеством элементов G , но меньшим числом эволюционных потоков.

Другим примером является цепочка Тоды, это уже редукция, которая получается из 2РТ при наложении специального условия на элемент грассманиана. В результате τ -функция цепочки Тоды оказывается зависящей не от положительных и отрицательных времен по отдельности, а только от их суммы [64]⁵⁾ (поэтому без потери общности можно использовать эволюцию только по одному набору времен). Такое свойство цепочки Тоды может быть взято за ее определение.

⁵⁾ В большинстве статей цепочка Тоды зависит только от *разности* времен. Это связано с противоположным знаком, использованным в (2.1) при $\bar{H}$.

Теперь мы получим несколько свойств описанной фермионной системы, полезных для дальнейшего. Из коммутационных соотношений (2.3) можно легко найти, как преобразуются фермионные моды при действии на них элемента грассманиана (2.6):

$$G\psi_k G^{-1} = \psi_j R_{jk}, \quad G\psi_k^* G^{-1} = \psi_j^* R_{kj}^{-1}, \quad (2.9)$$

где матрица R_{jk} может быть выражена через $\mathcal{G}_{jk}$ (см. [14]). Ниже мы увидим, что R_{jk} является важным строительным блоком в детерминантных представлениях τ -функций.

Введем еще некоторые обозначения. Используя (2.3), определяем эволюцию $\psi(z)$ и $\psi^*(z)$ по временам $\{t_k\}$, $\{\bar{t}_k\}$:

$$\psi(z, t) \equiv e^{H(t)} \psi(z) e^{-H(t)} = e^{\xi(t, z)} \psi(z), \quad (2.10)$$

$$\psi^*(z, t) \equiv e^{H(t)} \psi^*(z) e^{-H(t)} = e^{-\xi(t, z)} \psi^*(z), \quad (2.11)$$

$$\psi(z, \bar{t}) \equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi(z) e^{-\bar{H}(\bar{t})} = e^{\xi(\bar{t}, z^{-1})} \psi(z), \quad (2.12)$$

$$\psi^*(z, \bar{t}) \equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi^*(z) e^{-\bar{H}(\bar{t})} = e^{-\xi(\bar{t}, z^{-1})} \psi^*(z), \quad (2.13)$$

где

$$\xi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k. \quad (2.14)$$

Находим также полиномы Шура по формуле

$$\exp\left\{\sum_{k>0} t_k x^k\right\} \equiv \sum_{k>0} P_k(t_k) x^k, \quad P_k(t_k) = 0, \quad k < 0. \quad (2.15)$$

Используя это определение и (2.10)–(2.13), получаем эволюцию фермионных мод:

$$\psi_k(t) \equiv e^{H(t)} \psi_k e^{-H(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k-m} P_m(t), \quad (2.16)$$

$$\psi_k^*(t) \equiv e^{H(t)} \psi_k^* e^{-H(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k+m}^* P_m(-t), \quad (2.17)$$

$$\psi_k(\bar{t}) \equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi_k e^{-\bar{H}(\bar{t})} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k+m} P_m(\bar{t}), \quad (2.18)$$

$$\psi_k^*(\bar{t}) \equiv e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi_k^* e^{-\bar{H}(\bar{t})} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{k-m}^* P_m(-\bar{t}). \quad (2.19)$$

Теперь мы можем вывести детерминантное представление для τ -функции⁶⁾. Для этого определим совершенно заполненное вакуумное состояние $|\infty\rangle$, которое удовлетворяет требованию

$$\psi_i^* |\infty\rangle = 0, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (2.20)$$

⁶⁾ Нижеследующий вывод, конечно, требует при реальных вычислениях определенных свойств сходимости, в частности, определителей бесконечномерных матриц. Скажем, достаточным является рассматривать матрицы с конечным числом отличных от нуля диагональных элементов [62]. Иногда, однако, этот класс матриц оказывается слишком ограничительным, как, например, в матричных моделях [71, 72]. Обсуждаемые же ниже формулы являются следствием некоторых соотношений, которые можно проверить в формальных рядах, и потому они верны всегда, когда свойства сходимости выполнены. По той же причине мы не обсуждаем ниже вопроса существования совершенно заполненного вакуумного состояния.

Тогда любой “сдвинутый” вакуум получается из него следующим образом:

$$|n\rangle = \psi_{n-1}\psi_{n-2}\dots|-\infty\rangle. \quad (2.21)$$

Заметим, что действие любого элемента G группы Клиффорда (и, как следствие, действие $e^{\overline{H}(\bar{t})}$) на $|-\infty\rangle$ тривиально: $G|-\infty\rangle \sim |-\infty\rangle$. Поэтому с помощью (2.17) и (2.18) получаем из (2.1)

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle -\infty | \dots \psi_{n-2}^*(-t) \psi_{n-1}^*(-t) G \psi_{n-1}(\bar{t}) \psi_{n-2}(\bar{t}) \dots | -\infty \rangle \sim \\ &\sim \det \left[\langle -\infty | \psi_i^*(-t) G \psi_j(\bar{t}) G^{-1} | -\infty \rangle \right] \Big|_{i,j \leq n-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Используя (2.9), находим

$$G \psi_j(\bar{t}) G^{-1} = \sum_{m,k} P_m(\bar{t}) \psi_k R_{k,j+m}, \quad (2.23)$$

поэтому “явное” решение иерархии 2РТ может быть записано в детерминантной форме

$$\tau_n(t, \bar{t}) \sim \det_{i,j < 0} C_{i+n,j+n}(t, \bar{t}), \quad (2.24)$$

где⁷⁾

$$C_{ij}(t, \bar{t}) = \sum_{k,m} R_{km} P_{k-i}(t) P_{m-j}(\bar{t}). \quad (2.25)$$

Зависимость от времени матричных элементов (2.25) в детерминанте (2.24) задана следующими уравнениями:

$$\partial C_{ij} / \partial t_p = C_{i,j-p}, \quad j > p > 0, \quad (2.26)$$

$$\partial C_{ij} / \partial \bar{t}_p = C_{i-p,j}, \quad i > p > 0, \quad (2.27)$$

которые являются прямым следствием соответствующего свойства полиномов Шура:

$$\partial P_k / \partial t_p = P_{k-p}, \quad (2.28)$$

следующего непосредственно из их определения.

Как уже отмечалось, иерархия КП отвечает эволюции только по положительным временам $\{t_k\}$; отрицательные времена $\{\bar{t}_k\}$ играют роль параметров, задающих семейство точек в грассманиане, и могут быть поглощены переопределением матрицы R_{km} . Тогда τ -функция (модифицированной) иерархии КП имеет вид

$$\tau_n(t) = \langle n | e^{H(t)} G(\bar{t}) | n \rangle \sim \det_{i,j < 0} \left[\sum_k R_{k,j+n}(\bar{t}) P_{k-i-n}(t) \right], \quad (2.29)$$

где $G(\bar{t}) \equiv G e^{\overline{H}(\bar{t})}$ и

$$R_{kj}(\bar{t}) \equiv \sum_m R_{km} P_{m-j}(\bar{t}). \quad (2.30)$$

⁷⁾Заметим, что мы нигде не выписываем области суммирования, поскольку они автоматически выделяются свойством (определением) полиномов Шура $P_k = 0$ при $k < 0$ в (2.15).

2.2. Билинейные тождества для классической иерархии 2РТ

Для дальнейшего нам понадобятся еще следующие две *важнейшие* формулы теории интегрируемых систем [58]:

$$\begin{aligned} \langle n | \psi(z) \exp[H(t)] &= z^{n-1} \langle n-1 | \exp[H(t - \epsilon(z^{-1}))] \equiv \\ &\equiv z^{n-1} \hat{X}(z, t) \langle n-1 | e^{H(t)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \langle n | \psi^*(z) \exp[H(t)] &= z^{-n} \langle n+1 | \exp[H(t + \epsilon(z^{-1}))] \equiv \\ &\equiv z^{-n} \hat{X}^*(z, t) \langle n+1 | e^{H(t)}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\hat{X}(z, t) \equiv e^{\xi(z, t)} e^{-\xi(z, \tilde{\partial}_t)}, \quad (2.33)$$

$$\hat{X}^*(z, t) \equiv e^{-\xi(z, t)} e^{\xi(z, \tilde{\partial}_t)} \quad (2.34)$$

и, как обычно, $\tilde{\partial}_t \equiv (\partial_{t_1}, (1/2)\partial_{t_2}, \dots)$.

Используя эти формулы, можно выразить функцию Бейкера–Ахизера (ФБА) иерархии КП, определенную через τ -функцию, выражением [58]

$$\Psi(\mu | t_n) = e^{\sum t_n \mu^n} \frac{\tau_0\left(t_n - \frac{\mu^{-n}}{n} \middle| \bar{t}_n\right)}{\tau_0(t_n | \bar{t}_n)} \quad (2.35)$$

через фермионный коррелятор

$$\Psi(\mu | t_n) = \frac{\langle 1 | e^{H(t)} \psi(\mu) G | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{H(t)} G | 0 \rangle}. \quad (2.36)$$

Аналогично можно рассмотреть сопряженную ФБА, заданную определением

$$\Psi^*(\mu | t_n) = \frac{\langle 1 | e^{H(t)} \psi^*(\mu) G | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{H(t)} G | 0 \rangle}. \quad (2.37)$$

Рассмотрев ненулевой вакуум, можно ввести и более общую пару ФБА, зависящих от нулевого времени n .

Аналогично в случае полной иерархии 2РТ можно рассмотреть *четыре* различные ФБА, поскольку можно вставлять фермионы и справа от элемента грассманиана G .

Выведем теперь БТ, которым удовлетворяет τ -функция иерархии 2РТ (2.1) [62, 64]. Для этого заметим, что благодаря соотношениям (2.9) тензорное произведение элементов грассманиана $G \otimes G$ (2.6) коммутирует с тензорным произведением $\Gamma \equiv \sum_i \psi_i \otimes \psi_i^*$. Чтобы сделать обозначения удобными для дальнейшего изложения, мы далее обозначаем фермионные моды ψ_k через ψ_k^+ и ψ_k^* через ψ_k^- .

Изучим теперь матричные элементы тождества

$$\Gamma(G \otimes G) = (G \otimes G)\Gamma \quad (2.38)$$

между состояниями $\langle n+1|U(t) \otimes \langle m-1|U(t') \text{ и } \overline{U}(\bar{t})|n \rangle \otimes \overline{U}(\bar{t}')|m \rangle$, где мы обозначили $U(t) \equiv e^{H(t)}$ и $\overline{U}(\bar{t}) \equiv e^{\overline{H}(\bar{t})}$:

$$\begin{aligned} & \sum_i \langle n+1|U(t)\psi_i^+ G\overline{U}(\bar{t})|n \rangle \cdot \langle m-1|U(t')\psi_i^- G\overline{U}(\bar{t}')|m \rangle = \\ & = \sum_i \langle n+1|U(t)G\psi_i^+ \overline{U}(\bar{t})|n \rangle \cdot \langle m-1|U(t')G\psi_i^- \overline{U}(\bar{t}')|m \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Теперь можно переписать (2.39) с помощью полей свободных фермионов (2.2)⁸⁾:

$$\begin{aligned} & \oint_{\infty} dz \langle n+1|U(t)\psi^+(z)G\overline{U}(\bar{t})|n \rangle \cdot \langle m-1|U(t')\psi^-(z)G\overline{U}(\bar{t}')|m \rangle = \\ & = \oint_0 dz \langle n+1|U(t)G\psi^+(z)\overline{U}(\bar{t})|n \rangle \cdot \langle m-1|U(t')G\psi^-(z)\overline{U}(\bar{t}')|m \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Если обобщить определения ФБА (2.36) и (2.37) на ненулевой вакуум и ввести отрицательные времена

$$\Psi_n^{\pm, i} \equiv \langle n \pm 1|\widehat{U}(t)\psi_i^{\pm} G\widehat{U}(\bar{t})|n \rangle, \quad (2.41)$$

то эти формулы могут быть записаны в более компактном виде (здесь и далее мы используем обозначение t как для положительных, так и для отрицательных времен там, где это не может привести к непониманию):

$$\sum_i \Psi_k^{+, i}(t) \Psi_l^{-, i}(t') = \sum_j \overline{\Psi}_{k+1}^{+, j}(\bar{t}) \overline{\Psi}_{l-1}^{+, j}(\bar{t}'). \quad (2.42)$$

Здесь $\overline{\Psi}$ задает вторую пару ФБА, определенных аналогичным образом, но с фермионом, стоящим справа от элемента G .

Эти ФБА генерируются действием вершинных операторов (2.33), (2.34) (см. (2.31), (2.32)):

$$\sum_i \Psi_k^{+, i}(t) z^i \equiv \widehat{X}^+(z, t) \tau_n(t), \quad \sum_i \Psi_k^{-, i}(t) z^{-i-1} \equiv \widehat{X}^-(z, t) \tau_n(t) \quad (2.43)$$

и аналогично для $\widehat{X}^{\pm}(z, t)$. Тогда (2.39) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \oint_{\infty} dz \widehat{X}^-(z, t) \tau_n(t, \bar{t}) \widehat{X}^+(z, t') \tau_m(t', \bar{t}') = \\ & = \oint_0 dz \widehat{X}^-(z, \bar{t}) \tau_{n+1}(t, \bar{t}) \widehat{X}^+(z, \bar{t}') \tau_{m-1}(t', \bar{t}'). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Эта интегральная форма БТ превращается в бесконечный набор уравнений (см. также (3.4)), если проделать разложение по степеням $t - t'$ и $\bar{t} - \bar{t}'$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} P_i(-2y) P_{i+1}(\tilde{D}_t) \exp\left\{\left[\sum_i y_i D_{t_i}\right]\right\} \tau \cdot \tau = 0, \\ & \tau_n \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \tau_n - \partial_{t_1} \tau_n \partial_{\bar{t}_1} \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

⁸⁾ Контур интегрирования в этой формуле выбирается в зависимости от того, по положительным или отрицательным степеням z раскладывается подынтегральное выражение.

где D_t – символы Хироты, действующие на произведение двух функций по следующему правилу:

$$D_x^k(f \cdot g) \equiv \partial_y [f(x+y)g(x-y)]|_{y=0}, \quad \tilde{D} \equiv \left(D_{t_1}, \frac{1}{2}D_{t_2}, \dots \right),$$

P_i – полиномы Шура и разложение по произвольному набору параметров $\{y_k\}$ задает бесконечный набор уравнений иерархий КП/Тоды.

2.3. Фермионное представление полубесконечных иерархий

Теперь мы применим описанный формализм к случаю полубесконечных иерархий, в частности, получим детерминантные формулы [73, 65]. Ключевое отличие формул типа (2.24) от детерминантных представлений, которые будут получены в данном пункте, в том, что в полубесконечных иерархиях возникают *конечные* детерминанты. Это очень важное отличие, возникающее благодаря специфическому граничному (с точки зрения цепочки частиц) условию

$$\tau_0 = 1. \quad (2.46)$$

Это условие может служить определением полубесконечных иерархий [74], которые изучались в работах [73, 65]. Оказывается, полубесконечные иерархии описываются сингулярными элементами грассманиана, которые содержат только положительные (или только отрицательные) фермионные моды. Это, в свою очередь, подразумевает четверть-бесконечную матрицу $\mathcal{G}_{mn}$ в (2.6) и, действительно, ведет к конечным детерминантам. Мы опишем полубесконечные иерархии в настоящем пункте весьма коротко, оставляя некоторые технические вычисления для приложения 1. Более подробное изложение может быть найдено в [73, 65].

Итак, мы будем искать точку грассманиана в виде

$$G = G_0 P_+, \quad (2.47)$$

где P_+ – проектор на положительные состояния:

$$P_+ |n\rangle = \theta(n) |n\rangle. \quad (2.48)$$

Этот проектор можно естественно реализовать в терминах фермионов

$$P_+ = : \exp \left[\sum_{i < 0} \psi_i \psi_i^* \right] :. \quad (2.49)$$

Он обладает рядом свойств:

$$P_+ \psi_{-k}^* = \psi_{-k} P_+ = 0, \quad k > 0, \quad (2.50)$$

$$[P_+, \psi_k] = [P_+, \psi_k^*] = 0, \quad k \geq 0, \quad (2.51)$$

$$P_+^2 = P_+. \quad (2.52)$$

Если этот проектор вставлен в (2.1), естественно потребовать, чтобы G_0 зависел только от ψ_k и ψ_k^* с $k \geq 0$. Мы выбираем его в виде

$$G_0 = : \exp \left\{ \left(\int_{\gamma} A(z, w) \psi_+(z) \psi_+^*(w^{-1}) dz dw \right) - \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right\} :, \quad (2.53)$$

где γ – некоторая область интегрирования. Ключевая формула, доказательство которой мы оставляем до приложения 1, дает τ -функцию с элементом грассманиана, выбранным в форме (2.47):

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle n | e^{H(t)} G_0 P_+ e^{\bar{H}(\bar{t})} | n \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \Delta(w) \Delta(z) \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(t, z_i) + \xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $\Delta(z) \equiv \det_{i,j} z_j^{i-1}$ – определитель Ван-дер-Монда.

Вычислениями, абсолютно аналогичными проделанным выше (см. также приложение 1), можно получить детерминантное представление для полубесконечной иерархии:

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \det \left[\partial_{t_1}^i \partial_{\bar{t}_1}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw \right] \Big|_{i,j=0, \dots, n-1}. \quad (2.55)$$

Это, действительно, детерминант конечной матрицы, в частных случаях дающий детерминантные представления соответствующих матричных моделей [65].

Заметим, что матрица A_{ij} , определенная из разложения $A(z, w)$ по степеням z и w , совпадает с матрицей R_{ij} из (2.9) (см. приложение 1). Такая простая связь матрицы вращения фермионов с матрицей, задающей элемент грассманиана, является отличительной чертой полубесконечных иерархий.

Элемент грассманиана, определенный в (2.47), далеко не единственно возможный. Связано это с различными возможными способами продолжить соотношение (2.46) на отрицательные значения n . Принятый здесь способ отвечает условию

$$\tau_n = 0 \quad \text{при} \quad n < 0. \quad (2.56)$$

Этот способ хорош тем, что при редукции к цепочке Тоды определенная таким образом τ -функция зависит только от суммы времен $t_k + \bar{t}_k$, что является определяющим свойством для соответствующей бесконечной иерархии. Другие интересные выборы элемента G обсуждались в [73]. Если рассмотреть зависимость только от времен t_k , один из них отвечает, например, условию

$$\tau_n(t_k) = \tau_{-n}((-)^k t_k) \quad (2.57)$$

и описывает (модифицированную) симплектическую иерархию КП [59], т.е. соответствующий элемент грассманиана принадлежит $Sp(\infty)$. Другой выбор элемента грассманиана (просто $G = G_0$) приводит к условию

$$\tau_n = 1 \quad \text{при} \quad n < 0 \quad (2.58)$$

и т.д.

3. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ СТРУКТУРЫ МОЛЕКУЛЫ ТОДЫ

Прежде чем переходить к обобщению построенной в предыдущем разделе конструкции, мы обсудим теоретико-групповые структуры, которые присутствуют в интегрируемых системах, в качестве основного примера рассматривая теорию Лиувилля (Тоды)⁹⁾. Заметим, что в *одной и той же* интегрируемой системе часто представлены *разные* групповые структуры. В частности, некоторые группы действуют в пространстве решений интегрируемой иерархии, другие – просто на пространство переменных интегрируемых уравнений (в “пространстве-времени”) [40]. Мы начнем с рассмотрения структур первого типа, в то время как вторые рассмотрены в разделе 4.

Как мы обсуждали в предыдущем разделе, все решения интегрируемой иерархии 2РТ (2.1) описываются групповыми элементами группы $GL(\infty)$ (2.6). Эта группа действует в пространстве решений и одновременно в пространстве спектрального параметра. Именно групповая структура этого типа будет нас в основном интересовать, поскольку как раз она ответственна за большинство определяющих свойств интегрируемой системы и непосредственно деформируется при квантовании системы. В примере, который мы сейчас рассмотрим – системе Лиувилля, присутствует, однако, еще одна группа.

Мы начнем с естественного ограничения полубесконечных иерархий, заданных условием (2.56), на конечные системы. Для этого мы наложим еще одно, дополнительное условие

$$\tau_n = 0, \quad n > p, \quad (3.1)$$

для некоторого p . Эта система отвечает двумеризованной $(p - 1)$ -частичной молекуле Тоды [78–80] и иногда называется непериодической $SL(p)$ -цепочкой Тоды [75]. Поскольку она является очень частным случаем полубесконечной иерархии, мы можем воспользоваться формулами предыдущего раздела и приложения 1. Тогда можно проверить, что $SL(p)$ -молекула Тоды описывается матрицей вращения фермионов R_{ij} , имеющей ранг p , а в остальном являющейся произвольной [36]. Это означает, что она может быть представлена в виде

$$R_{ij} = \sum_k^p f_i^{(k)} g_j^{(k)}, \quad (3.2)$$

где $f_i^{(k)}$ и $g_j^{(k)}$ – произвольные коэффициенты. При этом ядро элемента грассманиана $A(z, w)$ (П1.8), разложение которого по степеням z и w дает матрицу R_{ij} , имеет вид

$$A(z, w) = \sum_k^p f^{(k)}(z) g^{(k)}(w), \quad (3.3)$$

где $f^{(k)}(z)$ и $g^{(k)}(z)$ – произвольные функции.

Проверить это утверждение проще всего, используя детерминантное представление (П1.25). Действительно, следствием первого уравнения иерархии 2РТ

$$\tau_n \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \tau_n - \partial_{t_1} \tau_n \partial_{\bar{t}_1} \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} \quad (3.4)$$

⁹⁾ В действительности уже весьма давно [75, 76] (см. также, по-видимому, самую первую работу на эту тему [77]) было обнаружено, что язык теории групп является одним из самых эффективных и элегантных подходов к описанию классических интегрируемых систем.

и условия (3.1) является то, что $\log \tau_0$ и $\log \tau_p$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \tau_0 = \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \tau_p = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку относительная нормировка τ_n не фиксирована, мы всегда можем выбрать $\tau_0 = 1$. Тогда

$$\tau_0(t) = 1, \quad \tau_p(t) = \chi(t_1) \bar{\chi}(\bar{t}_1), \quad (3.6)$$

где $\chi(t_1)$ и $\bar{\chi}(\bar{t}_1)$ – произвольные функции. Двумеризованная модель Тоды с граничными условиями (3.6) была рассмотрена в [78, 79]. Решение уравнения (3.4) в этом случае имеет вид [80]

$$\tau_n(t) = \det \partial_{t_1}^{i-1} (-\partial_{\bar{t}_1})^{j-1} \tau_1(t) \quad (3.7)$$

с

$$\tau_1(t) = \sum_{k=1}^p a^{(k)}(t) \bar{a}^{(k)}(\bar{t}_1), \quad (3.8)$$

где функции $a^{(k)}(t)$ и $\bar{a}^{(k)}(\bar{t}_1)$ удовлетворяют условиям

$$\det \partial_{t_1}^{i-1} a^{(k)}(t) = \chi(t), \quad \det (-\partial_{\bar{t}_1})^{i-1} \bar{a}^{(k)}(\bar{t}_1) = \bar{\chi}(\bar{t}_1). \quad (3.9)$$

Этот результат отвечает формуле (П1.25) с ядром $A(z, w)$ вида (3.3). Подчеркнем, что хотя молекула Тоды выглядит как полубесконечная иерархия с еще одним, дополнительным проектором, она описывается, вообще говоря, бесконечным числом фермионных мод, поскольку матрица (3.2) имеет бесконечное число ненулевых матричных элементов.

Заметим, что функция τ_p может быть положена равной 1. Именно такой выбор отвечает группе $SL(p)$, общее же решение – группе $GL(p)$.

Обсудим теперь, как можно увидеть эту групповую структуру в молекуле Тоды. Для простоты мы далее рассмотрим пример системы Лиувилля ($p = 2$), поскольку обобщение на старшие группы выполняется прямолинейно. Простейший и непосредственный способ увидеть эту групповую структуру – это восстановить явную групповую структуру в выражениях (3.7), (3.8), что и было сделано в [81, 82]. Более того, такое представление допускает деформацию, так что квантовой системе Лиувилля отвечает просто квантовая группа $SL_q(2)$ [83–86]. Тем не менее для наших целей здесь удобнее использовать несколько иной взгляд на проблему [36].

А именно, мы вернемся к рассмотрению теории Лиувилля как редукции из общей двумеризованной модели Тоды, отвечающей группе $GL(\infty)$. Тогда функции $f^{(k)}(z)$ и $g^{(k)}(z)$ (или набор соответствующих коэффициентов $f_i^{(k)}$ и $g_i^{(k)}$) описывают способ, каким группа $SL(2)$, отвечающая системе Лиувилля, погружается при редукции в группу $GL(\infty)$. При этом различные погружения связаны внешними $GL(\infty)$ -автоморфизмами группы $SL(2)$.

Опишем теперь это более явными выражениями. Уравнение Лиувилля имеет следующий вид:

$$\partial \tau_1 \bar{\partial} \tau_1 - \tau_1 \partial \bar{\partial} \tau_1 = \tau_0 \tau_2 = 1 \quad (3.10)$$

или

$$\partial \bar{\partial} \phi = 2e^\phi, \quad \tau_1 = e^{-\phi/2}. \quad (3.11)$$

Его общее решение

$$\tau_1(t, \bar{t} | g) = (1 + A(t)B(\bar{t})) \left[\frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial \bar{t}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

параметризуется двумя произвольными функциями $A(t)$ и $B(\bar{t})$. Эти функции связаны с матрицей вращения фермионов следующими формулами, которые легко могут быть получены сравнением (П1.25) и (3.12):

$$\begin{aligned} G\psi_i G^{-1} &= \left(\iint dt \frac{e^{-tx}}{\sqrt{\partial A}} dx x^{i-1} \right) \cdot \sum_k \left(\iint d\bar{t} \frac{e^{-\bar{t}y}}{\sqrt{\partial B}} dy y^{k-1} \right) \psi_k + \\ &+ \left(\iint dt \frac{e^{-tx} A}{\sqrt{\partial A}} dx x^{i-1} \right) \cdot \sum_k \left(\iint d\bar{t} \frac{e^{-\bar{t}y} B}{\sqrt{\partial B}} dy y^{k-1} \right) \psi_k \equiv \\ &\equiv f_i \Psi^{(1)} + g_i \Psi^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, элемент G грассманиана, отвечающий системе Лиувилля, вращает фермионные моды в двумерном пространстве, заданном “одетыми” фермионами $\Psi_i^{(1,2)}$, которые зависят, естественно, от конкретного выбора G , т.е. от функций A и B . Каждый выбор G фиксирует такую пару фермионов, в свою очередь, задающих погружение группы $SL(2)$ в группу $GL(\infty)$. При этом все многообразие решений уравнения Лиувилля соответствует всем возможным выборам функций A и B , т.е. всем возможным подобным погружениям.

4. ОБОБЩЕННАЯ τ -ФУНКЦИЯ И БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В нашем предыдущем обсуждении τ -функций мы в основном сосредоточили внимание на их детерминантных представлениях. τ -Функцию, однако, можно ввести и иерархией определяющих уравнений – (бесконечным) набором билинейных уравнений Хироты типа (3.4) и (2.45). Далее мы покажем, как обобщить понятие τ -функции так, чтобы она по-прежнему удовлетворяла иерархии билинейных тождеств, а в следующем разделе обсудим ее детерминантные представления, которые оказываются более частным свойством.

Основная идея нашего подхода – полностью алгебраизовать интегрируемую иерархию, так чтобы ее можно было построить по любому представлению (старшего веса) любой группы. В том числе, квантование отвечает замене группы на ее квантовый аналог.

4.1. τ -Функция и билинейные тождества

τ -Функция. Итак, для данной универсальной обертывающей алгебры (УОА) $U(\mathcal{G})$ (над некоторым кольцом) и модуля Верма V этой алгебры мы определяем τ -функцию как производящую функцию всех матричных элементов $\langle m|g|\bar{m} \rangle_V$ [35]:

$$\tau_V(t, \bar{t} | g) \equiv \sum_{m, \bar{m} \in V} s_{m, \bar{m}}^V(t, \bar{t}) \langle m|g|\bar{m} \rangle_V. \quad (4.1)$$

Основная неоднозначность в этом определении связана с выбором функции $s_{m,\bar{m}}^V(t, \bar{t})$, который необходимо сделать некоторым “правильным” образом, чтобы получить τ -функцию с хорошими свойствами. Эта неоднозначность частично убирается для представлений старшего веса, когда можно потребовать, чтобы выполнялось

$$\tau_V(t, \bar{t} | g) = \langle 0_V | U(t) g \bar{U}(\bar{t}) | 0_V \rangle \quad (4.2)$$

с некоторыми операторами U и $\bar{U}$, не зависящими от V , где $|0_V\rangle$ – вектор старшего веса¹⁰⁾.

Это требование естественно возникает из рассмотрения τ -функции иерархии 2РТ, которая отвечает $\mathbf{G} = SL(p)$ с V – одним из $p - 1$ фундаментальных представлений. Мы вернемся к этому случаю подробнее в разделе 5.

Однако набор билинейных соотношений, которые мы теперь собираемся вывести, не зависит от конкретного выбора функций $s_{m,\bar{m}}^V(t, \bar{t})$, поэтому мы вернемся к их явному виду позднее.

Сплетающие операторы и билинейные тождества. Обобщим теперь вывод БТ, продемонстрированный в разделе 2, на случай общей τ -функции (4.1). Его полностью алгебраизуемой частью является получение соотношения, аналогичного (2.39). При этом сама процедура вывода теперь состоит из нескольких шагов.

1. Стартовой точкой является погружение модуля Верма $\hat{V}$ в тензорное произведение $V \otimes W$, где W – некоторое (произвольное) конечномерное представление $\mathcal{G}^{(1)}$. При фиксированном выборе V и W существует только конечное число возможностей для $\hat{V}$.

Определим теперь аналоги фермионов – сплетающие операторы. Так, правый сплетающий оператор типа W определен как гомоморфизм $\mathcal{G}$ -модулей:

$$E_R: \hat{V} \rightarrow V \otimes W. \quad (4.3)$$

Этот сплетающий оператор может быть построен для представления старшего веса

$$|0\rangle_{\hat{V}} = \left(\sum_{\{p_\alpha, i_\alpha\}} A_{\{p_\alpha, i_\alpha\}} \left(\prod_{\alpha > 0} (T_{-\alpha})^{p_\alpha} \otimes (T_{-\alpha})^{i_\alpha} \right) \right) |0\rangle_V \otimes |0\rangle_W, \quad (4.4)$$

а затем явно продолжен на все представление по формуле

$$\hat{V} = \left\{ |\mathbf{n}_\alpha\rangle_{\hat{V}} = \prod_{\alpha > 0} (\Delta(T_{-\alpha})^{n_\alpha} |0\rangle_{\hat{V}}) \right\}, \quad (4.5)$$

¹⁰⁾ Эволюционные операторы $U(t)$ ($\bar{U}(\bar{t})$) для общего представления зависят от всех повышающих (понижающих) генераторов алгебры, которые, вообще говоря, не коммутируют. Поэтому потоки по временам в описываемых ниже уравнениях иерархии не должны коммутировать, в отличие от случая стандартных интегрируемых иерархий. При специальных выборах представлений, например в фундаментальных представлениях классических групп, эти эволюционные операторы тем не менее могут коммутировать – см. подробнее раздел 6.

¹¹⁾ В случае аффинных алгебр необходимо использовать также конечномерные (evaluation) представления, это представления с нулевым центральным зарядом, но они не являются представлениями старшего веса (ср. с определением вершинных операторов в [87, 88]).

где $T_{-\alpha}$ – (понижающие) генераторы алгебры, лежащие в ее максимальной отрицательной (правой) нильпотентной подалгебре $\overline{N}(\mathcal{G})$, α – положительные корни, вакуумное состояние аннигилируется всеми повышающими операторами T_{α} , лежащими в положительной (левой) нильпотентной подалгебре $N(\mathcal{G})$, а модуль Верма строится действием всех генераторов $T_{-\alpha}$ на состояние старшего веса: $V = \{|\mathbf{n}_{\alpha}\rangle_V = \prod_{\alpha>0} (T_{-\alpha})^{n_{\alpha}} |\mathbf{0}\rangle_V\}$. Формула (4.5) выражает тот факт, что действие $\mathcal{G}$ на тензорном произведении представлений (модулей Верма) определяется копроизведением Δ и для конечномерных W позволяет представить каждое $|\mathbf{n}_{\alpha}\rangle_{\widehat{V}}$ в виде *конечной* суммы состояний $|\mathbf{m}_{\alpha}\rangle_V$ с коэффициентами, принимающими значение в элементах W .

2. На следующем шаге рассмотрим другую тройку модулей, определяющих левый сплетающийся оператор,

$$E'_L: \widehat{V}' \rightarrow W' \otimes V' \quad (4.6)$$

такую, что произведение $W \otimes W'$ содержит *единичное* представление $\mathcal{G}$.

БТ в терминах УОА. Теперь мы переходим непосредственно к выводу БТ. Они могут быть получены в двух формах – в операторной, аналогичной формуле (2.38), и в виде соотношения на матричные элементы (т.е. в терминах алгебры функций на группе). Первую форму можно получить в два шага. На первом шаге нужно рассмотреть проекцию произведения $W \otimes W'$ на единичное представление

$$\pi: W \otimes W' \rightarrow I, \quad (4.7)$$

явно обеспечиваемую умножением любого элемента из $W \otimes W'$ на

$$\pi = {}_W\langle \mathbf{0} | \otimes {}_{W'}\langle \mathbf{0} | \left(\sum_{\{i_{\alpha}, i'_{\alpha}\}} A_{\pi} \{i_{\alpha}, i'_{\alpha}\} \left(\prod_{\alpha>0} (T_{+\alpha})^{i_{\alpha}} \otimes (T_{+\alpha})^{i'_{\alpha}} \right) \right). \quad (4.8)$$

Используя эту проекцию, можно построить новый сплетающийся оператор

$$\Gamma: \widehat{V} \otimes \widehat{V}' \xrightarrow{E_R \otimes E'_L} V \otimes W \otimes W' \otimes V' \xrightarrow{I \otimes \pi \otimes I} V \otimes V', \quad (4.9)$$

который обладает свойством (2.38):

$$\Gamma(g \otimes g) = (g \otimes g) \Gamma \quad (4.10)$$

для любого группового элемента g такого, что

$$\Delta(g) = g \otimes g. \quad (4.11)$$

Иными словами, пространство $W \otimes W'$ содержит канонический элемент спаривания $w_i \otimes w^i$, который коммутирует с действием $\Delta(g)$. Это означает, что оператор $\sum_i E_i \otimes E^i: V \otimes V' \rightarrow \widehat{V} \otimes \widehat{V}'$ ($E_i \equiv E(w_i)$, $E^i \equiv E(w^i)$) коммутирует с $\Delta(g)$.

Тождество (4.10) является алгебраической формулировкой БТ. Для получения дифференциальных (или разностных) тождеств теперь, как и в рассмотренном выше примере иерархии 2РТ, мы должны использовать определение (4.2) и рассмотреть матричный элемент тождества (4.10) вместе с эволюционными операторами между состояниями старшего веса. Это приводит к тождествам (существует множество эквивалентных БТ

в соответствии со многими возможными выборами представлений V и $\widehat{V}$) на объекты типа ФБА, т.е. на средние (4.2) с дополнительными вставками сплетающих операторов E_i и E^i . Далее, используя коммутационные соотношения сплетающих операторов с генераторами алгебры, можно пронести E_i до вектора старшего веса. Результат этого коммутирования может быть смоделирован действием некоторых дифференциальных или разностных операторов, что и приводит к дифференциальным или разностным БТ. Этот последний шаг, однако, не всегда возможен, он требует правильного выбора операторов эволюции $U(t)$, $\overline{U}(\bar{t})$. До сих пор не существует общего рецепта для такого выбора. Далее, однако, мы построим несколько явных примеров, иллюстрирующих, как этот выбор обычно делается. Конечно, дифференциальная (разностная) форма БТ сильно зависит от конкретной алгебры и выбранного представления и не может быть получена в общей алгебраической форме. Более того, как мы покажем далее, для одной и той же системы можно получить разные дифференциальные иерархии или даже дифференциальные и разностные иерархии в зависимости от выбора операторов эволюции.

БТ в терминах алгебры функций. Ниже мы получим БТ в терминах матричных элементов, т.е. в терминах алгебры функций на группе. Этот язык дуален языку УОА.

А именно, напомним матричный элемент (4.10) между четырьмя состояниями

$${}_{V'}\langle k'|_V \langle k|(g \otimes g)\Gamma|n\rangle_{\widehat{V}}|n'\rangle_{\widehat{V}'} = {}_{V'}\langle k'|_V \langle k|\Gamma(g \otimes g)|n\rangle_{\widehat{V}}|n'\rangle_{\widehat{V}'}. \quad (4.12)$$

Действие оператора Γ может быть представлено формулой

$$\Gamma|n\rangle_{\widehat{\lambda}}|n'\rangle_{\widehat{\lambda}'} = \sum_{l, l'} |l\rangle_{\lambda}|l'\rangle_{\lambda'} \Gamma(l, l' | n, n'), \quad (4.13)$$

т.е. (4.12) превращается в

$$\begin{aligned} \sum_{m, m'} \Gamma(k, k' | m, m') \frac{\|k\|_{\widehat{\lambda}}^2 \|k'\|_{\widehat{\lambda}'}^2}{\|m\|_{\widehat{\lambda}}^2 \|m'\|_{\widehat{\lambda}'}^2} \langle m|g|n\rangle_{\widehat{\lambda}} \langle m'|g|n'\rangle_{\widehat{\lambda}'} = \\ = \sum_{l, l'} \langle k|g|l\rangle_{\lambda} \langle k'|g|l'\rangle_{\lambda'} \Gamma(l, l' | n, n'). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для того чтобы переписать это выражение как дифференциальное или разностное уравнение, нужно использовать формулу (4.1) для τ -функции. Тогда можно выписать производящее уравнение для тождеств (4.14), пользуясь явными формулами для матричных элементов $\Gamma(l, l' | n, n')$, которые могут быть вычислены в рамках теории групп (это просто соответствующие коэффициенты Клебша–Гордана). Опять для представления этого производящего уравнения в дифференциальной (разностной) форме требуется правильный выбор коэффициентов $s_{m, \overline{m}}^R(t, \bar{t})$ в формуле (4.1). Технически этот выбор часто проще проделать именно в данном представлении, т.е. для БТ, сформулированных в терминах алгебры функций. Мы проиллюстрируем этот метод в следующем разделе.

В заключение данного пункта заметим, что если бы мы хотели буквально воспроизвести вывод БТ, который был проделан для иерархии 2РТ, нам нужно было бы для *одной и той же* тройки представлений V, V', W ввести сопряженную пару сплетающих операторов

$$\Phi: \widehat{V} \otimes W \rightarrow V, \quad \Phi^*: V \rightarrow W \otimes \widehat{V}, \quad (4.15)$$

которые по определению удовлетворяют условиям

$$\Delta(g)\Phi = \Phi g, \quad \Phi^* \Delta(g) = g\Phi^*, \quad (4.16)$$

т.к. являются гомоморфизмами, а действие алгебры в тензорном произведении задается коумножением. Эти условия являются буквальным обобщением формулы (2.9), а канонический элемент опять коммутирует с групповым элементом g , давая уравнение (4.10). Однако предложенный нами вывод БТ с двумя тройками представлений кажется более общим, поэтому на протяжении настоящего раздела мы будем использовать именно его.

4.2. Пример. Квантовая группа $SL_q(2)$

Рассмотрим теперь в качестве примера, иллюстрирующего приведенную выше несколько абстрактную конструкцию обобщенной τ -функции и БТ, случай квантовой группы $SL_q(2)$ [35]. Одновременно этот пример служит иллюстрацией того, как устроены τ -функция и БТ для квантовых интегрируемых систем. Как уже говорилось, в рамках описываемого подхода квантование отвечает просто замене группы ее квантовым аналогом. Заметим, что здесь и далее, говоря о q -деформациях, мы всегда подразумеваем вещественный параметр $q > 1$, хотя остальные значения q могут также легко быть рассмотрены с помощью развитых методов.

Билинейные тождества. Алгебра $U_q(SL(2))$ задается генераторами T_+ , T_- и T_0 с коммутационными соотношениями¹²⁾

$$q^{T_0} T_{\pm} q^{-T_0} = q^{\pm 1} T_{\pm}, \quad [T_+, T_-] = \frac{q^{2T_0} - q^{-2T_0}}{q - q^{-1}} \quad (4.17)$$

и коумножением

$$\Delta(T_{\pm}) = q^{T_0} \otimes T_{\pm} + T_{\pm} \otimes q^{-T_0}, \quad \Delta(q^{T_0}) = q^{T_0} \otimes q^{T_0}. \quad (4.18)$$

Модуль Верма V_{λ} старшего веса λ (не обязательно полуцелого) состоит из элементов

$$|n\rangle_{\lambda} \equiv T_-^n |0\rangle_{\lambda}, \quad n \geq 0, \quad (4.19)$$

таких, что

$$\begin{aligned} T_- |n\rangle_{\lambda} &= |n+1\rangle_{\lambda}, \quad T_0 |n\rangle_{\lambda} = (\lambda - n) |n\rangle_{\lambda}, \quad T_+ |n\rangle_{\lambda} \equiv b_n(\lambda) |n-1\rangle_{\lambda}, \\ b_n(\lambda) &= [n]_q [2\lambda + 1 - n]_q, \quad [x]_q \equiv \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! \equiv [1]_q [2]_q \cdots [n]_q, \\ \|n\|_{\lambda}^2 &\equiv {}_{\lambda}\langle n | n \rangle_{\lambda} = \frac{[n]_q! \Gamma_q(2\lambda + 1)}{\Gamma_q(2\lambda + 1 - n)} \stackrel{\lambda \in \mathbf{Z}/2}{=} \frac{[2\lambda]_q! [n]_q!}{[2\lambda - n]_q!}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь мы получим БТ, работая в терминах алгебры функций на квантовой группе, т.е. явно вычисляя матричные элементы оператора Γ .

В качестве модуля W мы выбираем неприводимое представление $U_q(SL(2))$ со спином $1/2$, тогда $\widehat{V} = V_{\lambda \pm 1/2}$, $V = V_{\lambda}$.

¹²⁾ Все необходимые факты о квантовых группах, используемые ниже, могут быть найдены в обзоре [89].

Для вычисления матричных элементов Γ нужно спроецировать тензорное произведение двух разных W на синглетное состояние $S = |+\rangle|-\rangle - q|-\rangle|+\rangle$:

$$(A|+\rangle + B|-\rangle) \otimes (|+\rangle C + |-\rangle D) \rightarrow AD - qBC. \quad (4.21)$$

При нашем выборе W нужно рассмотреть два различных случая:

случай А: $\widehat{V} = V_{\lambda-\frac{1}{2}}$ и $\widehat{V}' = V_{\lambda'-\frac{1}{2}}$ или

случай В: $\widehat{V} = V_{\lambda-\frac{1}{2}}$ и $\widehat{V}' = V_{\lambda'+\frac{1}{2}}$.

Пользуясь формулами (4.5) и (4.18), теперь нетрудно вычислить матричные элементы оператора проецирования¹³⁾.

Случай А:

$$|n\rangle_{\lambda-\frac{1}{2}}|n'\rangle_{\lambda'-\frac{1}{2}} \rightarrow q^{\frac{n'-n-1}{2}} ([n' - 2\lambda']_q q^{\lambda'} |n+1\rangle_{\lambda}|n'\rangle_{\lambda'} - [n - 2\lambda]_q q^{-\lambda} |n\rangle_{\lambda}|n'+1\rangle_{\lambda'}). \quad (4.22)$$

Случай В:

$$|n\rangle_{\lambda+\frac{1}{2}}|n'\rangle_{\lambda'-\frac{1}{2}} \rightarrow q^{\frac{n'-n-1}{2}} ([n' - 2\lambda']_q q^{\lambda'} |n\rangle_{\lambda}|n'\rangle_{\lambda'} - [n]_q q^{\lambda+1} |n-1\rangle_{\lambda}|n'+1\rangle_{\lambda'}). \quad (4.23)$$

Используя явные формулы (4.22), (4.23) для матричных элементов $\Gamma(l, l' | n, n')$, мы замечаем, что для тождеств (4.14) имеется простое производящее уравнение (см. конец предыдущего пункта), если выбрать в качестве эволюционных операторов q -экспоненты¹⁴⁾ от генераторов $U(t) = e_q(tT_+)$, $\overline{U}(\bar{t}) = e_q(\bar{t}T_-)$. Это производящее уравнение имеет вид

Случай А:

$$\begin{aligned} & \sqrt{M_{\bar{t}}^- M_{\bar{t}'}^+} (q^{\lambda'} D_{\bar{t}}^{(0)} \bar{t}' D_{\bar{t}'}^{(2\lambda')} - q^{-\lambda} \bar{t} D_{\bar{t}}^{(2\lambda)} D_{\bar{t}'}^{(0)}) \tau_{\lambda}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'}(t', \bar{t}' | g) = \\ & = [2\lambda]_q [2\lambda']_q \sqrt{M_t^- M_{t'}^+} (q^{-(\lambda+\frac{1}{2})} t' - q^{(\lambda'+\frac{1}{2})} t) \tau_{\lambda-\frac{1}{2}}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'-\frac{1}{2}}(t', \bar{t}' | g), \end{aligned} \quad (4.24)$$

здесь

$$D_t^{(\alpha)} \equiv \frac{q^{-\alpha} M_t^+ - q^{\alpha} M_t^-}{(q - q^{-1})t},$$

а $M^{\pm}$ – мультипликативные операторы сдвига: $M_t^{\pm} f(t) = f(q^{\pm 1} t)$.

Случай В:

$$\begin{aligned} & \sqrt{M_{\bar{t}}^- M_{\bar{t}'}^+} (q^{\lambda'} \bar{t}' D_{\bar{t}}^{(2\lambda')} - q^{(\lambda+1)} \bar{t} D_{\bar{t}}^{(0)}) \tau_{\lambda}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'}(t', \bar{t}' | g) = \\ & = \frac{[2\lambda']_q}{[2\lambda+1]_q} \sqrt{M_t^- M_{t'}^+} (q^{\lambda'} t D_t^{(2\lambda+1)} - q^{\lambda} t' D_t^{(0)}) \tau_{\lambda+\frac{1}{2}}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'-\frac{1}{2}}(t', \bar{t}' | g). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Классический предел этих уравнений имеет вид:

¹³⁾ Чтобы упростить формулы, здесь и далее мы опускаем знак тензорного произведения из обозначения состояний $|+\rangle \otimes |0\rangle_{\lambda}$ и т.д.

¹⁴⁾ $e_q(x) \equiv \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{[n]_q!}$.

Случай А:

$$\begin{aligned} \left(2\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} - 2\lambda' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (\bar{t}' - \bar{t}) \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \bar{t}'} \right) \tau_\lambda(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'}(t', \bar{t}' | g) = \\ = 4\lambda\lambda' (t' - t) \tau_{\lambda-\frac{1}{2}}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'-\frac{1}{2}}(t', \bar{t}' | g). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Случай В:

$$\begin{aligned} \left[(\bar{t}' - \bar{t}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} - 2\lambda' \right] \tau_\lambda(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'}(t', \bar{t}' | g) = \\ = \frac{2\lambda'}{2\lambda + 1} \left[(t - t') \frac{\partial}{\partial t} - 2\lambda - 1 \right] \tau_{\lambda+\frac{1}{2}}(t, \bar{t} | g) \tau_{\lambda'-\frac{1}{2}}(t', \bar{t}' | g). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом, мы получаем *разные* БТ, которым должна удовлетворять *одна и та же* τ -функция. В действительности достаточно использовать, например, первое уравнение (случай А), для того чтобы полностью найти τ -функцию.

Классический предел. Перед тем как двигаться дальше, рассмотрим случай классической группы $SL(2)$, τ -функция которой удовлетворяет БТ (4.26), (4.27). Можно построить общее решение этих уравнений, однако еще проще вычислить τ -функцию прямо из определения (4.2). Для представления с произвольным спином λ результат имеет вид

$$\tau_\lambda = {}_\lambda \langle 0 | e^{tT_-} g e^{\bar{t}T_+} | 0 \rangle_\lambda = (a + b\bar{t} + ct + dt\bar{t})^{2\lambda}, \quad (4.28)$$

где групповой элемент g параметризован тремя параметрами:

$$g = e^{x+T_+} e^{x_0 T_0} e^{x-T_-} \quad (4.29)$$

и

$$a \equiv e^{\frac{1}{2}x_0} + x_+ x_- e^{-\frac{1}{2}x_0}, \quad b \equiv x_+ e^{-\frac{1}{2}x_0}, \quad c \equiv e^{-\frac{1}{2}x_0} x_-, \quad d \equiv e^{-\frac{1}{2}x_0}, \quad (4.30)$$

т. е.

$$ad - bc = 1. \quad (4.31)$$

Вернемся теперь к БТ. Как мы уже отмечали, достаточно изучить уравнение (4.26), поскольку каждое решение этого уравнения удовлетворяет всем остальным БТ, например уравнению (4.27) или другим, полученным при других выборах V , $\hat{V}$ и W . Общее решение (4.26) является 3-параметрическим и, конечно, совпадает с (4.28).

Заметим, что (4.28) при $\lambda = 1/2$ (фундаментальное представление) имеет мало общего с решением уравнения Лиувилля (3.12), которое, напомним, ассоциируется с $SL(2)$ -редукцией (см. раздел 3). Связь между ними, однако, имеется, хотя набор решений уравнения Лиувилля (3.10) гораздо богаче (решения (4.26) в этом наборе содержатся).

Выясним, как ограничивается набор решений уравнения Лиувилля. Для этого переписем уравнение (4.26), как это обычно делается в уравнениях Хироты, в виде системы

дифференциальных уравнений, полученных разложением по степеням $\epsilon = (t - t')/2$ и $\bar{\epsilon} = (\bar{t} - \bar{t}')/2$. К примеру, для $\lambda = \lambda'$ получим из (4.26):

$$\begin{aligned} \text{коэффициент перед } \epsilon : \quad & \partial\tau_\lambda \bar{\partial}\tau_\lambda - \tau_\lambda \partial\bar{\partial}\tau_\lambda = 2\lambda\tau_{\lambda-\frac{1}{2}}^2, \\ \text{коэффициент перед } \bar{\epsilon} : \quad & 2\lambda\tau_\lambda \bar{\partial}^2\tau_\lambda = (2\lambda - 1)(\bar{\partial}\tau_\lambda)^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если $\lambda = 1/2$, первое из этих уравнений – просто уравнение Лиувилля (3.10):

$$\partial\tau_{\frac{1}{2}} \bar{\partial}\tau_{\frac{1}{2}} - \tau_{\frac{1}{2}} \partial\bar{\partial}\tau_{\frac{1}{2}} = \tau_0^2 = 1, \quad (4.33)$$

в то время как второе

$$\bar{\partial}^2\tau_{\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.34)$$

– условие, сильно ограничивающее вид возможных решений уравнения Лиувилля. Оно подразумевает, что две произвольные функции $A(t)$ и $B(\bar{t})$, параметризующие эти решения, сводятся к линейным функциям времен. На языке грассманиана все это означает, что рассматриваемая здесь $SL(2)$ - τ -функция отвечает погружению матрицы $SL(2)$ в левый верхний угол матрицы $GL(\infty)$ (см. раздел 3), чего, конечно, следовало ожидать, поскольку $SL(2)$ - τ -функция ничего “не знает” про группу $GL(\infty)$. В частности, для квантования “полноценного” уравнения Лиувилля необходимо вначале изучить систему $GL_q(\infty)$, а затем ее соответствующую редукцию.

Решения квантовых БТ. Перейдем теперь к решению квантовых БТ. Общее s -числовое решение уравнения (4.24) может быть явно построено. Действительно, легко проверить, что

$$\tau_\lambda = \left[\alpha + \frac{1}{\alpha} t\bar{t} \right]_q^{2\lambda} \equiv \sum_{i \geq 0} \frac{\Gamma_q(2\lambda + 1)}{\Gamma_q(2\lambda + 1 - i)} \frac{\alpha^{2\lambda - 2i} (t\bar{t})^i}{[i]_q!} \quad (4.35)$$

удовлетворяет уравнению (4.24), поскольку

$$\begin{aligned} D_t^{(0)} \left[\alpha + \frac{1}{\alpha} t\bar{t} \right]_q^{2\lambda} &= \frac{1}{\alpha} [2\lambda]_q \left[\alpha + \frac{1}{\alpha} t\bar{t} \right]_q^{2\lambda-1} \bar{t}, \\ t D_t^{(2\lambda)} \left[\alpha + \frac{1}{\alpha} t\bar{t} \right]_q^{2\lambda} &= -\alpha [2\lambda]_q \left[\alpha + \frac{1}{\alpha} t\bar{t} \right]_q^{2\lambda-1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Это, однако, дает только однопараметрическое семейство решений в противоположность классическому случаю. Это объясняется тем, что из всех элементов $U_q(SL(2))$ только картановский имеет правильный закон коумножения (4.11), в то время как в классическом случае существует трехпараметрическое семейство групповых элементов (4.29), удовлетворяющих этому условию.

Квантовая τ -функция. Способ построения трехпараметрического семейства решений БТ, однако, имеется и в квантовом случае. Для этого достаточно рассмотреть некоммутативную τ -функцию¹⁵⁾. Действительно, (4.1) подразумевает, что τ -функция принимает значения в алгебре функций на квантовой группе $SL_q(2)$, т.е. является *некоммутативной* величиной. Например, в фундаментальном представлении она равна

$$\tau_{\frac{1}{2}} = \langle +|g|+ \rangle + \bar{t}\langle +|g|- \rangle + t\langle -|g|+ \rangle + t\bar{t}\langle -|g|- \rangle = a + b\bar{t} + ct + dt\bar{t}, \quad (4.37)$$

где генераторы a, b, c, d алгебры функций $A(SL_q(2))$ являются элементами матрицы

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - qbc = 1 \quad (4.38)$$

с коммутационными соотношениями, заданными уравнениями $\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{T}$ [26]:

$$\begin{aligned} ab &= qba, & ac &= qca, & bd &= qdb, \\ cd &= qdc, & bc &= cb, & ad - da &= (q - q^{-1})bc. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Для того чтобы получить такую некоммутативную τ -функцию из выражения (4.2), нужно рассмотреть g как элемент УОА, заданной над некоторым *некоммутативным* кольцом вместо поля комплексных чисел. Это увеличит число групповых элементов, удовлетворяющих условию (4.11). Таким кольцом является в точности $A_q(SL(2))$ (см. следующий пункт).

Для того чтобы сконструировать некоммутативную τ -функцию в любом представлении спина λ , можно разложить это представление по представлениям со спинами $\lambda - 1/2$ и $1/2$ [35]:

$$\begin{aligned} {}_{\lambda}\langle k|g|n\rangle_{\lambda} &= q^{-\frac{k+n}{2}} \left[{}_{\lambda-\frac{1}{2}}\langle k|g|n\rangle_{\lambda-\frac{1}{2}} \langle +|g|+ \rangle + q^{\lambda}[n]_q {}_{\lambda-\frac{1}{2}}\langle k|g|n-1\rangle_{\lambda-\frac{1}{2}} \langle +|g|- \rangle + \right. \\ &\quad \left. + q^{\lambda}[k]_q {}_{\lambda-\frac{1}{2}}\langle k-1|g|n\rangle_{\lambda-\frac{1}{2}} \langle -|g|+ \rangle + \right. \\ &\quad \left. + q^{2\lambda}[k]_q [n]_q {}_{\lambda-\frac{1}{2}}\langle k-1|g|n-1\rangle_{\lambda-\frac{1}{2}} \langle -|g|- \rangle \right]_q. \end{aligned} \quad (4.40)$$

При $\lambda \in \mathbf{Z}/2$ рекуррентное применение этой процедуры дает

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda}(t, \bar{t}|g) &= \tau_{\lambda-\frac{1}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}t, q^{-\frac{1}{2}}\bar{t} | g) \tau_{\frac{1}{2}}(q^{\lambda-\frac{1}{2}}t, q^{\lambda-\frac{1}{2}}\bar{t} | g) = \\ &= \tau_{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}-\lambda}t, q^{\frac{1}{2}-\lambda}\bar{t} | g) \tau_{\frac{1}{2}}(q^{\frac{3}{2}-\lambda}t, q^{\frac{3}{2}-\lambda}\bar{t} | g) \dots \tau_{\frac{1}{2}}(q^{\lambda-\frac{1}{2}}t, q^{\lambda-\frac{1}{2}}\bar{t} | g). \end{aligned} \quad (4.41)$$

¹⁵⁾Идея рассмотрения некоммутативной τ -функции была также предложена в [86].

4.3. Универсальный $\mathbf{T}$ -оператор (групповой элемент)

Общая конструкция. Опишем теперь более явно конструкцию группового элемента, заданного над некоммутативным кольцом – алгеброй функций на квантовой группе, а именно, мы построим такой элемент $g \in U_q(\mathcal{G}) \otimes A(\mathbf{G})$ тензорного произведения $\mathcal{UOA}$ $U_q(\mathcal{G})$ и дуальной ей алгебры функций $A(\mathbf{G})$, что

$$\Delta_U(g) = g \otimes_U g \in A(\mathbf{G}) \otimes U_q(\mathcal{G}) \otimes U_q(\mathcal{G}). \quad (4.42)$$

Для построения этого элемента [26, 90, 36, 91] фиксируем некоторый базис $T^{(\alpha)}$ в $U_q(\mathcal{G})$. Между $U_q(\mathcal{G})$ и $A(\mathbf{G})$ существует невырожденное спаривание, которое мы будем обозначать $\langle \dots \rangle$. Зафиксируем также базис $X^{(\beta)}$ в $A(\mathbf{G})$, ортогональный к $T^{(\alpha)}$ по отношению к этому спариванию. Тогда сумма

$$\mathbf{T} \equiv \sum_{\alpha} X^{(\alpha)} \otimes T^{(\alpha)} \in A(\mathbf{G}) \otimes U_q(\mathcal{G}) \quad (4.43)$$

как раз и является искомым групповым элементом. Он называется универсальной $\mathbf{T}$ -матрицей (поскольку сплетается универсальной $\mathcal{R}$ -матрицей) или универсальным групповым элементом.

Для доказательства того, что (4.43) удовлетворяет формуле (4.42), нужно заметить, что матрицы $M_{\gamma}^{\alpha\beta}$ и $D_{\beta\gamma}^{\alpha}$, задающие законы умножения и коумножения в $U_q(\mathcal{G})$, соответственно,

$$T^{(\alpha)} \cdot T^{(\beta)} \equiv M_{\gamma}^{\alpha\beta} T^{(\gamma)}, \quad \Delta(T^{(\alpha)}) \equiv D_{\beta\gamma}^{\alpha} T^{(\beta)} \otimes T^{(\gamma)}, \quad (4.44)$$

индуцируют наоборот соответственно коумножение и умножение в дуальной алгебре $A(\mathbf{G})$:

$$\begin{aligned} D_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \langle \Delta(T^{(\alpha)}), X^{(\beta)} \otimes X^{(\gamma)} \rangle \equiv \langle T^{(\alpha)}, X^{(\beta)} \cdot X^{(\gamma)} \rangle, \\ M_{\gamma}^{\alpha\beta} &= \langle T^{(\alpha)} T^{(\beta)}, X^{(\gamma)} \rangle \equiv \langle T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)}, \Delta(X^{(\gamma)}) \rangle, \end{aligned} \quad (4.45)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta_U(\mathbf{T}) &= \sum_{\alpha} X^{(\alpha)} \otimes \Delta_U(T^{(\alpha)}) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} D_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)} \otimes T^{(\gamma)} = \\ &= \sum_{\beta, \gamma} X^{(\beta)} X^{(\gamma)} \otimes T^{(\beta)} \otimes T^{(\gamma)} = \mathbf{T} \otimes_U \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Это свойство является первым определяющим свойством универсального $\mathbf{T}$ -оператора, совпадающим с классическим. Второе свойство, которое позволяет рассматривать $\mathbf{T}$ как элемент “настоящей” группы, – это групповой закон умножения $g \cdot g' = g''$, заданный отображением

$$g \cdot g' \equiv \mathbf{T} \otimes_A \mathbf{T} \in A(\mathbf{G}) \otimes A(\mathbf{G}) \otimes U_q(\mathcal{G}) \rightarrow g'' \in A(\mathbf{G}) \otimes U_q(\mathcal{G}). \quad (4.47)$$

Это отображение канонически дается коумножением и снова является универсальным $\mathbf{T}$ -оператором:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes_A \mathbf{T} &= \sum_{\alpha, \beta} X^{(\alpha)} \otimes X^{(\beta)} \otimes T^{(\alpha)} T^{(\beta)} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} M_{\alpha, \beta}^{\gamma} X^{(\alpha)} \otimes X^{(\beta)} \otimes T^{(\gamma)} = \sum_{\alpha} \Delta(X^{(\alpha)}) \otimes T^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

т. е.

$$\begin{aligned} g &\equiv \mathbf{T}(X, T), & g' &\equiv \mathbf{T}(X', T), & g'' &\equiv \mathbf{T}(X'', T), \\ X &\equiv \{X^{(\alpha)} \otimes I\} \in A(\mathbf{G}) \otimes I, & X' &\equiv \{I \otimes X^{(\alpha)}\} \in I \otimes A(\mathbf{G}), \\ X'' &\equiv \{\Delta(X^{(\alpha)})\} \in A(\mathbf{G}) \otimes A(\mathbf{G}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Т-оператор для $SL_q(2)$. Теперь для получения более компактных формул переопределим генераторы $U_q(SL(2))$ так, чтобы получился несимметричный закон коумножения:

$$\begin{aligned} T_+ &\rightarrow T_+ q^{-T_0}, & T_- &\rightarrow q^{T_0} T_-, \\ \Delta(T_+) &= I \otimes T_+ + T_+ \otimes q^{-2T_0}, & \Delta(T_-) &= T_- \otimes I + q^{2T_0} \otimes T_-. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Эта замена приводит к тому, что всюду q -число $[n]_q$ заменяется на q -число

$$(n)_q \equiv \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2},$$

а q -экспонента $e_q(x)$ — на

$$\mathcal{E}_q(x) \equiv \frac{1}{e_q(-x)} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{[k]_q!} q^{-k(k-1)/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k)_q!}.$$

Кроме того, разностные операторы

$$D_t^{(\alpha)} = \frac{q^{-\alpha} M_t^+ - q^{\alpha} M_t^-}{(q - q^{-1})t},$$

заменяются на

$$D_t^{(\alpha)} = \frac{q^{2\alpha} M_t^+ - 1}{(q^2 - 1)t}.$$

Фиксируем теперь базис $T^{(\alpha)} = T_+^i T_0^j T_-^k$ в $U_q(SL(2))$. Тогда, используя формулу копроизведения для $T^{(\alpha)}$, можно вычислить матрицу $D_{\beta\gamma}^\alpha$ (4.45) и явно получить ортонормированный базис $X^{(\alpha)}$:

$$X^{(\alpha)} = \frac{x_+^i}{(i)_q!} \frac{x_0^j}{j!} \frac{x_-^k}{(k)_{q^{-1}}!}, \quad (4.51)$$

где порождающие элементы $x_\pm, x_0$ образуют борелевскую алгебру Ли

$$[x_0, x_\pm] = (\log q)x_\pm, \quad [x_+, x_-] = 0. \quad (4.52)$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{T} = \mathcal{E}_q^{x_+ T_+} e^{x_0 T_0} \mathcal{E}_{q^{-1}}^{x_- T_-}. \quad (4.53)$$

Общая формула для Т-оператора. В случае общей (простой) алгебры Ли существуют различные явные представления Т-оператора. В [90], например, в соответствии с общей конструкцией (4.43) был рассмотрен так называемый базис Пуанкаре–Биркгоффа–Витта (ПБВ) [89], представленный упорядоченными мономами генераторов алгебры, отвечающих всем корням. В этом базисе групповой элемент представляется произведением q -экспонент типа (4.53), заданным разложением Гаусса, и образующие алгебры функций при этом удовлетворяют соотношениям типа (4.52). В действительности эти соотношения снова задают борелевскую алгебру Ли, что связано с общей структурой алгебры функций как кодубля (см. [36] и приведенную там ссылку [11]).

Другое интересное представление группового элемента для произвольной простой алгебры Ли было найдено в [91]. Это представление замечательно тем, что оно строится в базисе Шевалле УОА, т.е. на генераторах, отвечающих простым корням. Построить линейный базис в УОА в терминах генераторов Шевалле для произвольной простой алгебры Ли является трудной задачей, поскольку эти генераторы удовлетворяют дополнительным соотношениям – соотношениям Серра [92], и, следовательно, не являются свободными образующими. В работе [91], однако, групповой элемент в этих терминах был построен не путем использования выражений типа (4.43), а прямой проверкой соотношения (4.42) с учетом соотношений Серра.

В [91] групповой элемент был представлен в виде

$$g = g_U g_D g_L, \quad (4.54)$$

$$g_U = \prod_s < \mathcal{E}_q^{\theta_s T_{i(s)}}, \quad g_L = \prod_s > \mathcal{E}_{q^{-1}}^{\chi_s T_{-i(s)}}, \quad g_D = \prod_{i=1}^{r_G} e^{\vec{\phi} \vec{H}},$$

где генераторы T_i отвечают только *простым* корням $\pm \vec{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, r_G$, а $<$ и $>$ означают упорядочение сомножителей. Каждый конкретный корень $\vec{\alpha}_i$ может появляться в этом произведении несколько раз, так что существуют различные параметризации группового элемента, зависящие от выбора набора $\{s\}$ и отображения $i(s)$ выбранного набора в множество простых корней. Технические вычисления в терминах генераторов Шевалле оказываются проще, поскольку они имеют особенно простой закон копроизведения:

$$\begin{aligned} \Delta(T_i) &= T_i \otimes q^{-2H_i} + I \otimes T_i, \\ \Delta(T_{-i}) &= T_{-i} \otimes I + q^{2H_i} \otimes T_{-i}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Заметим, что формула (4.54) выписана для алгебр с корнями одной длины. В общем случае вместо q -экспоненты с параметром q необходимо рассматривать q -экспоненту с параметром $q^{\|\vec{\alpha}_i\|^2/2}$.

Образующие алгебры функций θ , χ , $\vec{\phi}$ в данной параметризации удовлетворяют квадратичной алгебре, являющейся экспонентой от алгебры Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \theta_s \theta_{s'} &= q^{-\vec{\alpha}_{i(s)} \vec{\alpha}_{i(s')}} \theta_{s'} \theta_s, \quad s < s', \\ \chi_s \chi_{s'} &= q^{-\vec{\alpha}_{i(s)} \vec{\alpha}_{i(s')}} \chi_{s'} \chi_s, \quad s < s', \\ e^{\vec{\beta} \vec{\phi}} \theta_s &= q^{\vec{\beta} \vec{\alpha}_{i(s)}} \theta_s e^{\vec{\beta} \vec{\phi}}, \\ e^{\vec{\beta} \vec{\phi}} \chi_s &= q^{\vec{\beta} \vec{\alpha}_{i(s)}} \chi_s e^{\vec{\beta} \vec{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Эти соотношения могут быть найдены из параметризации (4.54) и формулы (4.42).

4.4. τ -Функция и представления алгебры функций

По нашему определению некоммутативная τ -функция – это элемент алгебры функций на группе. Поэтому естественной задачей является фиксировать некоторое представление этой алгебры, а затем определить “значение” соответствующей τ -функции в этом представлении. При этом следует отождествлять каждое представление с некоторым решением интегрируемой иерархии. В действительности именно так в инвариантных терминах должна быть описана группа, действующая в пространстве спектрального параметра [40]. Действительно, конкретное решение классической иерархии 2РТ описывается τ -функцией (2.1) с некоторой конкретной матрицей $\mathcal{G}_{mn}$, задающей элемент грассманиана (2.6). С точки зрения универсального группового элемента это означает, что мы фиксируем некоторое тривиальное представление алгебры функций, которое задается просто c -числами. Такие представления исчерпывают представления алгебры функций на классической группе, однако в квантовом случае бывают и нетривиальные представления. Тем не менее естественно по-прежнему отождествлять каждое представление $A(\mathbf{G})$ с некоторым решением иерархии БТ. Естественно, любая редукция интегрируемой системы выделяет некоторое подпространство в пространстве решений, т.е. ограничивает класс рассматриваемых представлений и, как правило, может быть описана некоторой дополнительной групповой структурой (подобно молекуле Тоды – см. раздел 3).

Итак, мы пришли к следующей общей алгебраической схеме построения интегрируемой иерархии:

Для любой заданной УОА $U(\mathcal{G})$ при помощи процедуры, описанной в данном разделе, вводится τ -функция, удовлетворяющая БТ и принимающая значения в алгебре функций на группе $A(\mathbf{G})$. При этом задано естественное действие УОА на алгебре функций, а конкретное решение БТ в случае алгебры Ли, отвечающее решению соответствующей классической иерархии, задается фиксацией представления алгебры функций.

Рассмотрим теперь квантовую τ -функцию, которая является оператором. Тогда возникает естественный вопрос, нельзя ли получить из нее некоторые c -числовые величины. Это важно, например, для выявления связи между производящей функцией корреляторов квантовой системы и τ -функцией. Простейшей c -числовой величиной является “двойная” производящая функция, генерирующая матричные элементы как представления, так и копредставления УОА (копредставление УОА эквивалентно по дуальности представлению алгебры функций). Эта производящая функция зависит от четырех наборов времен и должна удовлетворять БТ по отношению к индексам как представления, так и копредставления, т.е. описывать некоторую *четырёхмерную* систему уравнений.

Другой c -числовой функцией является сама τ -функция в тривиальном представлении. Этот случай наиболее близок к классическому случаю и потому особенно интересен. Далее мы обсудим этот случай детальнее, однако вначале опишем вкратце структуру копредставлений квантовой группы. Мы рассмотрим простейший пример $SL_q(2)$ (для более общего рассмотрения см. [36] и приведенную там ссылку [11]).

Копредставления УОА $SL_q(2)$ даются представлениями алгебры (4.52). Это борелевская алгебра, поэтому она не имеет нетривиальных конечномерных неприводимых представлений [92]. Все конечномерные представления приводимы, но не вполне приво-

димы. Неприводимые представления были впервые изучены в [93]¹⁶⁾. Для сравнения с результатами этой работы перепишем стандартные генераторы $A(SL_q(2))$ (4.39) в терминах алгебры (4.52) (это своего рода бозонизация алгебры функций):

$$a = e^{\frac{1}{2}x_0} + x_+ x_- e^{-\frac{1}{2}x_0}, \quad b = x_+ e^{-\frac{1}{2}x_0}, \quad c = e^{-\frac{1}{2}x_0} x_-, \quad d = e^{-\frac{1}{2}x_0}. \quad (4.57)$$

Замечательно, что эти выражения совпадают с (4.30), но различные x при этом не коммутируют.

В этих терминах имеются два типа неприводимых представлений: тривиальное, которое дается $x_+ = x_- = 0$, т.е. $ad = 1$, $b = c = 0$, и бесконечномерное, которое можно задать явно действием на базис $\{e_k\}_{k \geq 0}$ [93]:

$$\begin{aligned} ae_k &= (1 - q^{2k})^{\frac{1}{2}} e_{k-1} (ae_0 = 0), & de_k &= (1 - q^{2k+2})^{\frac{1}{2}} e_{k+1}, \\ ce_k &= \theta q^k e_k, & be_k &= -\theta^{-1} q^{k+1} e_k. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Эта структура представлений легко обобщается на другие квантовые группы (ранга r), поскольку алгебры образующих x всегда борелевские. Таким образом, все множество неприводимых представлений снова исчерпывается тривиальными и бесконечномерными (и те, и другие r -параметрические) представлениями. Явные формулы для них могут быть найдены в [94, 95] (см. также [36] и приведенную там ссылку [11]).

τ -Функция в тривиальном представлении и разностная иерархия Каживары–Охты–Сатсумы (КОС). Итак, τ -функция в тривиальном представлении дает некоторый образец c -числовой функции. Конечно, эта функция слишком проста и неинтересна. Сейчас, однако, мы получим уравнение, которому удовлетворяет τ -функция в тривиальном представлении и решениями которого являются также уже и вполне нетривиальные c -числовые функции.

Заметим вначале, что даже в случае $SL_q(2)$ не существует наивного детерминантного представления, аналогичного (2.55). Действительно, введем (для краткости обозначаем $D \equiv D^{(1)}$)

$$C_1^1 = \tau_F = a + b\bar{t} + ct + dt\bar{t}, \quad (4.59)$$

тогда

$$C_2^1 = D_{\bar{t}} C_1^1 = b + dt, \quad C_1^2 = D_t C_1^1 = c + d\bar{t}, \quad C_2^2 = D_{\bar{t}} D_t C_1^1 = d \quad (4.60)$$

и C_b^a не может быть отождествлено с образующими элементами координатного кольца $SL_q(2)$ a, b, c, d (4.39) (например, $C_2^1 C_1^1 \neq C_1^2 C_2^1$). Таким образом, детерминант $\det_q C$ не является адекватным объектом и его (или определение C) необходимо модифицировать, а именно, в случае $SL_q(2)$ подходящая формула имеет вид

$$\tau_{F(2)} = \det_q g = 1 = C_1^1 C_2^2 - q C_2^1 M_{\bar{t}}^- C_1^2 = \tau_F D_t D_{\bar{t}} \tau_F - q D_{\bar{t}} \tau_F M_t^- D_t \tau_F. \quad (4.61)$$

К детерминантным формулам для старших групп мы еще вернемся в следующем разделе, а пока заметим, что, если взять τ -функцию в тривиальном представлении

¹⁶⁾ Строго говоря, в [93] изучались $*$ -представления, т.е. представления с дополнительной инволюцией.

$A(SL_q(2)) - ad = 1$, $b = c = 0$, она будет удовлетворять более простому уравнению (оно было впервые предложено в [96, 97])

$$\tau_F D_t D_{\bar{t}} \tau_F - D_{\bar{t}} \tau_F D_t \tau_F = 1. \quad (4.62)$$

Это уравнение имеет вид, близкий к уравнению (3.4), и форму, в отличие от (4.61) легко обобщаемую на $SL_q(n)$ -случай. Это неудивительно, поскольку уравнение (4.62) решается τ -функцией в тривиальном представлении.

Еще одно соображение в пользу естественности уравнения (4.62) – это то, что оно естественно ведет к детерминанту q -полиномов Шура (4.65). Действительно, рассмотрим тривиальный элемент g (отвечающий тривиальному представлению $A(\mathbf{G})$). Тогда для случая $SL_q(n)$ можно получить прямым вычислением (см. [36] и приведенную там ссылку [5])

$$\langle k, 0, \dots, 0 | \mathcal{E}_{q^{-1}}^{s_2 T_{12}} \mathcal{E}_{q^{-1}}^{s_3 T_{13}} \dots \mathcal{E}_{q^{-1}}^{s_n T_{1n}} \mathcal{E}_q^{\bar{s}_2 T_{21}} \mathcal{E}_q^{\bar{s}_3 T_{31}} \dots \mathcal{E}_q^{\bar{s}_n T_{n1}} | k, 0, \dots, 0 \rangle = P_k^{(q)}(s\bar{s}), \quad (4.63)$$

где $\langle k, 0, \dots, 0 |$ – симметрическое произведение k простейших фундаментальных представлений.

4.5. Разностная иерархия КОС

Разностная иерархия КОС из иерархии 2РТ. Теперь рассмотрим уравнение (4.62) более подробно и, в частности, покажем, что оно может быть получено как уравнение классической 2РТ-иерархии с нетривиальной эволюцией [34], т.е. что *разностное* уравнение КОС (4.62) может быть получено в рамках стандартной *дифференциальной* ($GL(\infty)$)-иерархии 2РТ. Для этого рассмотрим τ -функцию¹⁷⁾, определенную просто уравнением (2.24) с переопределенными временными потоками

$$C_l^k(s, \bar{s}) \rightarrow C_l^k(s, \bar{s}) = \sum_{i,j} P_{i-k}^{(q)}(s) R_{ij} P_{j-l}^{(q)}(\bar{s}), \quad (4.64)$$

где q -полиномы Шура определены формулой

$$\prod_i \mathcal{E}_{q^i}(s_i z^i) = \sum_j P_j^{(q)}(s) z^j \quad (4.65)$$

и удовлетворяют условиям

$$D_{s_i} P_j^{(q)}(s) = (D_{s_1})^i P_j^{(q)}(s) = P_{j-i}^{(q)}(s). \quad (4.66)$$

Таким образом, мы получаем

$$D_{s_i} C_l^k = C_l^{k+i}, \quad D_{\bar{s}_i} C_l^k = C_{l+i}^k \quad (4.67)$$

и

$$\tau_n^{(P^{(q)})}(s, \bar{s} | g) = \det_{1 \leq k, l \leq n} D_{s_1}^{k-1} D_{\bar{s}_1}^{l-1} C_1^1(s, \bar{s}). \quad (4.68)$$

¹⁷⁾ Как будет показано в следующем разделе, такая τ -функция является производящей функцией матричных элементов в фундаментальных представлениях.

Определенная подобным образом τ -функция, действительно, удовлетворяет уравнениям (4.62) [96, 97, 34]:

$$\begin{aligned} \tau_k \cdot D_{s_1} D_{\bar{s}_1} \tau_k - D_{s_1} \tau_k \cdot D_{\bar{s}_1} \tau_k &= \tau_{k-1} \cdot M_{s_1}^+ M_{\bar{s}_1}^+ \tau_{k+1}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \quad (4.69)$$

где точки означают остальные уравнения иерархии КОС. Для доказательства этого уравнения проще всего переписать τ -функцию с помощью формулы

$$\det D_{s_1}^i D_{\bar{s}_1}^j C = q^{-(n-1)(n-2)} (1-q)^{n(n-1)} (t\bar{t})^{\frac{n(n-1)}{2}} \det_{0 \leq i, j < n} (M_{s_1}^+)^i (M_{\bar{s}_1}^+)^j C, \quad (4.70)$$

а затем применить к ней тождество Якоби¹⁸⁾.

Фермионный язык для иерархии КОС. В заключение данного раздела покажем, как иерархия КОС может быть переписана на фермионном языке. Поскольку ее τ -функция получается из τ -функции иерархии Тоды переопределением времен, достаточно просто подставить в τ -функцию иерархии 2РТ новые времена. Действительно, формула

$$\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{q^k}(s_k z^k) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{t_k z^k} \quad (4.71)$$

позволяет выразить времена t через s :

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k = \sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{s_k^n (1 - q_k)^n}{n(1 - q_k^n)} z^{nk}, \quad (4.72)$$

причем

$$P_k^{(q)}(s) = P_k(t). \quad (4.73)$$

Таким образом, τ -функцию можно представить в виде

$$\tau_n(s, \bar{s} | g) = \tau_n(t, \bar{t} | g) \stackrel{(2.1)}{\sim} \langle n | e^{H(t)} g e^{\bar{H}(\bar{t})} | n \rangle, \quad (4.74)$$

¹⁸⁾ Тождество Якоби является частным ($p = 2$) случаем общего тождества на миноры произвольной матрицы

$$\sum_{i_p} C_{r i_p} \hat{C}_{i_1 \dots i_p | j_1 \dots j_p} = \frac{1}{p!} \sum_P (-)^P \hat{C}_{i_1 \dots i_{p-1} | j_{P(1)} \dots j_{P(p-1)}} \delta_{r j_{P(p)}}$$

где сумма в правой части идет по всем перестановкам p индексов, а $\hat{C}_{i_1 \dots i_p | j_1 \dots j_p}$ обозначает детерминант (минор) матрицы, которая получается из C_{ij} выбрасыванием строк $i_1 \dots i_p$ и столбцов $j_1 \dots j_p$. Используя тот факт, что $(C^{-1})_{ij} = \hat{C}_{i | j} / \hat{C}$, можно переписать это тождество в виде

$$\hat{C} \hat{C}_{i_1 \dots i_p | j_1 \dots j_p} = \left(\frac{1}{p!} \right)^2 \sum_{P, P'} (-)^P (-)^{P'} \hat{C}_{i_{P'(1)} \dots i_{P'(p-1)} | j_{P(1)} \dots j_{P(p-1)}} \delta_{i_{P'(p)} | j_{P(p)}}.$$

где

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n>0} t_n J_{+n} \stackrel{(4.72)}{=} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{s_k^n (1-q_k)^n}{n(1-q_k^n)} J_{+nk}, \\ \overline{H}(\bar{t}) &= \sum_{n>0} \bar{t}_n J_{-n} = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\bar{s}_k^n (1-q_k)^n}{n(1-q_k^n)} J_{-nk}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

τ -Функция иерархии КОС может также быть рассмотрена как τ -функция 2РТ-иерархии в переменных Мивы [34]. Для этого нужно рассмотреть общее преобразование Мивы в специальных точках, а именно, с помощью формул типа

$$t_k = \frac{1}{k} \frac{((1-q)s_1)^k}{1-q^k} = \frac{1}{k} \sum_{l \geq 0} ((1-q)q^l s_1)^k \quad (4.76)$$

легко получить, что τ -функция (4.74) описывается следующим набором переменных Мивы:

$$\{e^{2\pi i a/k} \mu_k q_k^{-l/k} \mid a = 0, \dots, k-1; l \geq 0\}, \quad \mu_k = ((1-q_k)s_k)^{-1/k}. \quad (4.77)$$

Это означает, что иерархию КОС можно рассматривать как иерархию 2РТ в переменных Мивы при специальном выборе (4.77) этих последних.

5. КВАНТОВАЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИИ КП С РАЗЛИЧНЫМИ ЭВОЛЮЦИЯМИ

5.1. Структура фундаментальных представлений

В данном разделе мы исследуем частный случай рассмотренной выше конструкции — интегрируемые иерархии, отвечающие фундаментальным представлениям групп $SL(p)$ и $SL_q(p)$ [35–38]. Эти случаи наиболее важны, поскольку именно они отвечают стандартной иерархии 2РТ и ее квантовому аналогу, и именно в этих случаях существуют детерминантные представления для τ -функций. Заметим, что в квантовом случае для получения детерминантных представлений мы несколько расширяем рамки определения τ -функции (4.2), вводя некоммутативные времена.

Если говорить строго, иерархия 2РТ описывается группой $SL(\infty)$. Однако мы будем рассматривать случай общего p , хотя результаты зависят от p слабо.

Начнем с описания самих фундаментальных представлений этих групп [92] (см. также приложение 2). Группа $SL(p)$ имеет $r \equiv \text{rank} = p-1$ фундаментальных представлений. Простейшее из них $F \equiv F_1$ есть p -плет, содержащий состояния

$$\psi_i = T_-^{i-1} |0\rangle, \quad i = 1, \dots, p. \quad (5.1)$$

Здесь генератор T_- является суммой всех r простых корней $SL(p)$: $T_- = \sum_{i=1}^r T_{-\alpha_i}$. Все остальные фундаментальные представления F_k теперь могут быть построены как антисимметричная степень $F = F_1$:

$$F^{(k)} = \{\Psi_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \sim \psi_{[i_1} \dots \psi_{i_k]}\}. \quad (5.2)$$

F_k задается действием операторов

$$R_k(T_-^i) \equiv T_-^i \otimes I \otimes \cdots \otimes I + I \otimes T_-^i \otimes \cdots \otimes I + I \otimes I \otimes \cdots \otimes T_-^i \quad (5.3)$$

на вектор старшего веса. Эти операторы коммутируют друг с другом. Очевидно, что для данного k в точности k из них (с $i = 1, \dots, k$) независимы. Тот факт, что все фундаментальные представления генерируются тем же самым генератором T_- , — замечательное свойство, которое может послужить определением фундаментальных представлений и ответственно за все существенные свойства классических интегрируемых иерархий, в частности за наличие большого числа коммутирующих гамильтонианов.

Теперь можно явно построить либо пару сплетающих операторов, аналогичных операторам пункта 4.2:

$$I_{(k)}: F_{k+1} \rightarrow F_k \otimes F, \quad I_{(k)}^*: F_{k-1} \rightarrow F^* \otimes F_k, \quad (5.4)$$

так что

$$\Gamma_{k|k'}: F_{k+1} \otimes F_{k'-1} \rightarrow F_k \otimes F_{k'},$$

либо пару фермионных сплетающих операторов

$$\psi^+: F_1 \otimes F_k \rightarrow F_{k+1}, \quad \psi^- \equiv I_{(k)}, \quad (5.5)$$

здесь

$$F^* = F^{(r)} = \{\psi^i \sim \epsilon^{ii_1 \dots i_r} \psi_{[i_1} \dots \psi_{i_r]}\}, \quad (5.6)$$

$$I_{(k)}: \Psi_{i_1 \dots i_{k+1}}^{(k+1)} = \Psi_{[i_1 \dots i_k}^{(k)} \psi_{i_{k+1}]}, \quad I_{(k)}^*: \Psi_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} = \Psi_{i_1 \dots i_{k-1} i}^{(k)} \psi^i,$$

а $\Gamma_{k|k'}$ сконструирован с помощью вложения $I \rightarrow F \otimes F^*$, индуцированного спариванием $\psi_i \psi^i$. Базис в линейном пространстве $F^{(k+1)} \otimes F^{(k'-1)}$ индуцирован оператором $\Gamma_{k|k'}$ из базиса в пространстве $F^{(k)} \otimes F^{(k')}$, — это $\Psi_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \Psi_{i_{k+1} i'_1 \dots i'_{k'-1}}^{(k')}$.

Теперь можно переписать оператор Γ в терминах матричных элементов

$$g^{(k)} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} \equiv \langle \Psi_{i_1 \dots i_k} | g | \Psi_{j_1 \dots j_k} \rangle = \det_{1 \leq a, b \leq k} g_{j_b}^{i_a} \quad (5.7)$$

следующим образом:

$$g^{(k)} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} g^{(k')} \begin{pmatrix} i'_1 \dots i'_k \\ j_{k+1} j'_1 \dots j'_{k'-1} \end{pmatrix} = g^{(k+1)} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k i'_{k'} \\ j_1 \dots j_{k+1} \end{pmatrix} g^{(k'-1)} \begin{pmatrix} i'_1 \dots i'_{k'-1} \\ j'_1 \dots j'_{k'-1} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Это явная форма БТ (4.10) для матричных элементов в случае фундаментальных представлений, верная тождественно для любых $g^{(k)}$ вида (5.7). “Одевая” матричные элементы $g^{(k)}$ полиномами Шура, зависящими от времен, нетрудно получить из (5.7) уравнение (2.24), а из (5.8) — уравнение двумеризованной модели Тоды (3.4). Ниже, однако, мы будем всюду использовать БТ в УОА и фермионную пару сплетающих операторов (5.5).

Заметим, что фундаментальные представления квантовой группы $SL_q(p)$ имеют такую же структуру, только антисимметризация должна быть всюду заменена q -антисимметризацией. Некоторые подробности можно найти в приложении 2 и [35].

Перейдем теперь к более инвариантной записи. А именно, заметим, что, как описано выше, фундаментальные представления полностью генерируются операторами

$$T_{\pm}^{(k)} = \sum_{\vec{\alpha}: h(\vec{\alpha})=k} T_{\pm \vec{\alpha}}$$

— суммами всех генераторов $SL(p)$, ассоциированными с положительными/отрицательными корнями “веса” k (в *первом* фундаментальном представлении F такие $T_{\pm}^{(k)}$ являются матрицами размера $p \times p$ с единицами на k -й верхней/нижней диагонали и нулями в остальных местах).

Мы уже отмечали в пункте 4.1, что эволюционные операторы $U(t)$, $\bar{U}(\bar{t})$ в представлениях общего вида должны содержать *все* повышающие и соответственно понижающие операторы¹⁹⁾, а также отвечать некоммутирующим потокам. В случае же фундаментальных представлений F_n они могут быть выбраны в виде

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k T_+^{(k)}\right), \\ \bar{U}(\bar{t}) &= \exp\left(\sum_{k \geq 1} \bar{t}_k T_-^{(k)}\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Существенным свойством операторов $T_{\pm}^{(k)}$ является их коммутативность:

$$[T_+^{(k)}, T_+^{(l)}] = 0, \quad [T_-^{(k)}, T_-^{(l)}] = 0, \quad (5.10)$$

поэтому $U(t)$, $\bar{U}(\bar{t})$ (5.9) отвечают коммутирующим потокам. Конечно, эволюционные операторы общего вида зависят от большего числа времен и взаимно некоммутирующих генераторов группы.

Операторы, определенные в (5.9), имеют следующие свойства:

1) $U, \bar{U} \in SL(p)$;

2) конкретнее, $U, \bar{U}$ принадлежат нильпотентной подгруппе $NSL(p)$ группы $SL(p)$. На самом деле, $NSL(p)$ является подгруппой борелевской подгруппы: $NSL(p) \subset BSL(p) \subset SL(p)$ (в фундаментальном представлении F_1 подгруппа $BSL(p)$ состоит из всех верхнетреугольных матриц с единичным определителем, в то время как матрицы из $NSL(p)$ имеют, кроме того, единичные элементы на главной диагонали);

3) поскольку копроизведение задается формулой

$$\Delta(T_{\pm \vec{\alpha}}) = T_{\pm \vec{\alpha}} \otimes I + I \otimes T_{\pm \vec{\alpha}}, \quad (5.11)$$

то

$$\Delta U(t) = U(t) \otimes U(t) = (U(t) \otimes I)(I \otimes U(t)). \quad (5.12)$$

¹⁹⁾ Поскольку τ -функция по определению является производящей функцией *всех* матричных элементов.

Иными словами, эволюционные операторы $U, \bar{U}$ являются групповыми элементами подгруппы $NSL(p)$.

Описанные свойства являются весьма существенными, и естественно попытаться сохранить их при квантовании. При этом необходимо учесть два обстоятельства.

Во-первых, не существует ничего подобного операторам $T_{\pm}^{(k)}$ при $q \neq 1$ (по крайней мере, сформулированным в виде, не зависящем от представления R). Это означает, что явные выражения для $U(t)$ и $\bar{U}(\bar{t})$ должны сильно отличаться от (5.9).

Во-вторых, не существует естественного определения нильпотентной подгруппы $N\mathbf{G}_q$ в квантовом случае: хорошо определена только квантовая деформация борелевской подгруппы $B\mathbf{G}_q \subset \mathbf{G}_q$ (см. пункт 4.3). Действительно, если выбрать в качестве $U(t)$ объект вида g_U , а $\bar{U}(\bar{t})$ – вида g_L (см. (4.54)), то из-за отсутствия фактора g_D имеем $\Delta(g_U) \neq g_U \otimes g_U$, $\Delta(g_L) \neq g_L \otimes g_L$ и нильпотентной подгруппы $N\mathbf{G}_q$, действительно, не существует. В то же время борелевская подгруппа $B\mathbf{G}_q$ существует, поскольку $\Delta(g_U g_D) = (g_U g_D) \otimes (g_U g_D)$.

Несмотря на эту проблему мы будем рассматривать U и $\bar{U}$ как величины типа g_U и g_L , соответственно (см., однако, конец данного раздела). По этой причине уравнение (5.12) в квантовом случае требует некоторой модификации. Точнее, вместо (5.12) мы получим

$$\Delta(U(\xi)) = U_L^{(2)}(\xi) \cdot U_R^{(2)}(\xi), \quad (5.13)$$

где

$$U(\xi) = \prod_s^< \mathcal{E}_q(\xi_s T_{i(s)}), \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} U_L^{(2)} &= \prod_s^< \mathcal{E}_q(\xi_s T_{i(s)} \otimes q^{-2H_{i(s)}}) \neq I \otimes U(\xi), \\ U_R^{(2)} &= \prod_s^< \mathcal{E}_q(\xi_s I \otimes T_{i(s)}) = I \otimes U(\xi). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Это выражение далее будет использовано для вывода детерминантных формул для квантовой τ -функции.

Заметим, что, рассматривая эволюционные операторы как элементы разложения (4.54), мы принимаем новый подход к понятию обобщенной τ -функции, когда не только групповой элемент, но и операторы U и $\bar{U}$ являются элементами $U(\mathcal{G}) \otimes A(\mathbf{G})$, т.е. времена являются *некоммутативными* параметрами. Именно этот подход позволяет построить детерминантные представления для τ -функций.

Подчеркнем, что в рамках этой логики здесь и далее под умножением эволюционных операторов U и $\bar{U}$ и группового элемента g в определении τ -функции (4.2) мы всегда понимаем групповой закон умножения (4.47), т.е. элементы алгебры θ , ϕ и χ (4.56) в эволюционных операторах коммутируют с элементами соответствующей алгебры в g (см. пункт 4.3).

5.2. Параметризации группового элемента в фундаментальных представлениях

Вернемся теперь к общей параметризации (4.54) группового элемента, заданного в терминах генераторов Шевалле, и рассмотрим случай группы $SL(p)$. Тогда наиболее

простой способ выбрать отображение $i(s)$ это

$$i(s): 1, 2, \dots, r-1, r; \quad 1, 2, \dots, r-1; \quad 1, 2, 3; \quad 1, 2; \quad 1$$

с $s = 1, \dots, p(p-1)/2$ (размерность группы $SL(p)$), т.е.

$$U(\xi) = \prod_{1 \leq i \leq p} \prod_{i < j \leq p} \exp(\xi_{ij} T_{j-i}). \quad (5.16)$$

Поскольку, однако, мы собираемся изучать фундаментальные представления, то, как мы видели в предыдущем пункте, достаточно рассмотреть орбиты $SL(p)$, параметризованные только r переменными. Поэтому далее нашей целью будет найти адекватную параметризацию таких орбит. В классическом случае ($q = 1$) существуют по меньшей мере три такие параметризации, рассматриваемые ниже [37, 38]. Однако только одна из них допускает простую квантовую деформацию, причем эта параметризация не отвечает выражению (5.9). Сложность построения таких орбит меньшей размерности в квантовом случае связана с необходимостью согласования редукции с коммутационными соотношениями (4.56), т.е. необходимостью выбора подкласса весьма специальных представлений алгебры функций на квантовой группе.

Параметризация А. Простейшей возможностью параметризации А являются просто ограничение набора $\{s\}$ до $s = 1, \dots, r$ и выбор $i(s) = s$, т.е.

$$U^{(A)}(\xi) = \prod_{i=1}^{r_{\mathbf{G}} <} \exp(\xi_i T_i). \quad (5.17)$$

Этого достаточно, чтобы генерировать все состояния любого фундаментального представления из соответствующего вакуумного вектора (вектора старшего веса), но $\langle 0_{F_n} | U^{(A)}(\xi) \rangle$ имеет мало общего с элементом $\langle 0_{F_n} | U(t) \rangle$ (с $U(t)$, заданным формулой (5.9)). Возможно, лучше говорить, что идентификация $\langle 0_{F_n} | U^{(A)}(\xi) \rangle = \langle 0_{F_n} | U(t) \rangle$ задает весьма сложное отображение $\xi_i(t)$, которое явно зависит от p .

Естественно, можно построить иерархию КП/Тоды в терминах переменных ξ вместо обычных времен t (см. ниже), но она не получается просто как замена переменных, вся конструкция выглядит совершенно иной. Это цена того, что новая конструкция непосредственно обобщается на случай $q \neq 1$: вместо (5.17) нужно просто написать

$$U^{(A)}(\xi) = \prod_{i=1}^{r_{\mathbf{G}} <} \mathcal{E}_q(\xi_i T_i), \quad (5.18)$$

где ξ – некоммутирующие переменные,

$$\xi_i \xi_j = q^{-\vec{\alpha}_i \vec{\alpha}_j} \xi_j \xi_i, \quad i < j. \quad (5.19)$$

Теперь, как будет показано ниже, любое утверждение при ($q = 1$) в ξ -параметризации легко обобщается на случай $q \neq 1$.

Параметризация В (стандартная). Другой выбор параметризации связан со стандартными временами иерархии КП/Тоды:

$$U^{(B)}(\xi) = \prod_s \exp(\xi_s T_{i(s)}) = U(t) = \exp\left(\sum_k t_k T_+^{(k)}\right). \quad (5.20)$$

Это подразумевает, что $\langle 0_{F_n} | U^{(B)}(\xi) = \langle 0_{F_n} | U(t)$ с некоторыми не зависящими от p функциями $\xi_s(t)$. Ключевая разница между двумя частями равенства (5.20) заключается в следующем. В то время как правая часть содержит взаимнокоммутирующие комбинации генераторов, отвечающих простым корням, левая часть содержит только взаимнонекоммутирующие генераторы Шевалле. Такая репараметризация, действительно, существует, однако набор $\{s\}$ должен при этом содержать по меньшей мере $p(p-1)/2$ элементов, и можно выбрать $i(s)$ просто, как в (5.16). Однако теперь не все ξ_s являются независимыми, вместо этого они выражаются через r времен t_k . К примеру, t_1 -зависимость ξ_{ij} дается формулой

$$\xi_{ij} = \frac{t_1}{p+i-j} + \mathcal{O}(t_2, t_3, \dots). \quad (5.21)$$

Проблемой, однако, является построение разумной квантовой деформации параметризации В. Действительно, при этом необходимо воспроизвести правильные коммутационные соотношения

$$\xi_s \xi_{s'} = q^{-\tilde{\alpha}_{i(s)} \tilde{\alpha}_{i(s')}} \xi_{s'} \xi_s, \quad s < s', \quad (5.22)$$

для $p(p-1)/2$ переменных ξ_s как следствие *некоторых* соотношений между r переменными t_k (которые, конечно, не коммутируют при $q \neq 1$). Для этого также необходимо некоторым образом деформировать соотношения (5.21) при $q \neq 1$. Решение этой проблемы до сих пор не найдено.

Параметризация С (переменные Мивы). Имеется еще одна возможность сделать (не зависящее от представления) преобразование Мивы стандартных времен

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_a \lambda_a^k.$$

Это преобразование оказывается замечательно согласовано с разложением по простым корням:

$$U(t) = \prod_a \exp\left(\sum_{k=1}^{r_{\mathbf{G}}} \frac{\lambda_a^k}{k} T_+^{(k)}\right) = \prod_a \left(\prod_{i=1}^{r_{\mathbf{G}}} e^{\lambda_a T_i}\right). \quad (5.23)$$

Набор $\{s\}$ и отображение $i(s)$ не являются наиболее простой реализацией формулы (5.16), но общее правило (4.56) при квантовой деформации, конечно, применимо.

В данной параметризации проблема состоит в том, что (5.16) подразумевает квантовую формулу вида

$$\prod_a \left(\prod_{i=1}^{r_{\mathbf{G}}} \mathcal{E}_q(\lambda_{ai} T_i)\right), \quad (5.24)$$

где λ_{ai} с разными i и тем же самым a не коммутируют. В то же время условие $\lambda_{ai} = \lambda_{aj}$ при $i \neq j$ крайне важно для классической ($q = 1$) формулы (5.23). Что же является правильной квантовой деформацией этого условия, остается неясным.

5.3. Классическая ($q = 1$) иерархия КП/Тоды в разных параметризациях

Детерминантные формулы и системы уравнений. Для лучшего понимания развиваемой в данном обзоре схемы вновь выведем теперь стандартные свойства классических интегрируемых иерархий в рамках рассматриваемой здесь групповой интерпретации. К этим стандартным свойствам относятся детерминантные представления для τ -функций и набор дифференциальных БТ. Мы рассмотрим случай фундаментальных представлений группы $SL(p)$, поскольку именно в этом случае имеются детерминантные представления для τ -функций. Для их вывода нет необходимости фиксировать как-либо параметризацию, и можно рассмотреть произвольную эволюцию $U(t)$.

Итак, мы будем рассматривать τ -функции $\tau_n \equiv \tau_{F_n}(t, \bar{t} | g)$. Начнем с простейшей из них

$$\tau_1 = \langle 0_{F_1} | U(t) g \bar{U}(\bar{t}) | 0_{F_1} \rangle.$$

Заметим, что специфической чертой $F = F_1$ является то, что

$$\langle 0_F | U(t) = \sum_k \mathcal{P}_k(t) \langle 0_F | T_+^k = \sum_k \mathcal{P}_k(t) \langle k_F |,$$

где правая часть равенства представляет собой переразложение в терминах “обобщенных полиномов Шура” (первое равенство в этой формуле служит их определением) и p состояний $F = F_1$ обозначены как $\langle k_F | = \langle 0_F | T_+^k$, $k = 0, \dots, r = p - 1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tau_1(t, \bar{t} | g) &= \sum_{k, \bar{k}} \mathcal{P}_k(t) \mathcal{P}_{\bar{k}}(\bar{t}) \langle 0_F | T_+^k g T_-^{\bar{k}} | 0_F \rangle = \\ &= \sum_{k, \bar{k}} \mathcal{P}_k(t) \mathcal{P}_{\bar{k}}(\bar{t}) \langle k_F | g | \bar{k}_F \rangle = \sum_{k, \bar{k}} \mathcal{P}_k(t) g_{k, \bar{k}} \mathcal{P}_{\bar{k}}(\bar{t}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Определим также

$$\tau_1^{m\bar{m}} \equiv \langle m_F | U(t) g \bar{U}(\bar{t}) | \bar{m}_F \rangle = \sum_{k, \bar{k}} \mathcal{P}_k(t) g_{m+k, \bar{m}+\bar{k}} \mathcal{P}_{\bar{k}}(\bar{t}). \quad (5.26)$$

Вернемся теперь к общему фундаментальному представлению F_n . Поскольку

$$\begin{aligned} \langle m_1 \dots m_n |_{F_n} &= \langle m_1 |_F \otimes \langle m_2 |_F \otimes \dots \otimes \langle m_n |_F + \\ &\quad + \text{антисимметризация по } m_1, \dots, m_n = \\ &= \sum_P (-)^P \langle m_{P(1)} | \otimes \langle m_{P(2)} | \otimes \dots \otimes \langle m_{P(n-1)} |, \end{aligned} \quad (5.27)$$

то вакуум (состояние старшего веса) F_n можно записать в виде

$$\langle 0_{F_n} | = \langle 0, 1, \dots, n-1 |_{F_n} = \sum_P (-)^P \langle P(0) |_F \otimes \langle P(1) |_F \otimes \dots \otimes \langle P(n-1) |_F. \quad (5.28)$$

Так как для классической группы (см. (5.12)) имеем

$$U(t)|_{F_n} = \Delta^{n-1} U(t) = U(t)^{\otimes n}, \quad g|_{F_n} = \Delta^{n-1}(g) = g^{\otimes n}, \quad (5.29)$$

то окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \tau_{n+1}(t, \bar{t} | g) &\equiv \langle 0_{F_n} | U(t) g \bar{U}(\bar{t}) | 0_{F_n} \rangle = \\
 &= \sum_{P, \bar{P}} (-)^P (-)^{\bar{P}} \prod_{k=0}^n \langle P(k)_F | U(t) g \bar{U}(\bar{t}) | \bar{P}(k)_F \rangle = \\
 &= \det_{0 \leq m, \bar{m} < n} \tau_1^{m\bar{m}} = \det_{0 \leq m, \bar{m} < n} \sum_{l, \bar{l}} \mathcal{P}_{l-m}(t) g_{l_F, \bar{l}_F} \mathcal{P}_{\bar{l}-\bar{m}}(\bar{t}) = \\
 &= \sum_{\substack{1 < m_1 < m_2 < \dots \\ 1 < \bar{m}_1 < \bar{m}_2 < \dots}} \det_{ji} \mathcal{P}_{m_j-i}(t) \det_{ji} g_{m_j, \bar{m}_i} \det_{ij} \mathcal{P}_{\bar{m}_i-\bar{j}}(\bar{t}). \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Этот результат следует сравнивать с формулой (2.24) при $p \rightarrow \infty$, причем соответствующая диаграмма Дынкина группы A_{p-1} при взятии этого предела должна быть сделана бесконечной в обе стороны (полубесконечной для полубесконечной иерархии).

Следующим шагом является получение дифференциальных БТ. Конечно, детерминантные формулы (5.30) являются не лучшей стартовой точкой для этого. Гораздо удобнее использовать методы, основанные на применении сплетающих операторов, которые мы развивали в данном обзоре. В частности, для фундаментальных представлений следует рассмотреть фермионную пару $\psi_i^\pm$ ($i = 1, \dots, p$) сплетающих операторов $\psi^\pm: F_1 \otimes F_n \rightleftharpoons F_{n+1}$. Тогда вывод БТ для произвольного p почти буквально совпадает с выводом БТ для $p \rightarrow \infty$, описанным в пункте 4.1. Следует только ввести фермионы, содержащие конечное число степеней спектрального параметра $\psi^+(z) \equiv \sum_{i=1}^p \psi_i^+ z^i$ и $\psi^-(z) \equiv \sum_{i=1}^p \psi_i^- z^{p-i+1}$, и соответственно определить вершинные операторы формулами

$$\sum_i \Psi_k^{+,i}(t) z^i \equiv \hat{X}^+(z, t) \tau_n(t), \quad \sum_i \Psi_k^{-,i}(t) z^{p-i+1} \equiv \hat{X}^-(z, t) \tau_n(t) \quad (5.31)$$

и аналогично для $\hat{X}^\pm(z, t)$. При этом БТ принимают вид [37, 38]

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{dz}{z^{p+2}} \hat{X}^-(z, t) \tau_n(t, \bar{t}) \hat{X}^+(z, t') \tau_m(t', \bar{t}') = \\
 = \oint \frac{dz}{z^{p+2}} \hat{X}^-(z, \bar{t}) \tau_{n+1}(t, \bar{t}) \hat{X}^+(z, \bar{t}') \tau_{m-1}(t', \bar{t}'). \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Для получения конкретных систем дифференциальных уравнений теперь нужно рассмотреть частные выборы параметризаций $U(t)$, $\bar{U}(\bar{t})$.

Параметризация В (стандартная). Выбор этой параметризации приводит к стандартной иерархии КП/Тоды с детерминантным представлением (2.24), (2.25) для τ -функции. Используем выражение (5.9). Это дает

$$\langle 0_F | U(t) = \langle 0_F | \exp \left(\sum_k t_k T_+^{(k)} \right) = \sum_k P_k(t) \langle k_F |$$

со стандартными полиномами Шура $P_k(t)$ (2.15). Основной особенностью рассматриваемой эволюции является свойство

$$\tau_1^{m\overline{m}} = \frac{\partial}{\partial t_m} \frac{\partial}{\partial \bar{t}_{\overline{m}}} \tau_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}_1} \right)^{\overline{m}} \tau_1. \quad (5.33)$$

Для получения системы уравнений в данной параметризации достаточно заметить, что вершинные операторы (2.33), (2.34) в ней принимают вид

$$\begin{aligned} \widehat{X}^+(z, t) &= \text{Pr}_p \left[e^{\xi(z, t)} \text{Pr} \left[z^n e^{-\xi(z^{-1}, \bar{\partial}_t)} \right] \right], \\ \widehat{X}^-(z, t) &= \text{Pr}_p \left[e^{\xi(z, t)} \text{Pr} \left[z^{p-n+1} e^{\xi(z^{-1}, \bar{\partial}_t)} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

(и аналогично для другой пары вершинных операторов), где $\text{Pr}[f(z)]$ обозначает проекцию на полиномиальную часть функции $f(z)$, а $\text{Pr}_l[f(z)]$ проецирует на полиномиальную часть степени l .

Подставляя эти формулы в (5.32) и разлагая эту последнюю по степеням $t_i - t'_i$, мы приходим к набору уравнений, который при $p \rightarrow \infty$ дает уравнения обычной иерархии 2РТ [62].

Иерархия КП/Тоды в параметризации А. Рассмотрим теперь ту же иерархию с другой эволюцией, заданной параметризацией А. Обозначим далее для краткости $\widehat{U}(\xi) \equiv U^{(A)}(\xi)$, а соответствующую τ -функцию $-\hat{\tau}(\xi, \bar{\xi} | g)$. Эта τ -функция линейна по любому времени ξ_i и, следовательно, имеет более простое детерминантное представление и удовлетворяет более простой иерархии уравнений. Действительно, (5.25) теперь имеет вид

$$\hat{\tau}_1(\xi, \bar{\xi} | g) \equiv \langle 0_{F_1} | \widehat{U}(\xi) g \widehat{\bar{U}}(\bar{\xi}) | 0_{F_1} \rangle = \sum_{k, \bar{k} \geq 0} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \langle k | g | \bar{k} \rangle, \quad (5.35)$$

где $s_k = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k$, $s_0 = 1$, а (5.26) заменяется на

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1^{m\overline{m}}(\xi, \bar{\xi} | g) &\equiv \langle m_{F_1} | \widehat{U}(\xi) g \widehat{\bar{U}}(\bar{\xi}) | \overline{m}_{F_1} \rangle = \frac{1}{s_m \bar{s}_{\overline{m}}} \sum_{\substack{k \geq m \\ \bar{k} \geq \overline{m}}} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \langle k | g | \bar{k} \rangle = \\ &= \frac{1}{s_m \bar{s}_{\overline{m}}} \sum_{\substack{k \geq m \\ \bar{k} \geq \overline{m}}} \frac{\partial}{\partial \log s_k} \frac{\partial}{\partial \log \bar{s}_{\bar{k}}} \tau_1(\xi, \bar{\xi} | g) = \frac{1}{s_{m-1} \bar{s}_{\overline{m}-1}} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_{\overline{m}}} \tau_1(\xi, \bar{\xi} | g). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{n+1} &= \det_{0 \leq m, \overline{m} \leq n} \hat{\tau}_1^{m\overline{m}} = \left(\prod_{m=1}^n s_m \bar{s}_{\overline{m}} \right)^{-1} \det_{(m, \overline{m})} \left(\sum_{\substack{k \geq m \\ \bar{k} \geq \overline{m}}} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \langle k | g | \bar{k} \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{s_n \bar{s}_{\overline{n}}} \sum_{k, \bar{k} \geq n} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \det_{0 \leq m, \overline{m} \leq n-1} \begin{pmatrix} g_{m\overline{m}} & g_{m\bar{k}} \\ g_{k\overline{m}} & g_{k\overline{m}} \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{s_n \bar{s}_{\overline{n}}} \sum_{k, \bar{k} \geq n} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \mathcal{D}_{k\bar{k}}^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Теперь можно сравнить детерминантные представления (2.24), (2.25) и (5.37), чтобы получить связь между различными координатами t и ξ . Эта связь имеет структуру²⁰⁾ s_k подобно некоторым функциям $P_j(t)$.

Столь же просто получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет τ -функция в параметризации А. Действительно, можно просто найти ФБА (2.41) и подставить их в уравнения (2.42):

$$\begin{aligned}\Psi_n^{+,n+k+1}(\xi) &= \frac{s_{n+k}}{s_n} \left(\tau_n(\xi) - \xi_n \frac{\partial \tau_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right), \\ \Psi_n^{+,n+1}(\xi) &= \left(\tau_n(\xi) - \xi_n \frac{\partial \tau_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right), \quad \Psi_n^{+,n}(\xi) = -\frac{\partial \tau_n(\xi)}{\partial \xi_n}, \\ \Psi_n^{-,k}(\xi) - \xi_{n-1} \frac{\partial \Psi_n^{-,k}(\xi)}{\partial \xi_{n-1}} &= \frac{s_{n-1}}{s_{k-1}} \frac{\partial \tau_n(\xi)}{\partial \log \xi_k} + \frac{s_{n-1}}{s_{k-2}} \frac{\partial \tau_n(\xi)}{\partial \xi_{k-1}} \quad \text{для } k > n, \\ \Psi_n^{-,n}(\xi) - \xi_{n-1} \frac{\partial \Psi_n^{-,n}(\xi)}{\partial \xi_{n-1}} &= \tau_n(\xi) + \frac{\partial \tau_n(\xi)}{\log \xi_n}, \\ \Psi_n^{-,n-1}(\xi) &= \xi_{n-1} \tau_n(\xi), \quad \Psi_n^{-,k}(\xi) = 0 \quad \text{для } k < n-1.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Что касается значений $\Psi_n^{+,k}(\xi)$ при $k < n$, то это константы, которые едва ли могут быть представлены действием некоторого дифференциального оператора на $\tau_n(\xi)$. Это означает, что соотношение (2.42) (где явные выражения для $\bar{\Psi}$, аналогичные (5.38), также нетрудно выписать) не ведет к дифференциальным уравнениям при произвольно выбранных k и l . Однако, если выбрать $k \leq l-1$, из-за многочисленных сокращений, возникающих благодаря формулам (5.38), соотношение (2.42) является почти дифференциальным уравнением. Оно может быть легко преобразовано к дифференциальному, если положить $\xi_{n-1} = 0$ (см. (5.38)). При этом нетрудно проверить, что число независимых дифференциальных уравнений, полученных таким образом, достаточно для того, чтобы полностью задать τ -функцию. Это означает, что полная иерархия по-прежнему может быть представлена в дифференциальной форме.

5.4. Квантовый случай ($q \neq 1$)

Представления q -детерминантного типа. Продемонстрируем теперь, как вычисления, описанные в предыдущем пункте, обобщаются на квантовый случай, т.е. группу $SL_q(p)$, и, в частности, получим представления q -детерминантного типа для τ -функций, подобные (5.30). Кроме того, мы покажем, что в параметризации А соотношение (5.36), выражающее $\tau_1^{m\overline{m}}$ через производные от τ_1 , все еще корректно для $q \neq 1$, если заменить производные разностными операторами.

Для получения представлений q -детерминантного типа достаточно изучить *любой*

²⁰⁾ Так, в простейшем случае первого фундаментального представления нужно отождествить $\tau_1(t | g) = \hat{\tau}_1(\xi | g)$, т.е.

$$s_k = P_k(t), \quad \frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_i s_{i-k} \frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Отождествление $\tau_n(t)$ и $\hat{\tau}_n(\xi)$ с $n \neq 1$ приводит, однако, к другим соотношениям между ξ и t .

$U(\xi)$ вида (5.14), не обращаясь к конкретной параметризации, подобно тому как это было в случае классической группы²¹⁾.

Если сравнить со случаем классических групп при $q \neq 1$, то как результат отсутствия диагонального фактора g_D копроизведение (5.29) меняет свой вид на

$$\Delta^{n-1}(U\{T_i\}) = \prod_{m=1}^n U^{(m)}, \quad (5.39)$$

где

$$U^{(m)} = U\{I \otimes \dots \otimes I \otimes T_i \otimes q^{-2H_i} \otimes \dots \otimes q^{-2H_i}\} \quad (5.40)$$

(T_i появляется на m -м месте в тензорном произведении). Подобным образом получаем

$$\overline{U}^{(m)} = \overline{U}\{q^{2H_i} \otimes \dots \otimes q^{2H_i} \otimes T_{-i} \otimes I \otimes \dots \otimes I\}. \quad (5.41)$$

Положим

$$H_i|\bar{j}_{F_1}\rangle = h_{i,\bar{j}}|\bar{j}_{F_1}\rangle, \quad \langle j_{F_1}|H_i = h_{i,j}\langle j_{F_1}|$$

(в действительности для $SL(p)$ имеем $2h_{i,i-1} = +1$, $2h_{i,i} = -1$, а все остальные равны нулю). Тогда

$$\begin{aligned} \tau_n^{j_1 \dots j_n \bar{j}_1 \dots \bar{j}_n}(\xi_s, \bar{\xi}_s | g) &\equiv \left(\bigotimes_{m=1}^n \langle j_m | \right) \Delta^{n-1}(U) g^{\otimes n} \Delta^{n-1}(\overline{U}) \left(\bigotimes_{m=1}^n |\bar{j}_m\rangle \right) = \\ &= \prod_{m=1}^n \left\langle j_m \left| U \left\{ T_i q^{-2 \sum_{l=m+1}^n h_{i,j_l}} \right\} g \overline{U} \left\{ T_{-i} q^{2 \sum_{l=1}^{m-1} h_{i,\bar{j}_l}} \right\} \right| \bar{j}_m \right\rangle = \\ &= \prod_{m=1}^n \tau_1^{j_m \bar{j}_m} \left(\xi_s q^{-2 \sum_{l=m+1}^n h_{i(s),j_l}}, \bar{\xi}_s q^{2 \sum_{l=1}^{m-1} h_{i(s),\bar{j}_l}} \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Для того чтобы получить q -детерминантный аналог (5.30), нужно заменить антисимметризацию q -антисимметризациями в уравнениях (5.27), (5.28), поскольку в квантовом случае фундаментальные представления описываются q -антисимметризованными векторами (подробности см. в [35, гл. 5.2] и в приложении 2). q -Антисимметризация определяется как сумма по всем перестановкам

$$([1, \dots, k]_q) = \sum_P (-q)^{\deg P} (P(1), \dots, P(k)), \quad (5.43)$$

где

$$\deg P = \text{количество инверсий в } P. \quad (5.44)$$

Теперь, q -антисимметризуя (5.42) с $j_k = k - 1$, $\bar{j}_{\bar{k}} = \bar{k} - 1$, мы приходим к окончательному ответу

$$\begin{aligned} \tau_n(\xi, \bar{\xi} | g) &= \sum_{P, P'} (-q)^{\deg P + \deg P'} \prod_{m=0}^{n-1} \tau_1^{P(m)P'(\bar{m})} \times \\ &\times \left(\xi_s q^{-2 \sum_{l=m+1}^{n-1} h_{i(s),P(l)}}, \bar{\xi}_s q^{2 \sum_{l=0}^{m-1} h_{i(s),P'(\bar{l})}} \right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

²¹⁾На самом деле все, что требуется, – это чтобы $U(\xi)$ был элементом из $N\mathbf{G}_q$ и выражался только через генераторы, ассоциированные с простыми положительными корнями: $U(\xi) = U\{\xi_s | T_i\}$. Формула (5.14) – возможная, но не единственная реализация этих требований.

Не будь в этом выражении q -факторов, “подкручивающих” времена, это был бы в точности q -детерминант, определяемый формулой

$$\det_q A \sim A_{[1}^{[1} \dots A_{n]}^{n]}_q = \sum_{P, P'} (-q)^{\deg P + \deg P'} \prod_a A_{P'(a)}^{P(a)}. \quad (5.46)$$

Конкретный пример формулы (5.45) в простейшем содержательном случае второго фундаментального представления, иллюстрирующий его структуру, рассмотрен в приложении 3.

Заметим, что q -факторы во всех полученных выше выражениях можно тривиально воспроизводить действием операторов

$$\begin{aligned} M_j^\pm: \quad M_j^\pm \xi_s &= q^{\pm \delta_{j,i(s)}} \xi_s, \\ \overline{M}_j^\pm: \quad \overline{M}_j^\pm \bar{\xi}_s &= q^{\pm \delta_{j,i(s)}} \bar{\xi}_s. \end{aligned}$$

Мы уже неоднократно видели, что их наличие типично для деформаций интегрируемых иерархий.

Скажем теперь несколько слов об уравнениях, которым удовлетворяет квантовая τ -функция. Для их вывода нужно действовать аналогично классическому случаю и ввести сплетающие операторы. В квантовом случае необходимо различать правые и левые сплетающие операторы: $\Phi^{\pm, R}: F_n \otimes F_1 \rightleftharpoons F_{n+1}$ и $\Phi^{\pm, L}: F_1 \otimes F_n \rightleftharpoons F_{n+1}$. Эти операторы $\Phi^{\pm, R, L}$ могут быть выражены через классические сплетающие операторы (фермионы)²²⁾:

$$\Phi_i^{\pm, R} = q^{-\sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^+ \psi_j^-} \psi_i^\pm, \quad \Phi_i^{\pm, L} = q^{\sum_{j=1}^{i-1} \psi_j^+ \psi_j^-} \psi_i^\pm. \quad (5.47)$$

Далее, по аналогии с классическим случаем надо рассмотреть оператор $\Gamma = \sum_i \Phi_i^{+, L} \otimes \Phi_i^{-, R}$, коммутирующий с $g \otimes g$. Теперь, вводя квантовые ФБА как среднее квантовых сплетающих операторов $\Phi^\pm$ (с подходящими индексами L и R) и соответствующие им вершинные операторы, мы получим те же уравнения (2.39)–(5.32), но с переопределенными величинами. Технически действие вершинного оператора может быть вычислено с помощью формулы (5.47), что приводит к квантовому аналогу формул (2.31), (2.32).

Фиксируем теперь конкретную параметризацию A и увидим, как все эти формулы работают.

Параметризация A . В этой параметризации большинство выражений, полученных выше, остается практически без изменений, хотя в квантовом случае, естественно, следует позаботиться об упорядочении различных объектов. В частности, имеем

$$\hat{\tau}_1(\xi, \bar{\xi} | g) \equiv \langle 0_{F_1} | \widehat{U}(\xi) g \widehat{U}(\bar{\xi}) | 0_{F_1} \rangle = \sum_{k, \bar{k} \geq 0} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \langle k | g | \bar{k} \rangle, \quad (5.48)$$

²²⁾ Это следствие похожей структуры неприводимых представлений квантовых и классических УОА при $|q| \neq 1$ [98].

где опять $s_k = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k$, $s_0 = 1$, но $\bar{s}_k = \bar{\xi}_k \dots \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_1$, $\bar{s}_0 = 1$, при этом

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1^{m\bar{m}}(\xi, \bar{\xi} | g) &= s_m^{-1} \left(\sum_{\substack{k \geq m \\ \bar{k} \geq \bar{m}}} s_k \bar{s}_{\bar{k}} \langle k | g | \bar{k} \rangle \right) \bar{s}_m^{-1} = \\ &= s_{m-1}^{-1} (D_{\xi_m} \bar{D}_{\bar{\xi}_m} \tau_1(\xi, \bar{\xi} | g)) \bar{s}_{m-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Здесь²³⁾

$$D_{\xi_i} f(\xi) \equiv \frac{1}{\xi_i} \frac{M_i^{+2} - 1}{q^2 - 1} f(\xi), \quad \bar{D}_{\bar{\xi}_i} f(\bar{\xi}) \equiv \left[\frac{M_i^{-2} - 1}{q^{-2} - 1} f(\bar{\xi}) \right] \frac{1}{\bar{\xi}_i}$$

(в этих операторах порядок величин важен!). Теперь можно явно выразить τ_n через τ_1 , используя формулы (5.45) и (5.49). Как все это выглядит в простейшем примере второго фундаментального представления, описано в приложении 3.

ФБА для τ -функций в параметризации А дается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Psi_n^{+,n+k+1}(\xi) &= q^{n+1} s_n^{-1} s_{n+k} M_{n+1}^+ \dots M_{n+k-1}^+ (\tau_n(\xi) - \xi_n D_n \tau_n(\xi)), \\ \Psi_n^{+,n+1}(\xi) &= q^{n+1} (\tau_n(\xi) - \xi_n D_n \tau_n(\xi)), \quad \Psi_n^{+,n}(\xi) = -q^n D_n \tau_n(\xi), \\ \Psi_n^{-,k}(\xi) - \xi_{n-1} D_{n-1} \Psi_n^{-,k}(\xi) &= \\ &= q^{n-2} s_{k-2}^{-1} s_{n-1} D_{i-1} \tau_n(\xi) + q^{n-2} s_{k-1}^{-1} s_{n-1} \xi_i D_i \tau_n(\xi) \quad \text{для } k > n, \\ \Psi_n^{-,n}(\xi) - \xi_{n-1} D_{n-1} \Psi_n^{-,n}(\xi) &= q^{n-2} \tau_n(\xi) + \xi_n D_n \tau_n(\xi), \\ \Psi_n^{-,n-1}(\xi) &= q^{n-2} \xi_{n-1} \tau_n(\xi), \quad \Psi_n^{-,k}(\xi) = 0 \quad \text{для } k < n-1. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Подставляя эти формулы в (2.42), мы получаем набор уравнений, являющихся квантовым аналогом иерархии КП/Тоды в параметризации А.

В заключение данного раздела отметим еще раз, что детерминантные представления для классических τ -функций не сводятся в точности к q -детерминантным при $q \neq 1$. Причиной этого было то, что оператор эволюции в квантовом случае не был групповым элементом. Этот факт, в свою очередь, связан с отсутствием у квантовой группы нильпотентных подгрупп $N\mathbf{G}_q$. Чтобы избежать этой проблемы, можно начать со слегка иной параметризации τ -функции такой, что оператор эволюции лежит не в нильпотентной, а в борелевской подгруппе $B\mathbf{G}_q$. При этом в классическом пределе добавочные картановские генераторы могут быть просто убраны переопределением элемента g (задающего точку грассманиана). Однако в квантовом случае картановская часть оператора эволюции существенно меняет результат — эволюционный оператор становится групповым элементом (для $B\mathbf{G}_q$) и все “подкрутки” времен в формуле (5.45) исчезают. Определенная таким образом τ -функция является просто q -детерминантом. Для полного решения этой схемы все еще нужно найти подходящую параметризацию (набора) групповых элементов $B\mathbf{G}_q$ в точности $r_{\mathbf{G}}$ “временами”.

²³⁾ Существует некоторая неоднозначность в выборе этих операторов, поскольку τ -функция линейна по временам, и, следовательно, подходит любой линейный оператор, делающий 1 из ξ . Наш выбор разностных операторов обусловлен естественностью их действия на q -экспоненту и соответствием с разностными операторами, используемыми на всем протяжении обзора.

6. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И S -МАТРИЦА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЛИУВИЛЛЯ (ТОДЫ)

Как мы видели выше, группа, действующая в пространстве спектрального параметра, т.е. на решениях интегрируемой системы, при квантовании должна быть просто заменена квантовой группой, фактически это и составляет смысл процедуры квантования. Теперь мы рассмотрим пример другой групповой структуры, которая также может быть выявлена в теории Тоды. Речь идет о группе, которая действует в “пространстве-времени”, т.е. на переменных уравнения. Замечательным свойством этой группы является то, что при квантовании она не меняется, однако меняются изучаемые объекты и способ работы с данной групповой структурой.

А именно, рассмотрим опять молекулу Тоды, дополнительно редуцированную к цепочке Тоды, т.е. зависящую только от суммы времен. Покажем, что эта система получается гамильтоновой редукцией свободной системы, заданной на кокасательном расслоении к группе Ли [41–43, 99].

6.1. Классическая система Тоды как гамильтонова редукция

Действительно, рассмотрим кокасательное расслоение $T^*\mathbf{G}$ для вещественной расщепимой группы $\mathbf{G}$. При помощи групповых сдвигов оно может быть сведено к паре (Y, g) , $Y \in \mathcal{G}^*$, $g \in \mathbf{G}$, где $\mathcal{G}$ – соответствующая группе $\mathbf{G}$ алгебра. На $T^*\mathbf{G}$ существуют каноническая биинвариантная симплектическая форма

$$\omega = \delta Y (\delta g g^{-1}) \quad (6.1)$$

и набор инвариантных коммутирующих гамильтонианов

$$\frac{\langle Y^{d_k} \rangle}{d_k}, \quad k = 1, \dots, r, \quad (6.2)$$

где $d_k = 2, \dots$ – инварианты $\mathcal{G}$, а Y^{d_k} – $\text{ad}^*\mathbf{G}$ -инвариантные полиномы на $\mathcal{G}^*$. Это задает свободную гамильтонову систему.

Рассмотрим теперь симплектическую редукцию $T^*\mathbf{G}$ (т.е. редукцию, сохраняющую симплектическую форму ω (6.1)) относительно следующего действия: $\overline{N} \oplus N$ – левой и правой нильпотентных подгрупп группы $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} g &\mapsto vg, & Y &\mapsto vYv^{-1}, & v &\in \overline{N}, \\ g &\mapsto gn, & Y &\mapsto Y, & n &\in N. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Это действие задает два отображения моментов

$$\mu_v = \text{Pr}_{\overline{N}^*} Y, \quad \mu_n = \text{Pr}_{N^*} g^{-1} Y g. \quad (6.4)$$

Используя разложение Гаусса, можно преобразовать g при помощи (6.3) к картановской подгруппе A . Пусть $g = \exp \phi$, $\phi \in \mathcal{A}$. Предположим, что

$$\mu_v = \text{Pr}_{\overline{N}^*} Y = \mu^L, \quad \mu_n = \text{Pr}_{N^*} g^{-1} Y g = \mu^R, \quad (6.5)$$

где

$$\mu^L = \sum_{\alpha \in \Pi} \mu_\alpha^L \mathcal{G}_\alpha, \quad \mu^R = \sum_{\alpha \in \Pi} \mu_\alpha^R \mathcal{G}_{-\alpha},$$

$\mu_\alpha^{R,L}$ – произвольные константы и Π обозначает набор всех простых положительных корней. После “диагонализации” g разложением Гаусса в точке $g = \exp \phi$, $\phi \in \mathcal{A} = \hbar \mathbf{G}$, мы можем явно разрешить условие связи (6.5):

$$Y = p + \sum_{\alpha \in \Pi} (\mu_\alpha^R e^{\alpha(\phi)} \mathcal{G}_\alpha + \mu_\alpha^L \mathcal{G}_{-\alpha}). \quad (6.6)$$

При этом редуцированная симплектическая форма принимает канонический вид

$$\omega^{\text{red}} = \delta p \delta \phi = \sum_{k=1}^r \delta p_k \delta \phi_k, \quad (6.7)$$

а редуцированное фазовое пространство $\overline{N} \backslash T^* \mathbf{G} / N$ имеет размерность

$$2 \dim \mathbf{G} - 2 \dim \overline{N} - 2 \dim N = 2r. \quad (6.8)$$

Комбинация

$$W(Y; \tau_1, \dots, \tau_r) = \sum_{k=1}^r \frac{\tau_k}{d_k} \langle Y^{d_k} \rangle$$

определяет коммутирующие гамильтонианы классической иерархии, заданной оператором Лакса (6.6). В частности,

$$\langle Y^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r p_k^2 + \sum_{\alpha \in \Pi} \mu_\alpha e^{2\alpha(\phi)} \quad (6.9)$$

– стандартный гамильтониан цепочки Тоды [100]. Классическое действие в этом представлении приобретает вид

$$S^I = \int Y(\partial_t g g^{-1}) - \langle Y^2 \rangle + \langle B_L, Y - \mu^L \rangle + \langle B_R, g^{-1} Y g - \mu^R \rangle, \quad (6.10)$$

где $B_L \in \overline{N}$, $B_R \in \mathcal{N}$ – лагранжевы множители.

Для сравнения со стандартными формулами цепочки Тоды достаточно выбрать в качестве $\mathbf{G}$ группу $SL(p)$ и рассмотреть ее фундаментальное представление. Тогда Y (6.6) совпадает с оператором Лакса цепочки Тоды и т. д.

Построенная выше конструкция существенно основывалась на разложении Гаусса [39]. В действительности к той же системе можно прийти и с помощью разложения Иваса-вы. Именно эта последняя является стандартной, до сих пор применявшейся для исследования подобных систем. В частности, в следующих пунктах мы рассмотрим квантование системы Тоды, которое было проведено в рамках именно разложения Иваса-вы [51] и которое приводит к так называемой волновой функции (ВФ) Уиттекера. Мы, однако, всюду будем пользоваться разложением Гаусса, более удобным для применения к аффинным алгебрам [39]. Подробности и обсуждение связи результатов, полученных в рамках двух разложений – Гаусса и Иваса-вы, можно найти в [39].

6.2. Квантовая механика Лиувилля, общая схема решения

Нетривиальным свойством обнаруженной выше “пространственно-временной” группы²⁴⁾ $SL(p)$ -молекулы Тоды является то, что при квантовании эта группа остается классической, меняется только ее трактовка – квантование вводит орбитную интерпретацию. Действительно, если классическая система получается гамильтоновой редукцией свободной системы, заданной на кокасательном расслоении к простой вещественной группе Ли [41–43], то квантовая модель связана с неприводимыми унитарными представлениями *той же самой* группы. Таким образом, квантовая система должна скорее трактоваться в рамках геометрического квантования [44].

Опишем вкратце общий подход, который позволяет решать дифференциальные уравнения на собственные значения (СЗ) и, в частности уравнения Шредингера, в групповых терминах, а затем рассмотрим конкретные примеры. Технически необходимо сделать несколько шагов.

1. Пусть $g(\xi | T) \in A_{\mathbf{G}}(\xi) \otimes U_{\mathcal{G}}$ – “универсальный групповой элемент” (см. пункт 4.3) группы Ли $\mathbf{G}^{25)}$, где ξ некоторым образом параметризует групповое многообразие, а T – генераторы $\mathbf{G}$ в некотором (не обязательно неприводимом) представлении, причем их единственным свойством являются коммутационные соотношения $[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$.

2. Для каждой данной параметризации $\{\xi\}$ можно ввести два набора дифференциальных операторов $\mathcal{D}_{R,L}(\xi)$ таких, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L^a(\xi)g(\xi | T) &= T^a g(\xi | T), \\ \mathcal{D}_R^a(\xi)g(\xi | T) &= g(\xi | T)T^a. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Эти операторы удовлетворяют очевидным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_L^a, \mathcal{D}_L^b] &= -f^{abc}\mathcal{D}_L^c, \\ [\mathcal{D}_R^a, \mathcal{D}_R^b] &= f^{abc}\mathcal{D}_R^c, \\ [\mathcal{D}_L^a, \mathcal{D}_R^b] &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

3. Для данного представления $\mathcal{R}$, скалярного произведения $\langle | \rangle$ и двух элементов представления $\langle \psi_L |$ и $|\psi_R \rangle$ построим матричный элемент

$$F_{\mathcal{R}}(\xi | \psi_L, \psi_R) = \langle \psi_L | g(\xi | T) | \psi_R \rangle. \quad (6.13)$$

Действие любой комбинации дифференциальных операторов $\mathcal{D}_R$ на F эквивалентно вставке той же комбинации генераторов T справа от $g(\xi | T)$. Если $|\psi_R \rangle$ является собственным вектором этой комбинации генераторов, то F дает решение соответствующего дифференциального уравнения (в форме задачи на СЗ).

²⁴⁾ Эта пространственно-временная группа не должна смешиваться с группой $SL(p)$, описывающей редукцию к молекуле Тоды (см. раздел 3). Чтобы понять, что это две совершенно различные группы, достаточно заметить, что двумеризованная молекула Тоды описывается той же группой редукции $SL(p)$, но аффинной пространственно-временной группой $\hat{SL}(p)$.

²⁵⁾ В качестве этой группы можно выбрать и квантовую группу, однако это ведет к разностному уравнению Лиувилля, см. [101].

4. Особый интерес представляют операторы Казимира, поскольку $|\psi_R\rangle$, являющиеся их собственными векторами, описываются просто как элементы неприводимых представлений.

5. В частности, квадратичный оператор Казимира, выраженный через $\mathcal{D}_R$, является оператором Лапласа и приводит к некоторым важным уравнениям Шредингера, типичным примером которых является уравнение для системы типа Тоды.

На самом деле для получения уравнения Шредингера системы типа Тоды необходимо наложить дополнительные ограничения на состояния $\langle\psi_L|$ и $|\psi_R\rangle$, соответствующие гамильтоновой редукции (6.3) свободного движения на групповом многообразии группы $\mathbf{G}$ в классическом случае. Такая редукция, как мы видели в предыдущем пункте, ассоциирована с некоторым разложением $\mathbf{G}$ в произведение подгрупп, причем различные разложения могут приводить к эквивалентным редукциям. По существу, редукция приводит к независимости $F(\xi)$ от некоторых координат ξ . Для конечномерных групп Ли остающиеся координаты могут быть выбраны отвечающими картановскому тору, в то время как для аффинных алгебр естественнее сохранить зависимость от всех диагональных матриц. Обсуждаемый здесь матричный элемент – ВФ F – иногда называется функцией Уиттекера.

Заметим, что дифференциальные операторы $\mathcal{D}_L$ и $\mathcal{D}_R$ реализуют соответственно левое и правое регулярные представления алгебры группы $\mathbf{G}$ (левое в действительности является антипредставлением), которые инвариантно задаются действием на алгебре $A_{\mathbf{G}}$ функций на группе:

$$\pi_{\text{reg}}^L(h)f(g) = f(hg), \quad \pi_{\text{reg}}^R(h)f(g) = f(gh), \quad g, h \in G. \quad (6.14)$$

Явно эти операторы можно получить следующим образом. Рассмотрим групповой элемент g и (формальный) дифференциальный оператор d , действующий как полная производная на функции от ξ_i , т.е.

$$d \equiv \sum_i d\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Далее вычислим величину $g^{-1} \cdot dg$ (форма Маурера–Картана) и разложим ее по генераторам алгебры:

$$g^{-1} \cdot dg = \sum_{a,i} c_{a,i} T_a d\xi_i, \quad (6.15)$$

т.е.

$$dg = \sum_{a,i} c_{a,i} (D_R^a g) d\xi_i. \quad (6.16)$$

Из этого выражения нетрудно найти явные формулы для дифференциальных операторов $\mathcal{D}_R$. Оператор $\mathcal{D}_L$ вычисляется совершенно аналогично.

Заметим, что достаточно рассмотреть g только в фундаментальном представлении, поскольку матричные элементы фундаментального представления генерируют всю алгебру $A_{\mathbf{G}}$, а действие группы может быть расширено на всю эту алгебру при помощи копроизведения. Вычисления же коэффициентов $c_{a,i}$ в фундаментальном представлении весьма просты.

В качестве примера рассмотренной общей схемы ниже мы кратко изучим пример уравнения Шредингера для системы типа Тоды и опишем решение соответствующей

квантовой системы, отсылая за подробностями к работе [39]. Начнем с простейшего случая группы $SL(2)$, т.е. лиувиллевской квантовой механики. Задача, которую мы будем решать, – найти интегральное представление для ВФ и ее асимптотики, определяющие S -матрицу рассеяния.

6.3. Квантовая механика Лиувилля, группа $SL(2, \mathbf{R})$

Система Лиувилля для группы $SL(2, \mathbf{R})$. Соответствующая алгебра Ли задается соотношениями

$$[T_+, T_-] = T_0, \quad [T_\pm, T_0] = \mp 2T_\pm. \quad (6.17)$$

В фундаментальном представлении

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Квадратичный оператор Казимира равен

$$C = (T_- T_+ + T_+ T_-) + \frac{1}{2} T_0^2 = 2T_- T_+ + T_0 + \frac{1}{2} T_0^2. \quad (6.19)$$

Выполним теперь первый шаг нашей общей конструкции – параметризуем групповой элемент следующим образом²⁶⁾:

$$g(\psi, \phi, \chi | T) = e^{\psi T_-} e^{\phi T_0} e^{\chi T_+}. \quad (6.20)$$

В фундаментальном представлении групповой элемент имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\phi & 0 \\ 0 & e^{-\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\phi & \chi e^\phi \\ \psi e^\phi & \psi \chi e^\phi + e^{-\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

В качестве второго шага мы должны построить дифференциальные операторы правого и левого регулярных представлений. Как уже говорилось выше, для этого нужно вычислить “токи” $g^{-1} \cdot dg$ и $dg \cdot g^{-1}$:

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot dg &= \begin{pmatrix} -e^{2\phi} \chi d\psi + d\phi & -e^{2\phi} \chi^2 d\psi + 2\chi d\phi + d\chi \\ e^{2\phi} d\psi & e^{2\phi} \chi d\psi - d\phi \end{pmatrix}, \\ dg \cdot g^{-1} &= \begin{pmatrix} -e^{2\phi} \psi d\chi + d\phi & e^{2\phi} d\chi \\ -e^{2\phi} \psi^2 d\chi + 2\psi d\phi + d\psi & e^{2\phi} \psi d\chi - d\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Отсюда, используя (6.15), легко получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \phi} &= g(T^0 + 2\chi T^+) = (T^0 + 2\psi T^-)g, \\ \frac{\partial g}{\partial \chi} &= gT^+ = e^{2\phi}(T^+ - \psi T^0 - \psi^2 T^-)g, \\ \frac{\partial g}{\partial \psi} &= g(-\chi^2 T^+ - \chi T^0 + T^-)e^{2\phi} = T^-g, \end{aligned} \quad (6.23)$$

²⁶⁾ Этот способ отличается от принятого в предыдущих разделах перестановкой нильпотентных подгрупп, которая явно задается действием внутреннего автоморфизма группы – антипода.

а, используя (6.16), –

$$\mathcal{D}_R^+ = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \mathcal{D}_R^0 = -2\chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \mathcal{D}_R^- = e^{-2\phi} \frac{\partial}{\partial \psi} + \chi \frac{\partial}{\partial \phi} - \chi^2 \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (6.24)$$

$$\mathcal{D}_L^- = \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \mathcal{D}_L^0 = -2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \mathcal{D}_L^+ = -\psi^2 \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi \frac{\partial}{\partial \phi} + e^{-2\phi} \frac{\partial}{\partial \chi}. \quad (6.25)$$

На третьем шаге мы должны выбрать представление. Рассмотрим главную (сферическую) серию представлений, индуцированную одномерными представлениями борелевской подалгебры [102]. Пространством представления являются функции одной переменной, а матричные элементы (скалярное произведение) задаются интегралом с плоской мерой. Действие алгебры определяется дифференциальными операторами

$$T_+ = \frac{\partial}{\partial x}, \quad T_0 = -2x \frac{\partial}{\partial x} + 2j, \quad T_- = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2jx, \quad (6.26)$$

где j – спин представления. Мы будем рассматривать только унитарные представления, поскольку только для них скалярное произведение задается сходящимся интегралом. Условие унитарности означает, что $j + 1/2$ является чисто мнимым²⁷⁾.

В качестве четвертого шага рассмотрим квадратичный оператор Казимира (его можно вычислять как в левом, так и в правом регулярных представлениях):

$$C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial \phi} + 2e^{-2\phi} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \chi}. \quad (6.27)$$

Его СЗ в представлении спина j равно $2(j^2 + j)$. Следовательно, матричный элемент $F = \langle \psi_L | g(\theta, \phi, \chi) | \psi_R \rangle$ с $\langle \psi_L |$ и $\langle \psi_R |$, принадлежащими представлению спина j , удовлетворяет уравнению

$$CF = 2(j^2 + j)F. \quad (6.28)$$

Теперь в качестве последнего, пятого шага мы должны задать условия редукции. Выберем их в виде

$$\frac{\partial}{\partial \chi} F_G = i\mu_R F_G, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} F_G = i\mu_L F_G, \quad (6.29)$$

т.е. (см. (6.24) и (6.25))

$$T_+ |\psi_R\rangle = i\mu_R |\psi_R\rangle, \quad \langle \psi_L | T_- = i\mu_L \langle \psi_L|. \quad (6.30)$$

При такой редукции гамильтониан (квадратичный оператор Казимира) равен (ср. (6.9))

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial \phi} - 2\mu_R \mu_L e^{-2\phi}, \quad (6.31)$$

а функция $\Psi(\phi) = e^\phi F$ удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2\mu_R \mu_L e^{-2\phi} \right] \Psi(\phi) = 2 \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \Psi(\phi) \equiv \lambda^2 \Psi(\phi), \quad (6.32)$$

²⁷⁾ Аналогично в случае общей $SL(p)$ мнимыми должны быть все $j_i + 1/2$, т.е. $\mathbf{j} + \boldsymbol{\rho}$.

которое, действительно, является уравнением Шредингера для системы Лиувилля.

Заметим, что, используя представление (6.21) и условия (6.30), мы можем непосредственно получить уравнение (6.31) из следующей цепочки равенств²⁸⁾:

$$\begin{aligned} 2j(j+1)F_G^{(j)} &\equiv 2j(j+1)\langle\psi_L|e^{\phi T_0}|\psi_R\rangle_j = \langle\psi_L|e^{\psi T_-}e^{\phi T_0}e^{\chi T_+}\hat{C}|\psi_R\rangle_j = \\ &= \left\langle\psi_L \left| e^{\phi T_0} \left(2T_-T_+ + T_0 + \frac{1}{2}T_0^2 \right) \right| \psi_R \right\rangle_j = \\ &= \left(-2\mu_R\mu_L e^{-2\phi} + \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \langle\psi_L|e^{\phi T_0}|\psi_R\rangle_j. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Решение лиувиллевского уравнения Шредингера. Теперь нам остается только решить условия редукции (6.30) и найти явное интегральное представление для ВФ. При этом мы используем формулы (6.26). Тогда условия (6.30) имеют вид

$$\begin{aligned} T_+|\psi_R\rangle &= \frac{\partial}{\partial x}\psi_R(x) = i\mu_R\psi_R(x), \\ \langle\psi_L|T_- &= \left(2x + x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2jx \right) \psi_L(x) = i\mu_L\psi_L(x). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Их решения следующие:

$$\psi_R(x) = e^{i\mu_R x}, \quad \psi_L(x) = x^{-2(j+1)}e^{-\frac{i\mu_L}{x}}. \quad (6.35)$$

Это дает нам окончательно решение уравнения Шредингера (6.32):

$$\begin{aligned} e^{\phi}F^{(j)}(\phi) &= e^{\phi}\langle\psi_L|e^{\phi T_0}|\psi_R\rangle_j = e^{\phi}\int x^{-2(j+1)}e^{-\frac{i\mu_L}{x}}e^{\phi(2j-2x\frac{\partial}{\partial x})}e^{i\mu_R x}dx = \\ &= \left(\frac{i}{\mu_R} \right)^{-(2j+1)} e^{-(2j+1)\phi} \int_0^\infty x^{-2(j+1)}e^{-\frac{\mu_L\mu_R e^{-2\phi}}{x}-x}dx = \\ &= 2 \left(i\sqrt{\frac{\mu_L}{\mu_R}} \right)^{-(2j+1)} K_{2j+1}(2\sqrt{\mu_L\mu_R}e^{-\phi})dx, \end{aligned} \quad (6.36)$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда [103].

Функция Хариш-Чандры и асимптотики. Вернемся еще раз к уравнению Шредингера (6.32). Условие унитарности представления означает чисто мнимые $\lambda \equiv \sqrt{2}(j+1/2)$, т.е. непрерывный спектр в уравнении Шредингера (и вещественную энергию). Решения этого уравнения, естественно, задаются осциллирующей функцией только на одной бесконечности (из-за бесконечно растущего потенциала), а на другой – экспоненциально спадающей функцией. Мы можем поставить задачу рассеяния. При этом S -матрица отражения равна отношению коэффициентов при падающей и отраженной волнах. При этом нам потребуется выделить две экспоненциальные асимптотики $e^{\pm\lambda\phi}$ на *одной и той же* бесконечности. Технически это делается следующим образом: рассматривается маленькая вещественная добавка к λ и в зависимости от ее знака выделяется одна из двух асимптотик.

²⁸⁾С этого момента мы рассматриваем только матричный элемент от $e^{\phi_I T_0}$ вместо g , для того чтобы исключить тривиальные ψ - и χ -зависимости F .

Проделаем эту процедуру с функцией Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt. \quad (6.37)$$

Если $\operatorname{Re} \nu \leq 0$, в асимптотике (т.е. при малых z) можно отбросить член $z^2/4t$, так что интеграл равен

$$K_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t} t^{-\nu-1} dt = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \pi \nu \Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu. \quad (6.38)$$

С другой стороны, при $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ нужно заменить $t \rightarrow z^2 t$, в результате получим

$$K_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} (2z)^{-\nu} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4t}} t^{-\nu-1} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \pi \nu \Gamma(1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}. \quad (6.39)$$

Заметим, что хотя отношение двух полученных асимптотик решения определено однозначно, в определении каждой из них по отдельности сохраняется произвол, связанный с общим нормировочным множителем ВФ. Эту нормировку принято частично фиксировать требованием отсутствия полюсов при конечных значениях импульса. Вопрос полной фиксации нормировки обсуждается в [39].

В данном случае отсутствие полюсов означает, что полученную ВФ (6.36) следует домножить на функцию $\sin \pi \lambda$, которая, уничтожая все полюсы, привносит дополнительные нули. Две асимптотики нормированной таким образом ВФ имеют вид²⁹⁾

$$c_\pm = \frac{1}{\Gamma(1 \pm \lambda)}. \quad (6.40)$$

Эти функции называются функциями Хариш-Чандры [104], они играют важную роль в теории групп

6.4. Квантовая механика Тоды

Квантовая механика молекулы Тоды, группа $SL(p, R)$. Применим теперь развитую нами общую конструкцию к несколько более общему случаю – группе $SL(p, R)$. Вычисления при этом вполне аналогичны сделанным в предыдущем пункте. Однако они требуют некоторой дополнительной информации о структуре унитарных представлений $SL(p, R)$, поэтому мы приведем здесь только результаты, сославшись на приложение 4 и, особенно, работу [39], которые содержат подробные вычисления.

А именно, как и в предыдущем пункте, мы должны рассмотреть матричный элемент F , заданный в унитарном неприводимом представлении группы и подействовать на него оператором Казимира. Поскольку группа $SL(p, R)$ имеет ранг $p - 1$, т.е. имеет $p - 1$ независимых операторов Казимира, матричный элемент F теперь будет одновременно удовлетворять $p - 1$ дифференциальным уравнениям на СЗ. Таким образом, этот

²⁹⁾ Здесь и далее мы опускаем тривиальный множитель, зависящий от космологической постоянной $\mu_L \mu_R$.

матричный элемент решает квантовую задачу с гамильтонианами из пункта 6.1, отвечающими системе Тоды. Среди них, в частности, будет и квадратичный гамильтониан (6.9), приводящий к уравнению второго порядка – уравнению Шредингера, которое имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2 \sum_i \mu_i^L \mu_i^R e^{\alpha_i \phi} \right) \Psi^{(\lambda)}(\phi) = \lambda^2 \Psi^{(\lambda)}(\phi), \quad (6.41)$$

причем здесь функция $\Psi^{(\lambda)}(\phi)$ пропорциональна матричному элементу $e^{-\rho \phi F^{(\lambda)}(\phi)}$, а $\mu_i^{R,L}$ – набор космологических постоянных. Явное вычисление матричного элемента дает решение этого уравнения в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \Psi(\phi) = e^{-\lambda \phi} \int \prod_{i < j} dx_{ij} \prod_{i=1}^{p-1} \Delta_i^{-(\lambda \alpha_i + 1)} (x S^{-1}) \times \\ \times \exp \left\{ i \mu_i^R x_{i,i+1} e^{\alpha_i \phi} - i \mu_{p-i}^L \frac{\Delta_{i,i+1}(x S^{-1})}{\Delta_i(x S^{-1})} \right\}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Здесь α_i – положительные простые корни, S – внутренний автоморфизм группы $SL(p)$, отображающий верхнетреугольные на нижнетреугольные матрицы $S_{ij} \equiv \delta_{i+j, p+1}$, $\Delta_i(A)$ – верхний главный минор матрицы A размера $i \times i$, а $\Delta_{i,i+1}(A)$ – тот же самый минор, но матрицы, образованной из A перестановкой i и $i+1$ столбцов.

Теперь, исследуя асимптотики этой ВФ, мы можем получить функции Хариш-Чандры [39]. Прежде всего заметим, что число различных асимптотик совпадает с числом элементов группы Вейля для $SL(p)$, хотя ВФ (6.42) и выражается только через простые корни. Таким образом, неудивительно, что функции Хариш-Чандры нумеруются элементами группы Вейля и связаны между собой действием этой группы. Вычисление асимптотик следует известной технике, развитой для случая разложения Иваса-вы [49, 50], а результат имеет вид

$$c_s(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{\Gamma(1 + s \lambda \cdot \alpha)}, \quad (6.43)$$

где s обозначает элемент группы Вейля, а произведение берется по всем положительным корням. Отношение этих функций Хариш-Чандры задает нам отражательную S -матрицу в теории.

Квантово-полевая система Лиувилля. В качестве следующего шага мы можем обобщить нашу конструкцию на случай аффинной алгебры. Действительно, рассматривая группу $\widehat{SL(2)}$ и “поточечное” разложение Гаусса (используемое при бозонизации аффинных алгебр, см. [52]), мы приходим к уравнению Шредингера для двумерной *полевой* системы Лиувилля. Это означает, что, вычисляя функции Хариш-Чандры в этом случае, мы найдем S -матрицу (или двухточечный коррелятор) двумерной теории поля Лиувилля. Действительно, выберем систему положительных корней следующим образом:

$$\alpha_0 + n(\alpha_0 + \alpha_1), \quad n(\alpha_0 + \alpha_1), \quad \alpha_1 + n(\alpha_0 + \alpha_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.44)$$

Обозначим

$$\lambda \cdot \alpha_0 = \frac{1}{2} - p + \tau, \quad \lambda \cdot \alpha_1 = -\frac{1}{2} + p. \quad (6.45)$$

Теперь для функций Хариш-Чандры можно воспользоваться формулой (6.43), сдвинув только аргумент Γ -функции на $1/2$, поскольку мы работаем с аффинной алгеброй:

$$c(\lambda) = \prod_{n \geq 0} \Gamma^{-1}(p + n\tau) \prod_{n \geq 1} \Gamma^{-1}(n\tau) \Gamma^{-1}(1 - p + n\tau). \quad (6.46)$$

Это выражение, конечно, еще требует аккуратной регуляризации, но все бесконечные произведения равны нулю в соответствующей отражательной S -матрице (2-точечной функции):

$$S(p) = \frac{c(-p)}{c(p)} = \frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{p}{\tau})}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-\frac{p}{\tau})}. \quad (6.47)$$

Это выражение совпадает с двухточечными функциями, полученными в работах [54, 55, 53] совершенно иным способом³⁰.

Заметим, что если теперь ввести фундаментальный строительный блок — функцию

$$i(\lambda) = i(p, \tau) \sim \prod_{m, n \geq 0} (p + m + n\tau), \quad (6.48)$$

где произведение идет только по одному (положительному) квадранту в плоскости m, n , то из него можно построить как функцию Хариш-Чандры (6.46), так и эллиптические θ -функции

$$\theta\left(p + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \sim i(p, \tau)i(-p, \tau)i(p, -\tau)i(-p, -\tau), \quad (6.49)$$

а также q -экспоненту

$$e_q(e^{2\pi i p}) \sim \frac{1}{i(p, \tau)i(-p, -\tau)}, \quad 1 = e^{i\pi\tau}, \quad (6.50)$$

просто беря произведения по разным квадрантам. Все эти выражения, конечно, требуют подходящей регуляризации, поскольку неограниченные бесконечные произведения расходятся. Регуляризованные выражения можно найти в [105] и [53].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Полубесконечные иерархии

Мы воспроизведем здесь несколько технических вычислений, опущенных в пункте 2.3 (см. [73, 65]). А именно, рассмотрим полубесконечную иерархию, заданную условием

$$\tau_n = 0, \quad n < 0. \quad (\text{П1.1})$$

Это отвечает выбору элемента грассманиана в виде

$$G = G_0 P_+, \quad (\text{П1.2})$$

³⁰В обозначениях [53] $p = 2iP/b$ и $\tau = b^2$.

где P_+ – проектор на положительные состояния:

$$P_+ |n\rangle = \theta(n) |n\rangle, \quad (\text{П1.3})$$

который реализуется как фермионный оператор

$$P_+ = : \exp \left[\sum_{i < 0} \psi_i \psi_i^* \right] : \quad (\text{П1.4})$$

и обладает свойствами

$$P_+ \psi_{-k}^* = \psi_{-k} P_+ = 0, \quad k > 0, \quad (\text{П1.5})$$

$$[P_+, \psi_k] = [P_+, \psi_k^*] = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{П1.6})$$

$$P_+^2 = P_+. \quad (\text{П1.7})$$

Мы также выбираем G_0 в виде, включающем только положительные моды фермионов ψ_k и ψ_k^* с $k \geq 0$:

$$G_0 = : \exp \left\{ \left(\int_{\gamma} A(z, w) \psi_+(z) \psi_+^*(w^{-1}) dz dw \right) - \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right\} : , \quad (\text{П1.8})$$

где

$$\psi_+(z) = \sum_{k \geq 0} \psi_k z^k, \quad \psi_+^*(z) = \sum_{k \geq 0} \psi_k^* z^{-k}$$

и γ – некоторая область интегрирования. Кроме того, нам понадобится проектор на отрицательные состояния

$$P_- = : \exp \left[- \sum_{i \geq 0} \psi_i \psi_i^* \right] : , \quad (\text{П1.9})$$

который обладает следующими свойствами:

$$P_- \psi_k = \psi_k^* P_- = 0, \quad k \geq 0, \quad (\text{П1.10})$$

$$[P_-, \psi_{-k}] = [P_-, \psi_{-k}^*] = 0, \quad k > 0, \quad (\text{П1.11})$$

$$P_-^2 = P_-. \quad (\text{П1.12})$$

Вычислим состояние

$$G_0 P_+ e^{\overline{H}(y)} |n\rangle. \quad (\text{П1.13})$$

Как легко видеть, оно исчезает при $n < 0$. Действительно, используя (2.8), (2.12) и (П1.6), можно получить, что при $n < 0$ состояние

$$e^{\overline{H}(\bar{t})} |n\rangle = \psi_{-n}^*(\bar{t}) \dots \psi_{-1}^*(\bar{t}) e^{\overline{H}(\bar{t})} |0\rangle$$

содержит только отрицательные моды ψ_{-m}^* ($m > 0$). Следовательно, действие P_+ аннигилирует это состояние благодаря формуле (П1.5). Для $n \geq 0$, используя формулы (2.8), (2.12) и (П1.6), мы получаем

$$P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |n\rangle = \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |0\rangle. \quad (\text{П1.14})$$

Теперь мы используем тот факт, что

$$P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |0\rangle = |0\rangle. \quad (\text{П1.15})$$

Доказательство формулы (П1.15). Обозначим

$$|\bar{t}\rangle = P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |0\rangle.$$

Тогда согласно формулам (2.7) и (П1.5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} |\bar{t}\rangle = P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} \sum_{i=0}^{k-1} \psi_{i-k}^* \psi_i |0\rangle = 0.$$

Поскольку $|\bar{t}\rangle|_{\bar{t}_k=0} = |0\rangle$, формула (П1.15) доказана.

Таким образом, с использованием формул (П1.8), (П1.9) мы получаем

$$\begin{aligned} G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |n\rangle &= G \psi(\bar{t}) \dots \psi(\bar{t}) |0\rangle = \\ &= \sum \frac{1}{m!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^m A(z_i, w_i) dz_i dw_i \psi_+(z_1) \dots \psi_+(z_m) \times \\ &\quad \times P_- \psi_+^*(w_m^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П1.16})$$

Мы видим теперь, что только член с $m = n$ дает ненулевой вклад в бесконечную сумму (П1.16). Действительно, при $m > n$ состояние $\psi_+^*(w_m^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle$ исчезает, поскольку в этом случае некоторые положительные моды в $\psi_+^*(w_i^{-1})$ могут быть пододвинуты к вакууму $|0\rangle$ и поэтому обратят его в нуль. Обратно, при $m < n$ некоторые положительные моды в $\psi_k(-\bar{y})$ могут быть пододвинуты к проектору P_- и с помощью (П1.10) обратят его в нуль. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} |n\rangle &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) dz_i dw_i \psi_+(z_1) \dots \psi_+(z_n) \times \\ &\quad \times P_- \psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П1.17})$$

Теперь мы используем следующее утверждение:

$$\psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle = \Delta(w) \exp \left[\sum_{j=1}^n \xi(\bar{t}, w_j) \right] |0\rangle. \quad (\text{П1.18})$$

Доказательство формулы (П1.18). Поскольку число операторов рождения (по отношению к вакууму $|0\rangle$) $\psi_i(-\bar{y})$ равно числу операторов уничтожения $\psi_+^*(w_j^{-1})$, ясно, что после нормального упорядочивания

$$\psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle = \text{const} \cdot |0\rangle$$

и

$$\begin{aligned} \text{const} &= \langle 0 | \psi_+^*(w_n^{-1}) \dots \psi_+^*(w_1^{-1}) \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) |0\rangle = \\ &= \det [\langle 0 | \psi_+^*(w_i^{-1}) \psi_{j-1}(\bar{t}) |0\rangle] \big|_{i,j=1,\dots,n}. \end{aligned}$$

Теперь, используя формулы (2.13), (2.9), получаем

$$\langle 0 | \psi_+^* (w_i^{-1}) \psi_{j-1}(\bar{t}) | 0 \rangle = w_i^{j-1} e^{\xi(\bar{t}, w_i)}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\text{const} = \det[w_i^{j-1} e^{\xi(\bar{t}, w_i)}] = \Delta(w) \exp \left[\sum_{j=1}^n \xi(\bar{t}, w_j) \right].$$

Теперь подставляя (П1.18) в (П1.17) и используя очевидный факт, что $P_- | 0 \rangle = | 0 \rangle$ и $\psi_-(z_i) | 0 \rangle = 0$, мы получаем

$$G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} | n \rangle = \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i \Delta(w) \psi(z_1) \dots \psi(z_n) | 0 \rangle. \quad (\text{П1.19})$$

Наконец, с помощью одной из основных формул работы [62] (которая может быть просто доказана в технике бозонизации)

$$\psi(z_1) \dots \psi(z_n) | 0 \rangle = \Delta(z) \exp \left[\overline{H} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon(z_i) \right) \right] | 0 \rangle, \quad (\text{П1.20})$$

где $\epsilon(z_i)$ — вектор с компонентами $\epsilon_k(z_i) = (1/k) z_i^k$, мы получаем желаемый результат:

$$\begin{aligned} G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} | n \rangle &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i \times \\ &\times \Delta(w) \Delta(z) \exp \left[\overline{H} \left(\sum_{i=1}^n \epsilon(z_i) \right) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П1.21})$$

Итак, мы окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle n | e^{H(x)} G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} | n \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\gamma} \Delta(w) \Delta(z) \prod_{i=1}^n A(z_i, w_i) e^{\xi(t, z_i) + \xi(\bar{t}, w_i)} dz_i dw_i. \end{aligned} \quad (\text{П1.22})$$

Детерминантное представление. Используя формулы (2.8), (П1.7) и тот факт, что $[P_+, g_0] = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle 0 | \psi_0^* \dots \psi_{n-1}^* e^{H(t)} G_0 P_+ e^{\overline{H}(\bar{t})} \psi_{n-1} \dots \psi_0 | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | e^{H(t)} \psi_0^*(-t) \dots \psi_{n-1}^*(-t) P_+ G_0 P_+ \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) e^{\overline{H}(\bar{t})} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $\psi_i^*(-t)$ и $\psi_i(\bar{t})$ содержат только положительные моды (см. формулы (2.11) и (2.12)), из (П1.6) и (П1.15) можно получить

$$\begin{aligned} \tau_n(t, \bar{t}) &= \langle 0 | \psi_0^*(-t) \dots \psi_{n-1}^*(-t) G_0 \psi_{n-1}(\bar{t}) \dots \psi_0(\bar{t}) | 0 \rangle = \\ &= \det \left[\langle 0 | \psi_i^*(-t) G_0 \psi_j(\bar{t}) | 0 \rangle \right]_{i,j=0, \dots, n-1}. \end{aligned} \quad (\text{П1.23})$$

Те же самые аргументы, которые мы использовали для перехода от формулы (П1.16) к формуле (П1.17), примененные к уравнению (П1.23), приводят нас к заключению, что только линейный член в $A(z, w)$ дает вклад. Поэтому с помощью (П1.10) мы находим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_i^*(-t) G \psi_j(\bar{t}) | 0 \rangle &= \int_{\gamma} A(z, w) dz dw \langle 0 | \psi_i^*(-t) \psi_+(z) P_- \psi_+^*(w^{-1}) \psi_j(\bar{t}) | 0 \rangle = \\ &= \int_{\gamma} z^i w^j A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw = \\ &= \partial_t^i \partial_{\bar{t}}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw. \end{aligned} \quad (\text{П1.24})$$

Таким образом, окончательно выражение для τ -функции в детерминантной форме имеет вид

$$\tau_n(t, \bar{t}) = \det \left[\partial_{x_1}^i \partial_{\bar{t}_1}^j \int_{\gamma} A(z, w) e^{\xi(t, z) + \xi(\bar{t}, w)} dz dw \right] \Big|_{i, j=0, \dots, n-1}. \quad (\text{П1.25})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Фундаментальные представления группы $SL_q(p)$

Здесь мы обобщим описанную в пункте 5.1 структуру фундаментальных представлений на квантовый случай, т.е. группу $SL_q(p)$ с $q \neq 1$ (см. [35] и приведенные там ссылки).

Основное новое понятие, которое нам понадобится, — это определение q -антисимметризации как суммы по всем перестановкам:

$$[1, \dots, k]_q = \sum_P (-q)^{\deg P} (P(1), \dots, P(k)), \quad (\text{П2.1})$$

где

$$\deg P = \text{число инверсий в } P. \quad (\text{П2.2})$$

Так, например, q -антисимметризация используется в определении q -детерминанта:

$$\det_q A \sim A_{[1 \dots p]_q}^{[1 \dots p]_q} = \sum_{P, P'} (-q)^{\deg P + \deg P'} \prod_a A_{P'(a)}^{P(a)}. \quad (\text{П2.3})$$

Заметим, что эта величина не обязательно совпадает с $A_{[1 \dots p]_q}^{[1 \dots p]_q}$. Например, для $p = 2$ формула (П2.3) дает

$$\frac{1}{[2]} (A_1^1 A_2^2 - q A_2^1 A_1^2 - q A_1^2 A_2^1 + q^2 A_2^2 A_1^1),$$

в то время как q -антисимметризация только по нижним индексам дала бы просто $A_1^1 A_2^2 - q A_2^1 A_1^2$. Более того, $A_{[1 A_2]}^1 = A_1^1 A_2^1 - q A_2^1 A_1^1$ не обязано быть равным нулю, и даже $A_{[1 A_1]}^1 = (1 - q)(A_1^1)^2 \neq 0$.

“Нормальные” свойства q -антисимметризации восстанавливаются, если рассматривать в качестве A_j^i элементы координатного кольца $A(GL(p))$ (алгебры функций на

квантовой группе $GL_q(p)$). Такие матричные элементы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям (в частном случае $p = 2$ сводящимся к (4.39)) [26]:

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j_1 < j_2 \quad A_{[j_1 A_{j_2}]_q}^i &= 0 \quad (ab = qba, \quad cd = qdc), \\ \forall i_1 < i_2, \forall j \quad A_j^{[i_1 A_{j_2}]_q} &= 0 \quad (ac = qca, \quad bd = qdb), \\ \forall i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2 \quad A_{j_2}^{i_1} A_{j_1}^{i_2} &= A_{j_1}^{i_2} A_{j_2}^{i_1} \quad (bc = cb), \\ \forall i_1 < i_2, j_1 < j_2 \\ A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} - A_{j_2}^{i_2} A_{j_1}^{i_1} &= (q - q^{-1}) A_{j_2}^{i_1} A_{j_1}^{i_2} \quad (ad - da = (q - q^{-1})bc). \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Для $A \in GL_q(p)$

$$\det_q A = A_{[1}^1 \dots A_{p]}^p = A_1^{[1} \dots A_p^{p]} \quad (\text{П2.5})$$

и $A_{[1}^{i_1} \dots A_{k]}^{i_k} = 0$, если любые два верхних индекса совпадают (и только при условии, что все нижние различны: даже для $A \in GL_q(p)$ все еще верно, что $A_{[1}^1 A_{1]}^1 = (1 - q)(A_1^1)^2 \neq 0$).

Понятие q -антисимметризации важно для построения фундаментальных представлений, поскольку k -е фундаментальное представление $F^{(k)}$ для $SL_q(p)$ является q -антисимметричной степенью $F = F^{(1)}$: при $q \neq 1$ вместо (5.2) мы имеем

$$F^{(k)} = \{\Psi_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \sim \psi_{[i_1} \dots \psi_{i_k]}_q, \quad i_1 < \dots < i_k\}. \quad (\text{П2.6})$$

Заметим, что теперь необходимо *явно* потребовать, чтобы все i_a были различны.

Все формулы типа (5.4) для сплетающих операторов в квантовом случае остаются неизменными, если заменить в них антисимметризацию q -антисимметризацией (и очевидным образом определить q - ϵ -символ). Вместо (5.7) мы теперь получаем

$$g^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{smallmatrix} \right) \sim \det_q g_{j_b}^{i_a}, \quad i_1 < \dots < i_k \quad \text{или} \quad j_1 < \dots < j_k, \quad (\text{П2.7})$$

а (5.8) превращается в

$$\begin{aligned} g^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{smallmatrix} \right) g^{(k')} \left(\begin{smallmatrix} i'_1 \dots i'_{k'} \\ j_{k+1} j'_1 \dots j'_{k'-1} \end{smallmatrix} \right) = \\ = g^{(k+1)} \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k [i'_k] \\ j_1 \dots j_{k+1} \end{smallmatrix} \right) g^{(k'-1)} \left(\begin{smallmatrix} i'_1 \dots i'_{k'-1} q \\ j'_1 \dots j'_{k'-1} \end{smallmatrix} \right), \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

$$\begin{aligned} i_1 < \dots < i_k \quad \text{или} \quad j_1 < \dots < j_k, \\ i'_1 < \dots < i'_{k'} \quad \text{или} \quad j_{k+1} < j'_1 < \dots < j'_{k'-1}, \\ i_1 < \dots < i_k < i'_{k'} \quad \text{или} \quad j_1 < \dots < j_{k+1}, \\ i'_1 < \dots < i'_{k'-1} \quad \text{или} \quad j'_1 < \dots < j'_{k'-1}. \end{aligned} \quad (\text{П2.9})$$

В точности, как и (5.8), это просто тождество на матрицы из $GL_q(p)^{31}$. Новая по сравнению с (5.8) черта – явное ограничение индексов i, j, i', j' , которое делает переход на язык производящих функций более сложным.

Заметим, что, подобно классическому случаю, из квантовых миноров (П2.7) можно построить локальные координаты на квантовом пространстве флагов [106]. Как и в классическом случае, эти координаты удовлетворяют набору (квантовых) билинейных тождеств (Плюккера) и являются квантовым обобщением плюккеревых координат [107]. К сожалению, до сих пор неизвестен согласованный способ параметризации плюккеревых координат временами.

Теперь мы хотели бы подробнее обсудить формулу (П2.6). Мы начнем с классического случая, поскольку структура представлений практически не меняется при квантовании.

Алгебра Ли $SL(p)$ генерируется операторами $T_{\pm\alpha}$ и картановскими операторами H_{β} , так что $[H_{\beta}, T_{\pm\alpha}] = \pm(1/2)(\alpha\beta)T_{\pm\alpha}$. Все элементы представлений являются собственными функциями картановских генераторов H_{β} , $H_{\beta}|\lambda\rangle = (1/2)(\beta\lambda)|\lambda\rangle$. Старшие векторы μ_k представлений $F^{(k)}$ образуют систему, “дуальную” к простым корням α_i , $i = 1, \dots, r$: $(\mu_i \alpha_j) = \delta_{ij}$, причем

$$\rho \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha = \sum_i \mu_i.$$

Представление $F^{(1)}$ содержит состояния вида

$$\psi_i = T_{-(i-1)} \dots T_{-2} T_{-1} \psi_1, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{П2.11})$$

Более того,

$$T_{-i} \psi_j = \delta_{ij} \psi_{i+1} \quad (\text{П2.12})$$

(таким образом, для $T_- = \sum_{i=1}^r T_{-\alpha_i}$ имеем $T_-^i \psi_j = \psi_{j+i}$ и получается уравнение (5.1)) и

$$\lambda(\psi_i) = \mu_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{i_1}, \quad (\text{П2.13})$$

здесь $T_{\pm i} \equiv T_{\pm\alpha_i}$ – генераторы, ассоциированные с простыми корнями. Обозначим соответствующий базис в алгебре Картана через $H_i = H_{\alpha_i}$, $H_i|\lambda\rangle = (1/2)(\alpha_i\lambda)|\lambda\rangle = \lambda_i|\lambda\rangle$, тогда

$$\lambda_i^{(j)} \equiv \lambda_i(\psi_j) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \delta_{i,j-1}). \quad (\text{П2.14})$$

³¹⁾Здесь важно, что g принадлежит некоторой $GL_q(p)$, т.е. ее элементы имеют подходящие коммутационные соотношения. Это, конечно, подразумевалось при выводе (П2.8), где предполагалось, что g является групповым элементом. Не будь этого, формула (П2.7) должна была бы пониматься в духе (П2.3) (в частности, нужно было бы писать “ u ” вместо “ $или$ ” в (П2.7)), и мы пришли бы к противоречию с (П2.8). Чтобы прояснить это место, рассмотрим пример $k = k' = 1$, так что (П2.8) превращается в

$$g_{[j_1 j_2]_q}^{i i'} = g^{(2)} \begin{pmatrix} i i' \\ j_1 j_2 \end{pmatrix} \quad (\text{П2.10})$$

и левая часть этой формулы равна $g_{j_1}^i g_{j_2}^{i'} - q g_{j_2}^i g_{j_1}^{i'}$, в то время как правая должна интерпретироваться как $g_{j_1}^i g_{j_2}^{i'} - q g_{j_2}^i g_{j_1}^{i'} + q^2 g_{j_2}^i g_{j_1}^{i'}$.

Эта формула вместе с (П2.11) и коммутационными соотношениями алгебры дает $\|\psi_i\|^2 = 1$. Поскольку закон коумножения в классическом случае – это просто $\Delta(T) = T \otimes I + I \otimes T$, то $\psi_{[1 \dots \psi_k]}$ – все векторы старшего веса (т.е. они обращаются в нуль всеми $\Delta_k(T_{+i})$ и, таким образом, всеми $\Delta_k(T_{+\alpha})$).

Квантовая УОА $U_q(SL(p))$ задается генераторами Шевалле $T_{\pm i}$, отвечающими простым корням, а также $q^{\pm H_i}$ с определяющими коммутационными соотношениями (a_{ij} – матрица Картана $SL(p)$) [108, 109, 98]

$$\begin{aligned} q^{H_i} T_{\pm j} q^{-H_i} &= q^{\pm a_{ij}} T_{\pm j}, \\ [T_{+i}, T_{-j}] &= \delta_{ij} \frac{q^{2H_i} - q^{-2H_i}}{q - q^{-1}} \end{aligned} \quad (\text{П2.15})$$

и законом коумножения

$$\begin{aligned} \Delta(T_{\pm i}) &= q^{H_i} \otimes T_{\pm i} + T_{\pm i} \otimes q^{-H_i}, \\ \Delta(q^{\pm H_i}) &= q^{\pm H_i} \otimes q^{\pm H_i}. \end{aligned} \quad (\text{П2.16})$$

Генераторы Шевалле, кроме того, подчиняются дополнительным соотношениям Серра [108, 109]. Если перейти от базиса Шевалле к базису генераторов, отвечающих всем корням, то тождества Серра не нужны (они превращаются в соотношения алгебры). В этом случае, однако, закон коумножения для $T_{\pm \alpha}$, который легко считывается с (П2.16), оказывается довольно сложным. К примеру, для генератора, отвечающего корню “веса 2” α , т.е. $T_{\pm \alpha} = \pm [T_{\pm \alpha_i}, T_{\pm \alpha_{i+1}}]$, мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta(T_{-\alpha}) &= -[\Delta(T_{\alpha_i}), \Delta(T_{\alpha_{i+1}})] = q^{H_\alpha} \otimes T_\alpha + T_\alpha \otimes q^{-H_\alpha} + (q^{1/2} - q^{-1/2}) \times \\ &\times [(T_{-\alpha_i} \otimes T_{-\alpha_{i+1}})(q^{H_{i+1}} \otimes q^{-H_i}) - \\ &- (T_{-\alpha_{i+1}} \otimes T_{-\alpha_i})(q^{H_i} \otimes q^{-H_{i+1}})]. \end{aligned} \quad (\text{П2.17})$$

При заданном правиле коумножения можно легко проверить справедливость формулы (П2.6). Например, для $F^{(2)}$ имеем

$$\Delta(T_{+i})(\psi_1 \psi_2 - q \psi_2 \psi_1) = \delta_{i,1} \left(q^{\lambda_1^{(1)}} \psi_1 \psi_1 - q^{1-\lambda_1^{(1)}} \psi_1 \psi_1 \right) = 0, \quad (\text{П2.18})$$

поскольку $\lambda_1^{(1)} = 1/2$. Таким образом, $\Psi_{12}^{(2)} \equiv \psi_{[1} \psi_{2]} q$, действительно, является вектором старшего веса. Подобным образом ($i < j$) находим

$$\begin{aligned} \Delta(T_{-l}) \Psi_{ij}^{(2)} &= \Delta(T_{-l})(\psi_i \psi_j - q \psi_j \psi_i) = \\ &= \delta_{li} q^{-\lambda_i^{(j)}} (\psi_{i+1} \psi_j - q^{1+2\lambda_i^{(j)}} \psi_j \psi_{i+1}) + \\ &+ \delta_{lj} q^{\lambda_j^{(i)}} (\psi_i \psi_{j+1} - q^{1-2\lambda_j^{(i)}} \psi_{j+1} \psi_i). \end{aligned} \quad (\text{П2.19})$$

Согласно (П2.14) для $i < j$ всегда $\lambda_j^{(i)} = 0$, в то время как $\lambda_i^{(j)} \neq 0$, только если $j = i+1$, причем $\lambda_i^{(i+1)} = -1/2$. Таким образом, имеем

$$\Delta(T_{-l}) \Psi_{ij}^{(2)} = \delta_{lj} \Psi_{i,j+1}^{(2)} + \delta_{li} \Psi_{i+1,j}^{(2)} (1 - \delta_{i+1,j}). \quad (\text{П2.20})$$

Отсюда следуют правила для действия всех $\Delta(T_{-\alpha})$. Нетрудно явно описать действие всех $\Delta(T_{+i})$ и проделать то же самое также и для других представлений $F^{(k)}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Явный пример: τ_2 для $SL_q(p)$

Рассмотрим простейшую τ -функцию для группы $SL_q(p)$ в простейшем нетривиальном втором фундаментальном представлении [38]. Обозначим через $\{u\}$ и $\{v\}$ поднаборы $\{s\}$ такие, что $i(s) = 1$ и $i(s) = 2$, соответственно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \tau_1^{00}(\{q\xi_u\}, \{q^{-1}\xi_v\}, \xi_s; \{\bar{\xi}_u\}, \{\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) \tau_1^{11}(\{\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{q\bar{\xi}_u\}, \{q\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) - \\ & - q\tau_1^{01}(\{q\xi_u\}, \{q^{-1}\xi_v\}, \xi_s; \{\bar{\xi}_u\}, \{\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) \tau_1^{10}(\{\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{q^{-1}\bar{\xi}_u\}, \{q\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) - \\ & - q\tau_1^{10}(\{q^{-1}\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{\bar{\xi}_u\}, \{\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) \tau_1^{01}(\{\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{q\bar{\xi}_u\}, \{q\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) + \\ & + q^2\tau_1^{11}(\{q^{-1}\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{\bar{\xi}_u\}, \{\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) \tau_1^{00}(\{\xi_u\}, \{\xi_v\}, \xi_s; \{q^{-1}\bar{\xi}_u\}, \{q\bar{\xi}_v\}, \bar{\xi}_s) \end{aligned} \quad (\text{П3.1})$$

Здесь ξ_s обозначает все времена с $i(s) > 2$. Рассмотрим теперь параметризацию А. В формуле (П3.1) каждый набор $\{u\}$ и $\{v\}$ состоит из единственного элемента: $\{u\} = \{s = 1\}$, $\{v\} = \{s = 2\}$. Получаем

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \tau_1^{00}(q\xi_1, q^{-1}\xi_2, \xi_i; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) \tau_1^{11}(\xi_1, \xi_2, \xi_i; q\bar{\xi}_1, q\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) - \\ & - q\tau_1^{01}(q\xi_1, q^{-1}\xi_2, \xi_i; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) \tau_1^{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_i; q^{-1}\bar{\xi}_1, q\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) - \\ & - q\tau_1^{10}(q^{-1}\xi_1, \xi_2, \xi_i; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) \tau_1^{01}(\xi_1, \xi_2, \xi_i; q\bar{\xi}_1, q\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) + \\ & + q^2\tau_1^{11}(q^{-1}\xi_1, \xi_2, \xi_i; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) \tau_1^{00}(\xi_1, \xi_2, \xi_i; q^{-1}\bar{\xi}_1, q\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_i) \end{aligned} \quad (\text{П3.2})$$

С помощью операторов

$$\mathcal{D}_1^L \equiv M_1^- D_1 \otimes I, \quad \mathcal{D}_1^R \equiv M_1^+ M_2^- \otimes D_1, \quad \bar{\mathcal{D}}_1^L \equiv \bar{D}_1 \otimes \bar{M}_1^- \bar{M}_2^+, \quad \bar{\mathcal{D}}_1^R \equiv I \otimes \bar{M}_1^+ \bar{D}_1$$

выражение (П3.2) может быть переписано в более компактной форме

$$\begin{aligned} \tau_2 = & (\mathcal{D}_1^R \bar{\mathcal{D}}_1^R - q\mathcal{D}_1^L \bar{\mathcal{D}}_1^R - q\mathcal{D}_1^R \bar{\mathcal{D}}_1^L + q^2\mathcal{D}_1^L \bar{\mathcal{D}}_1^L) \tau_1 \otimes \tau_1 = \\ = & (\mathcal{D}_1^R - q\mathcal{D}_1^L) \cdot (\bar{\mathcal{D}}_1^R - q\bar{\mathcal{D}}_1^L) \tau_1 \otimes \tau_1. \end{aligned} \quad (\text{П3.3})$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям, образующим алгебру, подобную θ и χ в (4.56): $\mathcal{D}_1^L \mathcal{D}_1^R = q\mathcal{D}_1^R \mathcal{D}_1^L$, $\bar{\mathcal{D}}_1^L \bar{\mathcal{D}}_1^R = q\bar{\mathcal{D}}_1^R \bar{\mathcal{D}}_1^L$. Формула для τ_2 может быть переписана в более “инвариантном” виде в терминах операторов:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_i^L & \equiv D_i \otimes I, \quad \mathbb{D}_i^R \equiv \prod_j M_j^{-\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j} \otimes D_i, \\ \bar{\mathbb{D}}_i^L & \equiv \bar{D}_i \otimes \prod_j \bar{M}_j^{-\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j}, \quad \bar{\mathbb{D}}_i^R \equiv I \otimes \bar{D}_i, \end{aligned} \quad (\text{П3.4})$$

коммутирующих как

$$\mathbb{D}_i^L \mathbb{D}_j^R = q^{\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j} \mathbb{D}_j^R \mathbb{D}_i^L, \quad \bar{\mathbb{D}}_i^L \bar{\mathbb{D}}_j^R = q^{\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j} \bar{\mathbb{D}}_j^R \bar{\mathbb{D}}_i^L. \quad (\text{П3.5})$$

Действительно, тогда получаем

$$\tau_2 = M_1^- \otimes \overline{M}_1^+ (\mathbb{D}_1^R - q\mathbb{D}_1^L) \cdot (\overline{\mathbb{D}}_1^R - q\overline{\mathbb{D}}_1^L) \tau_1 \otimes \tau_1. \quad (\text{П3.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Построение функции Уиттекера для группы $SL(p)$

Построим ВФ системы Тоды, отвечающей группе $SL(p)$ [39]. Начнем с обозначений и определений. Стандартными источниками для нас являются учебники [110, 111].

П. 4.1. Обозначения

Алгебра Ли группы Ли $SL(p)$ полностью задается следующими коммутационными соотношениями генераторов, отвечающих простым корням (генераторов Шевалле):

$$[T_{\pm i}, T_{0,j}] = \mp A_{ij} T_{\pm i}, \quad [T_{+i}, T_{-j}] = \delta_{ij} T_{0,j}, \quad i, j = 1, \dots, p-1, \quad (\text{П4.1})$$

а также соотношениями Серра на них:

$$\text{ad}_{T_{\pm i}}^{1-A_{ij}}(T_{\pm j}) = 0, \quad (\text{П4.2})$$

где

$$\text{ad}_x^k \equiv \underbrace{[x, [x, \dots, [x, y] \dots]]}_{k \text{ раз}}.$$

Остальные коммутационные соотношения могут быть получены из (П4.1), (П4.2), причем генераторы, отвечающие положительным (отрицательным) непростым корням, могут быть построены из генераторов Шевалле, отвечающих положительным (отрицательным) корням, при помощи явной формулы $[T_{\alpha}, T_{\beta}] = N_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta}$. Генератор $T_{\alpha+\beta}$ здесь отвечает непростому корню $\alpha + \beta$, а $N_{\alpha,\beta}$ — некоторые ненулевые структурные константы. При использовании генераторов, отвечающих непростым корням, тождества Серра заменяются подходящими соотношениями алгебры Ли.

Мы будем использовать также следующие обозначения: α_i — простые корни в соответствующей алгебре Ли, $A_{ij} \equiv \alpha_i \cdot \alpha_j$ — матрица Картана, μ_i — фундаментальные веса, которые по определению лежат в дуальной решетке $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$ (т.е. $\mu_i = A_{ij}^{-1} \alpha_j$), а

$$\rho \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_i \mu_i,$$

где Δ^+ — набор всех положительных корней. В этих обозначениях $\phi_i = -\mu_i \cdot \phi$. Корни α_i могут быть также рассмотрены как векторы в p -мерной картаповской плоскости группы $GL(p)$: $\alpha_i = \mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Для определения операторов Казимира фиксируем некоторое представление ρ УОА $U(SL(p))$. Определим L -оператор формулой [26]

$$L \equiv \sum_{\alpha \in \Delta} \rho(T_{\alpha}) \otimes T_{-\alpha} + \sum_i A_{ij}^{-1} \rho(T_i) \otimes T_j. \quad (\text{П4.3})$$

Тогда k -й оператор Казимира может быть задан выражением

$$C_k \equiv \text{tr}_\rho L^k, \quad (\text{П4.4})$$

где след берется по представлению ρ . В действительности, поскольку результат не зависит от представления ρ , можно выбрать простейшее первое фундаментальное представление. Тогда операторы Казимира вычисляются весьма просто. В частности, квадратичный оператор Казимира имеет вид

$$C_2 = \sum_{\alpha \in \Delta} T_\alpha T_{-\alpha} + \sum_{ij}^{p-1} A_{ij}^{-1} T_{0,i} T_{0,j}, \quad (\text{П4.5})$$

где первая сумма идет по всем (положительным и отрицательным) корням.

П4.2. Представления

Для произвольной группы $SL(p)$ можно определить (правое) регулярное представление только в общих терминах группы, действующей на пространстве алгебры функций:

$$\pi_{\text{reg}}(h)f(g) = f(gh). \quad (\text{П4.6})$$

Поэтому мы будем в основном использовать групповые (не алгебраические) термины (см., однако, [39]). Оказывается, что для общей группы $SL(p)$ возможно описывать ограничение пространства функций на неприводимые представления. Для этого надо рассмотреть представления, индуцированные одномерными представлениями борелевской подгруппы. Это ограничивает пространство всех функций на функции, удовлетворяющие свойству ковариантности:

$$f_\lambda(bg) = \chi_\lambda(b)f_\lambda(g), \quad (\text{П4.7})$$

где b — элемент борелевской подгруппы нижнетреугольных матриц, а χ_λ — характер борелевской подгруппы вида

$$\chi_\lambda(b) = \prod_{i=1}^{p-1} |b_{ii}|^{(\lambda - \rho)e_i} (\text{sign } b_{ii})^{\epsilon_i}, \quad (\text{П4.8})$$

где ϵ_i равны 0 или 1. Для простоты мы рассмотрим только представления без знаковых факторов, хотя общий случай также легко исследуется. Описанные представления принадлежат главной сферической серии.

Таким образом, представления даются ограничением пространства функций на функции, определенные на фактор-группе $B \backslash G$, которая, может быть идентифицирована с (нильпотентной) подгруппой строго верхнетреугольных матриц N_+ . При данном λ существует естественная эрмитова билинейная форма на пространстве матричных элементов X , которая задана просто плоской мерой:

$$\langle f_L | f_R \rangle_\lambda = \int_{X=B \backslash G} \overline{f_{L,\lambda}(x)} f_{R,\lambda}(x) \prod_{ij} dx_{ij}. \quad (\text{П4.9})$$

Эта форма становится скалярным произведением при чисто мнимых λ , что дает унитарные неприводимые представления основной серии.

П 4.3. Гамильтониан и уравнение Шредингера

Рассмотрим следующие условия редукции, аналогичные (6.30):

$$T_{+,i}|\psi_R\rangle = i\mu_i^R|\psi_R\rangle \quad (\text{П4.10})$$

и

$$\langle\psi_L|T_{-,i} = i\mu_i^L\langle\psi_L|, \quad (\text{П4.11})$$

где $\mu_i^{R,L}$ – космологические постоянные. Эти условия задаются только генераторами Шевалле, поскольку все остальные легко получаются из коммутационных соотношений алгебры. Точнее, действие всех генераторов, отвечающих простым корням, просто дает нуль. Теперь нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \rho^2)F^{(\lambda)}(\phi) &\equiv (\lambda^2 - \rho^2)\langle\psi_L|e^{-\mu_i\phi T_{0,i}}|\psi_R\rangle = \langle\psi_L|e^{-\mu_i\phi T_{0,i}}C_2|\psi_R\rangle = \\ &= \langle\psi_L|e^{-\mu_i\phi T_{0,i}}\left(2\sum_{\alpha\in\Delta^+}T_\alpha T_{-\alpha} + 2\sum_{ij}A_{ij}^{-1}T_{0,j} + \sum_{ij}A_{ij}^{-1}T_{0,i}T_{0,j}\right)|\psi_R\rangle = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\sum_i\partial(\alpha_i\phi) - 2\sum_i\mu_i^L\mu_i^R e^{\alpha_i\phi}\right)\langle\psi_L|e^{-\mu_i\phi T_{0,i}}|\psi_R\rangle \end{aligned} \quad (\text{П4.12})$$

и $\Psi^{(\lambda)}(\phi) = e^{-\rho\phi}F^{(\lambda)}(\phi)$ удовлетворяет уравнению Шредингера для цепочки Тоды

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2\sum_i\mu_i^L\mu_i^R e^{\alpha_i\phi}\right)\Psi^{(\lambda)}(\phi) = \lambda^2\Psi^{(\lambda)}(\phi). \quad (\text{П4.13})$$

П 4.4. Решение уравнения Шредингера

Для того чтобы явно вычислить функцию Уиттекера, мы должны явно построить решение условий (П4.10) и (П4.11). Здесь мы, однако, не будем использовать алгебраический подход – решать соответствующее дифференциальное уравнение³²⁾, а вместо этого используем язык теории групп. А именно, мы найдем функции $f_{L,\lambda}(g)$ и $f_{R,\lambda}(g)$ в пространстве представления, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(z)f_{R,\lambda}(g) &= f_{R,\lambda}(gz) = e^{\sum i\mu_i z_{i,i+1}}f_{R,\lambda}(g) = e^{i\text{Tr}(\mu z)}f_{R,\lambda}(g), \\ (\mu)_{ij} &= \delta_{i-1,j}\mu_i, \quad g, z \in N_+, \end{aligned} \quad (\text{П4.14})$$

и

$$\pi_\lambda(z^t)f_{L,\lambda}(g) = e^{i\text{Tr}(\mu_L z)}f_{L,\lambda}(g), \quad (\text{П4.15})$$

являющимся групповым аналогом условий (П4.10) и (П4.11).

Решение первого условия эквивалентно построению одномерного представления группы верхнетреугольных матриц. Вначале мы сконструируем аддитивный характер этой группы, используя тот факт, что в произведении двух верхнетреугольных матриц

³²⁾ В [39] описано, как это делать в данном случае.

их элементы, лежащие на следующей за основной диагонали, складываются. Тогда можно экспоненцировать этот характер, получая искомое одномерное представление

$$f_{R,\lambda}^\mu(x) = e^{i \operatorname{Tr}(\mu x)}. \quad (\text{П4.16})$$

Для нахождения функции $f_{L,\lambda}(x)$, удовлетворяющей уравнению (П4.15), мы используем внутренний автоморфизм группы $SL(p)$, отображающий строго верхнетреугольные матрицы в строго нижнетреугольные. Этот автоморфизм явно описывается матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П4.17})$$

т. е.

$$S_{ij} = \delta_{i+j,p+1} \quad (\text{П4.18})$$

и

$$(S^{-1}zS)_{ij} = z_{p+1-i,p+1-j}. \quad (\text{П4.19})$$

На самом деле, необходимо, чтобы матрица S была элементом группы $SO(p)$ (в общем случае она конструируется как элемент группы Вейля [39]). Следовательно, она должна быть нормирована так, чтобы иметь единичный детерминант. Это может быть сделано домножением на -1 , что не влияет на формулу (П4.19). Заметим, что автоморфизм S отражает элемент $z_{i,i-1}$ в элемент $z_{p-i,p+1-i}$ вместо $z_{i-1,i}$ (из-за условия (П4.11) нам интересны только элементы z , лежащие на ближайшей к основной диагонали). Ситуация может быть исправлена подходящим отражением матрицы μ . А именно, нужно ввести новую матрицу $\tilde{\mu}_L \equiv \mu_{p-i}^L \delta_{i-1,j}$, после чего условие (П4.15) может быть переписано в виде

$$\pi_\lambda(SzS^{-1})f_L(g) = f_L(gSzS^{-1})e^{i \operatorname{Tr}(\tilde{\mu}_L z)}f_{L,\lambda}(gS^{-1}S), \quad (\text{П4.20})$$

т. е.

$$f_L(gS^{-1}z) = e^{i \operatorname{Tr}(\tilde{\mu}_L z)}f_{L,\lambda}(gS^{-1}). \quad (\text{П4.21})$$

Как мы уже видели, решение такого уравнения в верхнетреугольных матрицах имеет вид

$$f_L(gS^{-1})|_{B_-=0} = f_L(n_+) = e^{i \operatorname{Tr}(\tilde{\mu}_L n_+)}, \quad (\text{П4.22})$$

где n_+ – верхнетреугольная часть gS^{-1} . Однако нам нужно решение (П4.20) для $g = x \in N_+$, поэтому требуется некоторый пересчет:

$$f_L(xS^{-1}) = \chi_\lambda(xS^{-1})f_L(n_+) = \chi_\lambda(xS^{-1})e^{i \operatorname{Tr}(\tilde{\mu}_L n_+)}. \quad (\text{П4.23})$$

Вычислим эту функцию более явно. Прежде всего элементы диагональной матрицы h в разложении Гаусса матрицы g даются формулой³³⁾

$$h_i = \frac{\Delta_i(g)}{\Delta_{i-1}(g)}, \quad h_1 = \Delta_1(g), \quad \Delta_p(g) = \frac{\Delta_1(g)}{\Delta_{p-1}(g)}, \quad (\text{П4.24})$$

где $\Delta_i(g)$ обозначает верхний главный минор матрицы g размера $i \times i$. Таким образом, диагональная часть XS^{-1} дается отношением $h_i = \Delta_i(XS^{-1})/\Delta_{i-1}(XS^{-1})$ и

$$\chi_\lambda(XS^{-1}) = \prod_i \Delta_i^{(\lambda \alpha_i - 1)}(XS^{-1}). \quad (\text{П4.25})$$

Чтобы получить формулу для элементов $(n_+)_{k-1,k}$, заметим, что они зависят только от подматрицы размера $k \times k$ в левом верхнем углу. Рассмотрим элемент $(k-1, k)$ матрицы $b^{-1} \equiv n_+ g^{-1}$, $g = XS^{-1}$. Он равен нулю по определению b , так что мы получаем тождество

$$(n_+)_{k-1,k}(g^{-1})_{k,k} + (n_+)_{k-1,k-1}(g^{-1})_{k-1,k} = 0. \quad (\text{П4.26})$$

Используя явное представление для элементов обратной матрицы, находим желаемое выражение:

$$(n_+)_{k-1,k} = \frac{\Delta_{k-1,k}(XS^{-1})}{\Delta_{k-1}(XS^{-1})}, \quad (\text{П4.27})$$

где символ $\Delta_{k-1,k}(XS^{-1})$ определен как детерминант подматрицы размера $(k-1) \times (k-1)$ матрицы XS^{-1} с переставленными k и $k-1$ столбцами.

Таким образом, мы получили явные выражения для функций f_L и f_R . Для вычисления функции Уиттекера нам теперь осталось определить действие картановской части группового элемента g на $f_R(x)$. Заметим, что, хотя элемент xh с $x \in X$ и $h \in H$ не принадлежит X , элемент $h^{-1}xh$ принадлежит. Поэтому с помощью (П4.6) можно получить

$$\pi_\lambda(h)f_{R,\lambda}(x) = f_{R,\lambda}(hh^{-1}xh) = h^{\lambda-\rho}f_{R,\lambda}(h^{-1}xh). \quad (\text{П4.28})$$

Теперь, используя эту формулу и явное выражение (П4.16), мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(e^{-\mu_i \phi T_{0,i}})f_{R,\lambda}(x) &= e^{\{-\mu_i \cdot \phi\} \{(\lambda - \rho) \cdot (e_{i+1} - e_i)\}} f_{R,\lambda}(e^{\mu_i \phi T_{0,i}} x e^{-\mu_i \phi T_{0,i}}) = \\ &= e^{(\rho - \lambda) \phi} f_{R,\lambda}(e^{\mu_i \phi T_{0,i}} x e^{-\mu_i \phi T_{0,i}}) = \\ &= e^{(\rho - \lambda) \phi} e^{i \operatorname{Tr} x \mu e^{\alpha \phi}}, \end{aligned} \quad (\text{П4.29})$$

где комбинация $\mu e^{\alpha \phi}$ обозначает матрицу с матричными элементами $\delta_{i-1,j} \mu_i e^{\alpha_i \phi}$. Собирая все это вместе, мы находим окончательный результат для функции Уиттекера (6.42)

$$\begin{aligned} \Psi(\phi) &= e^{-\lambda \phi} \int_{X=B \setminus G} \prod_{i < j} dx_{ij} \prod_{i=1}^{p-1} \Delta_i^{-(\lambda \alpha_i + 1)}(XS^{-1}) \times \\ &\times \exp \left\{ i \mu_i^R x_{i,i+1} e^{\alpha_i \phi} - i \mu_{p-i}^L \frac{\Delta_{i,i+1}(XS^{-1})}{\Delta_i(XS^{-1})} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П4.30})$$

³³⁾Проще всего вывести эту формулу, заметив, что диагональный элемент g_{ii} матрицы g зависит только от матричных элементов, лежащих в левом верхнем углу в подматрице размера $i \times i$. Тогда, используя индукцию по рангу матрицы, мы можем получить формулу (П4.24).

Список литературы

- [1] А. Маршаков. Точные непертурбативные решения квантовой теории и интегрируемые системы. Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: ФИАН, 1997.
- [2] А. Миронов. τ -Функции и матричные модели. Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: ФИАН, 1997.
- [3] А. Б. Замолодчиков. Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 129–132.
- [4] B. A. Kupershmidt, P. Mathieu. Phys. Lett. B. 1989. V. 227. P. 245.
- [5] T. Eguchi, S. K. Yang. Phys. Lett. B. 1989. V. 244. P. 373–378.
- [6] A. B. Zamolodchikov. Adv. Stud. in Pure Math. 1989. V. 19. P. 641–674.
- [7] R. Sasaki, I. Yamanaka. Adv. Stud. in Pure Math. 1988. V. 16. P. 271–296.
- [8] А. Морозов. УФН. 1992. Т. 162. № 8. С. 84.
- [9] В. Книжник. УФН. 1989. Т. 159. № 3. С. 401–453.
- [10] S. Saito. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1798.
- [11] S. Saito. Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1819.
- [12] A. Morozov. Phys. Lett. B. 1987. V. 196. P. 325.
- [13] A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. P. 1003–1037.
- [14] М. Сато, М. Джимбо, Т. Мува. Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983.
- [15] D. Bernard, A. Le Clair. Differential Equations for Sine-Gordon Correlation Functions at the Free Fermion Point. Preprint CLNS 94/1276, SPhT-94-021; hep-th/9402144.
- [16] A. G. Izergin, D. A. Coker, V. E. Korepin. J. Phys.: Math. Gen. A. 1992. V. 25. P. 4315–4334.
- [17] А. Морозов. УФН. 1994. Т. 164. № 1. С. 3–62.
- [18] A. Marshakov. Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. № 22. P. 3831–3882.
- [19] A. Mironov. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 4355–4405.
- [20] N. Seiberg, E. Witten. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19–52.
- [21] N. Seiberg, E. Witten. Nucl. Phys. B. 1994. V. 431. P. 484–550.
- [22] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov. Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466–474.
- [23] A. Mironov. WDVV equations in Seiberg–Witten theory and associative algebras. hep-th/9704205.
- [24] A. Gorsky, S. Gukov, A. Mironov. Multiscale $N = 2$ SUSY field theories, integrable systems and their stringy/brane origin. hep-th/9707120.
- [25] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. УМН. 1979. Т. 34. С. 13–63.
- [26] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178–206.
- [27] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [28] Р. Бэжстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [29] L. D. Faddeev. Integrable models in 1 + 1-dimensional quantum field theory. In: Les Houches lectures 1982. Amsterdam: Elsevier, 1984. P. 563–608.
- [30] E. Sklyanin. Quantum inverse scattering method. Selected topics. In: Quantum group and quantum integrable systems (Nankai lectures in mathematical physics). Ed. Mo-Lin Ge. Singapore: World Scientific, 1992. P. 63–97.
- [31] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov. Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2015–2052.
- [32] K. Wilson. Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
- [33] G. Weight. On Operator Constructions in Bosonic Liouville Quantum Gravity. In: Proceedings of the 28th International Symposium Ahrenshoop. Wendisch-Rietz, Germany, September 1993. Hamburg: DASY, 1994.
- [34] А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Л. Винэ. ТМФ. 1994. Т. 100. № 1. С. 119–131.
- [35] A. Gerasimov, S. Khoroshkin, D. Lebedev, A. Mironov, A. Morozov. Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2589–2614.
- [36] A. Mironov. CRM Proc. Lect. Notes. 1996. V. 9. P. 219–237.

- [37] *S. Kharchev, A. Mironov, A. Morozov.* τ -Functions: Evolution and Determinant Representations. In: Proceedings of the XXVIII International Symposium Arenshoop, 1995. Hamburg: DASY, 1995. P. 80–89.
- [38] *С. М. Харчев, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 1. С. 129–143.
- [39] *A. Gerasimov, S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, M. Olshanetsky.* Liouville type models in group theory framework. I. Finite-dimensional algebras. Preprint FIAN/TD-18/95, ITEP M4/TH-7/95; hep-th/9601161.
- [40] *A. Mironov.* Group theory structures underlying integrable systems. Preprint FIAN/TD-12/96, ITEP/TH-24/96; hep-th/9607123; Proc. 2nd International A.D. Sakharov Conference. Singapore: Science, 1997.
- [41] *M. Olshanetsky, A. Perelomov.* Invent. Math. 1979. V. 54. P. 261–269.
- [42] *B. Kostant.* Adv. Math. 1979. V. 34. P. 195–338.
- [43] *М. А. Олшанецкий, А. М. Переломов.* ТМФ. 1980. Т. 45. № 1. С. 3–18.
- [44] *Н. Харп.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
- [45] *H. P. B. Jacquet.* Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. P. 243–309.
- [46] *G. Schiffmann.* Bull. Soc. Math. France. 1971. V. 99. P. 3–72.
- [47] *B. Kostant.* Invent. Math. 1978. V. 48. P. 101–184.
- [48] *M. Hashizume.* Hiroshima Math. J. 1982. V. 12. P. 259–293.
- [49] *С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич.* Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. С. 252–255.
- [50] *С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич.* Изв. АН СССР, сер. матем. 1966. Т. 30. С. 1147–1156.
- [51] *М. С. Семенов-Тянь-Шанский.* Квантование открытых цепочек Тоды. В сб.: Современные проблемы математики. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 194–226.
- [52] *A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili.* Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 2495–2589.
- [53] *A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov.* Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory. hep-th/9506136.
- [54] *H. Dorn, H.-J. Otto.* Phys. Lett. B. 1992. V. 291. P. 39–43.
- [55] *H. Dorn, H.-J. Otto.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 429. P. 375–388.
- [56] *M. Kashiwara, T. Miwa.* Proc. Japan Acad. A. 1981. V. 57. P. 342–347.
- [57] *E. Date, M. Kashiwara, T. Miwa.* Proc. Japan Acad. A. 1981. V. 57. P. 387–392.
- [58] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3806–3812.
- [59] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Physica. D. 1982. V. 4. P. 343–365.
- [60] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 1983. V. 18. P. 1111–1119.
- [61] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3813–3818.
- [62] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Transformation groups for soliton equations. In: Proc. RIMS symp. Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory. Eds M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39.
- [63] *M. Jimbo, T. Miwa.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.
- [64] *K. Ueno, K. Takasaki.* Adv. Studies in Pure Math. 1984. V. 4. P. 1–95.
- [65] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 397. P. 339–378.
- [66] *M. Sato.* RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30–40.
- [67] *И. М. Кривевер.* Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. С. 15–31.
- [68] *И. М. Кривевер.* УМН. 1977. Т. 32. С. 183–208.
- [69] *G. Segal, G. Wilson.* Publ. I.H.E.S. 1985. V. 61. P. 5–65.
- [70] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [71] *V. Kač, A. S. Schwarz.* Phys. Lett. B. 1991. V. 257. P. 329.
- [72] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 380. P. 181–240.
- [73] *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, A. Zabrodin.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 366. P. 569–601.
- [74] *P. J. Hansen, D. J. Kaup.* J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 4126.
- [75] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313–400.

- [76] *M. Olshanetsky, A. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [77] *O. I. Bogoyavlensky.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 201–209.
- [78] *R. Hirota.* J. of Phys. Soc. Japan. 1987. V. 57. P. 4285–4288.
- [79] *R. Hirota, Y. Ohta, J. Satsuma.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 94. P. 59–72.
- [80] *A. Leznov, M. Saveliev.* Physica. D. 1981. V. 3. P. 62–72.
- [81] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Методы теории групп интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [82] *O. Babelon.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 139. P. 619–643.
- [83] *O. Babelon.* Phys. Lett. B. 1988. V. 215. P. 523.
- [84] *J.-L. Gervais.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 391. P. 287–332.
- [85] *J.-L. Gervais, J. Schnüttger.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 431. P. 273–314.
- [86] *Й. Шнумпер.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 1. С. 158–191.
- [87] *I. Frenkel, N. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 1.
- [88] *M. Jimbo, T. Miwa.* Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. Preprint RIMS-981, May 1994. Kyoto: Kyoto Univ., 1994.
- [89] *C. Chari, A. Pressley.* A guide to quantum groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [90] *C. Fronsdal, A. Galindo.* The Universal T -Matrix. Preprint UCLA/93/TEP/2, January 1993.
- [91] *A. Morozov, L. Vinet.* Free-field representation of group element for simple quantum groups. Preprint ITEP-M3/94, CRM-2202; hep-th/9409093.
- [92] *Д. П. Желобенко.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
- [93] *Л. Л. Ваксман, Я. С. Соибельман.* Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 23. С. 1–14.
- [94] *S. Levendorskii, Y. Soibelman.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 139. P. 141–170.
- [95] *Y. Soibelman.* Int. Math. Research Notices. 1993. № 6. P. 151–163.
- [96] *K. Kajiwara, J. Satsuma.* J. Phys. Soc. Jpn. 1991. V. 60. P. 3986–3989.
- [97] *K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma.* q -Discrete Toda molecule equation. solv-int/9304001.
- [98] *M. Rosso.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 581–593.
- [99] *А. М. Переломов.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [100] *Л. Д. Фаддеев, Л. А. Татадзеян.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [101] *M. Olshanetsky, V. Rogov.* J. Phys.: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 4669–4683.
- [102] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966.
- [103] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
- [104] *Harish-Chandra.* Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 241–310, 553–613.
- [105] *Д. Мамфорд.* Лекции о θ -функциях. М.: Мир, 1988.
- [106] *H. Awata, M. Noumi, S. Odake.* Heisenberg realization for $U_q(SL(n))$ on the flag manifold. Preprint YITP/K-1016, May 1993; hep-th/9306010.
- [107] *P. Griffiths, F. Adams.* Topics in algebraic geometry and analytic geometry. In: Mathematical Notes. V. 13. Princeton: Princeton University Press, 1974.
- [108] *В. Г. Дринфельд.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 19–49.
- [109] *M. Jimbo.* Lett. Math. Phys. 1985. V. 10. P. 63–69.
- [110] *N. Wallach.* Harmonic Analysis in Homogeneous Spaces. New York: Dekker, 1973.
- [111] *С. Хелгасон.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 13.X.1997 г.