Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Бычков, Е. А. Иванов, $\mathcal{N} = 4$ супермодели Ландау,
ТМФ, 2013, том 174, номер 1, 46–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:10:06

© 2013 г.

В. С. Бычков*, Е. А. Иванов*

$\mathcal{N} = 4$ СУПЕРМОДЕЛИ ЛАНДАУ

Дано сжатое описание новой суперрасширенной модели Ландау с $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией мировой линии и внутренней $ISU(2|2)$ -суперсимметрией. Она обладает рядом общих черт с ранее изученной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной моделью Ландау, краткий обзор которой также представлен в настоящей работе.

Ключевые слова: суперсимметрия, гармоническое суперпространство, проблема Ландау.

DOI: 10.4213/tmf8360

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Ландау (МЛ) [1] представляет собой модель заряженной частицы, движущейся в плоскости, ортогональной постоянному однородному магнитному полю. Ее криволинейное обобщение – сферическая МЛ (модель Холдэйна) [2], которая описывает заряженную частицу на $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака.

Суперрасширения этих моделей описывают нерелятивистские частицы, движущиеся на супермногообразиях, четными подпространствами которых является сфера S^2 или ее планарный предел.

Известны следующие суперрасширения S^2 модели Холдэйна:

- 1) проблема Ландау на $(2 + 2)$ -суперсфере $SU(2|1)/U(1|1)$;
- 2) проблема Ландау на $(2 + 4)$ -суперфлаге $SU(2|1)/[U(1) \times U(1)]$.

Они были построены и изучены в работах [3]–[5].

Чтобы лучше понять основные общие особенности супермоделей Ландау (СМЛ), оказалось полезным изучить предел большого радиуса сферы S^2 в криволинейных моделях, упомянутых выше. Соответствующие суперпланарные МЛ были построены в работах [6]–[9].

Наиболее любопытной чертой суперпланарных МЛ является наличие у них скрытой мировой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. В модели, инвариантной относительно некоторой суперсимметрии в пространстве отображения, обнаруживаются $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ суперзаряды, антикоммутатор которых совпадает с гамильтонианом системы. Таким образом, суперпланарные МЛ одновременно принадлежат классу моделей *суперсимметричной квантовой механики* (СКМ). Модели СКМ [10] имеют множество применений в различных областях.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл.
E-mail: bychkov.vladimir@gmail.com, eivanov@theor.jinr.ru

С учетом этого свойства естественный подход к суперпланарным МЛ состоит в следующем. Мировая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия объявляется первичным принципом, а суперпланарная МЛ, равно как и ее наиболее общий $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричный вариант, выводятся из подходящего суперполевого формализма на мировой линии [9], [11].

В настоящей работе будет показано, как этот “обратный” подход может быть применен для построения первого известного примера СМЛ с мировой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией [12]. Эта система обладает $ISU(2|2)$ -суперсимметрией в пространстве отображения, естественным образом обобщающей $ISU(1|1)$ -симметрию $\mathcal{N} = 2$ модели. Полная мировая суперсимметрия даже шире, чем $\mathcal{N} = 4$: это $SU(2|2)$, включающая еще одну $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ суперсимметрию, которая имеет ненулевое замыкание с первой.

Заметим, что сигма-модели на супергруппах в последнее время вызывают повышенный интерес, в частности, в связи с супербранами и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга–Миллса (см., например, работы [13]–[17]), а также АдС/КТП-соответствием (см., например, работы [18]).

2. БОЗОННЫЕ МЛ

Мы начнем с основных сведений о лагранжевом и гамильтоновом описаниях бозонных МЛ.

Лагранжиан и гамильтониан исходной (планарной) МЛ определяются выражениями

$$L_b = |\dot{z}|^2 - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z) = |\dot{z}|^2 + (A_z\dot{z} + A_{\bar{z}}\dot{\bar{z}}),$$

где

$$A_z = -i\kappa\bar{z}, \quad A_{\bar{z}} = i\kappa z, \quad \partial_{\bar{z}}A_z - \partial_zA_{\bar{z}} = -2i\kappa,$$

и

$$H_b = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \kappa,$$

где

$$a = i(\partial_{\bar{z}} + \kappa z), \quad a^\dagger = i(\partial_z - \kappa\bar{z}), \quad [a, a^\dagger] = 2\kappa.$$

Инвариантности, реализованные в пространстве отображения модели, порождаются генераторами “магнитных трансляций” и $2D$ -вращений:

$$P_z = -i(\partial_z + \kappa\bar{z}), \quad P_{\bar{z}} = -i(\partial_{\bar{z}} - \kappa z), \quad F_b = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \\ [P_z, P_{\bar{z}}] = 2\kappa, \quad [H, P_z] = [H, P_{\bar{z}}] = [H, F_b] = 0.$$

Полное пространство квантовых состояний модели включает следующие базисные волновые функции:

1) наинизший уровень Ландау (НУЛ), $H\Psi_{(0)} = \kappa\Psi_{(0)}$:

$$a\Psi_{(0)}(z, \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (\partial_{\bar{z}} + \kappa z)\Psi_{(0)} = 0 \rightarrow \Psi_{(0)} = e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(0)}(z);$$

2) n -й уровень Ландау (УЛ):

$$\Psi_{(n)}(z, \bar{z}) = [i(\partial_z - \kappa\bar{z})]^n e^{-\kappa|z|^2}\psi_{(n)}(z), \quad H\Psi_{(n)} = \kappa(2n + 1)\Psi_{(n)}.$$

Каждый УЛ бесконечно вырожден по некомпактной $(P_z, P_{\bar{z}})$ -симметрии, которая реализована на бесконечномерных неприводимых представлениях с базисом z^m , $m > 0$. Инвариантная норма определяется как

$$\|\Psi_{(n)}\|^2 \sim \int dz d\bar{z} e^{-2\kappa|z|^2} \bar{\psi}_{(n)}(\bar{z}) \psi_{(n)}(z) < \infty$$

для любого монома $\psi_{(n)}(z) \sim z^m$.

Это рассмотрение может быть естественным образом обобщено на случай сферы S^2 . Аналогом планарного лагранжиана L_b является лагранжиан

$$L_b = \frac{1}{(1 + R^{-2}|z|^2)^2} |\dot{z}|^2 + is \frac{1}{1 + R^{-2}|z|^2} (\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z).$$

Второе слагаемое $-(d=1)$ -член ВЗ на факторпространстве $SU(2)/U(1) \sim S^2$, R — радиус сферы S^2 .

Волновые функции для разных УЛ образуют конечномерные неприводимые $SU(2)$ -мультиплеты со спинами $s, s+1, \dots, s+\ell$. Волновая функция, отвечающая НУЛ, определяется ковариантным условием аналитичности на S^2 :

$$\nabla_{\bar{z}} \Psi_{(0)} = 0, \quad \nabla_{\bar{z}} = (1 + R^{-2}|z|^2) \partial_{\bar{z}} + U(1).$$

Волновые функции для высших УЛ удовлетворяют аналогичным условиям аналитичности. Собственные значения гамильтониана для уровней ℓ даются формулой¹⁾

$$E_\ell = \ell(2s + \ell + 1) + 2s, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Каждый УЛ обладает конечным вырождением ввиду того, что волновые функции являются конечномерными неприводимыми мультиплетными $SU(2)$. Подходящим образом определенный предел $R \rightarrow \infty$ воспроизводит планарную МЛ.

3. СУПЕРРАСШИРЕНИЯ

СМЛ суть квантово-механические модели заряженных частиц на однородных супермногообразиях такие, что их бозонные редукции дают либо оригинальную МЛ для заряженной частицы на плоскости, либо ее сферическую версию Холдэйна. Возможны два подхода к построению СМЛ.

3.1. Суперсимметрии мировой линии и пространства отображения.

1. Мировая суперсимметрия:

$$t \Rightarrow (t, \theta, \bar{\theta}), \quad z, \bar{z} \Rightarrow \mathcal{Z}(t, \theta, \bar{\theta}), \quad \bar{\mathcal{Z}}(t, \theta, \bar{\theta}),$$

$z, \bar{z} \Rightarrow (z, \bar{z}, \psi, \bar{\psi}, \dots)$ — мировой супермультиплет. Эта возможность отвечает тому или иному варианту суперсимметричной квантовой механики.

2. Суперсимметрия пространства отображения (простейший случай):

$$\text{групповое многообразие: } (z, \bar{z}) \Rightarrow \text{супермногообразие: } (z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}),$$

$$(P_z, P_{\bar{z}}, F_b, \kappa) \Rightarrow (P_z, P_{\bar{z}}, \Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}, F_b, F_f, \kappa, \dots),$$

$$\Pi_\zeta = \partial_\zeta + \kappa \bar{\zeta}, \quad \Pi_{\bar{\zeta}} = \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa \zeta, \quad F_f = \zeta \partial_\zeta - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}, \quad \{\Pi_\zeta, \Pi_{\bar{\zeta}}\} = 2\kappa.$$

Геометрический смысл такого расширения состоит в том, что двумерная плоскость достраивается до $(2|2)$ -мерной суперплоскости.

¹⁾Для $R = 1$.

3.2. Планарные СМЛ. Планарные СМЛ получаются в пределе бесконечного радиуса из МЛ на суперсфере и суперфлаге [7], [8]. Для этого явно выделяется радиус R сферы S^2 , производится подходящее масштабное преобразование гамильтонианов, и затем R устремляется к бесконечности, $R \rightarrow \infty$. В этом пределе, например, суперсфера $SU(2|1)/U(1|1)$ переходит в $(2|2)$ -мерную суперплоскость.

Лагранжиан и гамильтониан МЛ на суперплоскости определяются выражениями

$$L = L_f + L_b = |\dot{z}|^2 + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + \dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta),$$

$$H = a^\dagger a - \alpha^\dagger \alpha = \partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} - \partial_z \partial_{\bar{z}} + \kappa(\bar{z} \partial_{\bar{z}} + \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} - z \partial_z - \zeta \partial_{\zeta}) + \kappa^2(z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta}).$$

Симметрии в пространстве отображения порождаются генераторами магнитных (супер)трансляций $P_z, P_{\bar{z}}, \Pi_{\zeta}, \Pi_{\bar{\zeta}}$, а также генераторами

$$Q = z \partial_{\zeta} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{z}}, \quad Q^\dagger = \bar{z} \partial_{\bar{\zeta}} + \zeta \partial_z, \quad C = z \partial_z + \zeta \partial_{\zeta} - \bar{z} \partial_{\bar{z}} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}}.$$

Этот набор генераторов соответствует супергруппе $ISU(1|1)$, которая есть контракция супергруппы $SU(2|1)$:

$$\{Q, Q^\dagger\} = C, \quad [Q, P] = i\Pi, \quad \{Q^\dagger, \Pi\} = iP.$$

Естественное $ISU(1|1)$ -инвариантное внутреннее произведение,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\mu \overline{\phi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})} \psi(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}), \quad d\mu = dz d\bar{z} d\zeta d\bar{\zeta},$$

приводит к отрицательным нормам для некоторых компонентных волновых функций²⁾. Тем не менее все нормы могут быть сделаны положительными после введения “метрического” оператора [8]:

$$G = \frac{1}{\kappa} [\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{\zeta} \zeta + \kappa(\zeta \partial_{\zeta} - \bar{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}})], \quad \langle \langle \phi | \psi \rangle \rangle \sim \int d\mu \overline{(G\phi)} \psi.$$

H коммутирует с G , поэтому $H = H^\dagger = H^\ddagger$. Однако для операторов, которые не коммутируют с G , свойства относительно эрмитова сопряжения существенно меняются. Пусть $\mathcal{O}$ есть генератор некоторой симметрии, т. е. $[H, \mathcal{O}] = 0$. Тогда

$$\mathcal{O}^\ddagger \equiv G\mathcal{O}^\dagger G = \mathcal{O}^\dagger + G\mathcal{O}_G^\dagger, \quad \mathcal{O}_G \equiv [G, \mathcal{O}],$$

и $\mathcal{O}_G$ представляет собой новый оператор такой, что $[H, \mathcal{O}_G] = 0$. Следовательно, генераторы симметрий, которые не коммутируют с G , в общем случае порождают дополнительные “скрытые” симметрии.

В нашем случае G коммутирует со всеми $ISU(1|1)$ -генераторами за исключением Q , так что

$$Q^\ddagger \Rightarrow Q^\ddagger = Q^\dagger - \frac{i}{\kappa} S, \quad S = i(\partial_z \partial_{\bar{\zeta}} + \kappa^2 \bar{z} \zeta - \kappa \bar{z} \partial_{\bar{\zeta}} - \kappa \zeta \partial_z),$$

$$[H, S] = [H, S^\ddagger] = 0.$$

²⁾Присутствие таких квантовых состояний в $d = 1$ теориях с кинетическими членами второго порядка для фермионов было ранее отмечено в работе [19].

Операторы S , $S^\dagger$, H образуют $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ супералгебру

$$[H, S] = [H, S^\dagger] = 0, \\ S = a^\dagger \alpha, \quad S^\dagger = a \alpha^\dagger, \quad \{S, S^\dagger\} = 2\kappa H, \quad \{S, S\} = 0 = \{S^\dagger, S^\dagger\}.$$

Основное состояние (отвечающее НУЛ) обращается в нуль при действии S , $S^\dagger$,

$$S\psi^{(0)} = S^\dagger\psi^{(0)} = 0,$$

и поэтому является синглетом $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. Следовательно, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия не нарушена, и волновые функции для всех высших УЛ образуют неприводимые $\mathcal{N} = 2$ мультиплеты.

3.3. Суперполевая формулировка. Наличие скрытой мировой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии в МЛ на $(2|2)$ -суперплоскости указывает на возможность альтернативного подхода, в котором эта $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия с самого начала реализована явно. Это действительно так [9].

В качестве отправной точки в работе [9] выбирается $\mathcal{N} = 2$, $d = 1$ суперпространство в левокиральном базисе: $(\tau \equiv t + i\theta\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})$. Основными объектами служат киральные бозонное и фермионное $\mathcal{N}=2$, $d=1$ суперполя $\Phi = z(\tau) + \theta\chi(\tau)$, $\Psi = \bar{\zeta}(\tau) + \theta h(\tau)$,

$$\bar{D}\Phi = \bar{D}\Psi = 0,$$

причем $\chi(\tau)$ и $h(\tau)$ являются вспомогательными полями.

Суперполевое действие, приводящее к действию модели на суперплоскости, записывается в виде

$$S = -\kappa \int dt d^2\theta \{ \Phi\bar{\Phi} + \Psi\bar{\Psi} + \rho[\Phi D\Psi - \bar{\Phi}\bar{D}\bar{\Psi}] \}, \quad \rho = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}, \quad \kappa \neq 0.$$

На массовой поверхности поля h и χ выражаются как $h = (i/\sqrt{\kappa})\dot{\bar{z}}$, $\chi = (i/\sqrt{\kappa})\dot{\bar{\zeta}}$. Действие, выраженное через физические поля, в точности совпадает с действием МЛ на суперплоскости:

$$S \Rightarrow \int dt [i\kappa(z\dot{\bar{z}} - \bar{z}\dot{z} + \zeta\dot{\bar{\zeta}} - \bar{\zeta}\dot{\zeta}) + (\dot{z}\dot{\bar{z}} + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}})].$$

3.4. От “свободной” $\mathcal{N} = 2$ теории к взаимодействию. Суперполевым подход к планарной СМЛ подсказал идею [11] построения обобщенных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных МЛ путем перехода к наиболее общему $\mathcal{N} = 2$ суперполевому действию, $S \Rightarrow S_{\text{gen}}$.

Такое обобщение действия модели на суперплоскости дается следующим суперполевым действием:

$$S_{\text{gen}} = \int dt d^2\theta \{ K(\Phi, \bar{\Phi}) + V(\Phi, \bar{\Phi})\Psi\bar{\Psi} + \rho(\Phi D\Psi - \bar{\Phi}\bar{D}\bar{\Psi}) \} = \int dt \mathcal{L}.$$

Оно включает два независимых суперполевых потенциала $K(\Phi, \bar{\Phi})$, $V(\Phi, \bar{\Phi})$ и сводится к действию на суперплоскости в частном случае, когда $K \Rightarrow \Phi\bar{\Phi}$, $V \Rightarrow 1$.

Исключение вспомогательных полей в $\Phi = z + \dots$, $\Psi = \psi + \dots$ при простейшем выборе $4\rho^2 = 1$ приводит к следующему лагранжиану для физических полей:

$$\mathcal{L}_{\text{comp}} = V^{-1} \dot{z} \dot{z} + i(\dot{z} K_z - \dot{z} K_{\bar{z}}) + (\psi\text{-члены}).$$

Вводя $Z^A = (z, \psi)$, можно переписать $\mathcal{L}_{\text{comp}}$ как

$$\mathcal{L} = \dot{Z}^A \dot{\bar{Z}}^{\bar{B}} g_{\bar{B}A} + (\dot{Z}^A \mathcal{A}_A + \dot{\bar{Z}}^{\bar{B}} \mathcal{A}_{\bar{B}}),$$

где, например,

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}z} &= V^{-1} \left(1 - \psi \bar{\psi} \frac{V_z V_{\bar{z}}}{K_{z\bar{z}} V} \right), & g_{\bar{z}\psi} &= -\frac{V_{\bar{z}}}{K_{z\bar{z}} V} \bar{\psi}, & \dots, \\ \mathcal{A}_z &= i(K_z + \psi \bar{\psi} V_z), & \mathcal{A}_{\psi} &= iV \bar{\psi}, & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, V задает метрику в пространстве полей, а K ответствен за связи с фоновыми суперкалибровочными полями.

У этой модели в ее квантовом варианте [11] обнаружился ряд интересных свойств. В частности, оказалось, что потенциально опасные состояния с негативной нормой могут быть превращены в состояния с положительной нормой посредством введения соответствующего метрического оператора в гильбертовом пространстве подобно тому, как это делается в суперпланарной МЛ.

4. $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРПОЛЕВОЕ И КОМПОНЕНТНОЕ ДЕЙСТВИЯ

$\mathcal{N} = 4$ обобщение $\mathcal{N} = 2$ действия МЛ на суперплоскости также можно построить на основе подходящего суперполевого формализма. Действие $\mathcal{N} = 4$ модели естественным образом формулируется в бигармоническом суперпространстве (би-ГСП) [20]³⁾

$$\begin{aligned} S_{N=4} &= -\frac{i\kappa}{2} \left(\int \mu^{-2,0} q^{(1,0)A} q^{(1,0)B} C_{AB} - i \int \mu^{0,-2} \psi^{(0,1)A} \psi^{(0,1)B} \epsilon_{AB} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \int \mu^{-2,0} q^{(1,0)A} D^{1,-1} \psi^{(0,1)B} \epsilon_{AB} \right). \end{aligned}$$

Действие включает два бигармонических суперполя $q^{(1,0)A}$, $\psi^{(0,1)B}$, которые заданы на двух различных аналитических подпространствах $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ би-ГСП:

$$\begin{aligned} q^{(1,0)A} &= q^{(1,0)A}(\zeta_+), & \psi^{(0,1)B} &= \psi^{(0,1)B}(\zeta_-), \\ \zeta_+ &= (t_+, \theta^{1,1}, \theta^{1,-1}, u_i^{\pm}, v_a^{\pm}), & \zeta_- &= (t_-, \theta^{1,1}, \theta^{-1,1}, u_i^{\pm 1}, v_a^{\pm 1}), \\ \theta^{mn} &= \theta^{ia} u_i^m v_a^n, & u^{1i} u_i^{-1} &= v^{1a} v_a^{-1} = 1, & u_i^{\pm 1} &\in SU(2)_L, & v_a^{\pm 1} &\in SU(2)_R. \end{aligned}$$

4.1. Компонентное действие. Суперполя $q^{(1,0)A}$, $\psi^{(0,1)B}$ имеют следующие компонентные разложения:

$$q^{(1,0)A} = f^{iA}(t_+) u_i^1 + \psi^{aA}(t_+) v_a^{-1} \theta^{1,1} - \psi^{aA}(t_+) v_a^1 \theta^{1,-1} - 2i \dot{f}^{iA}(t_+) u_i^{-1} \theta^{1,1} \theta^{1,-1},$$

³⁾ Это суперпространство является обобщением стандартного ГСП [21], [22] и его $d = 1$ версии [23].

$$\psi^{0,1A} = \chi^{aA}(t_-)v_a^1 + h^{iA}(t_-)u_i^1\theta^{-1,1} - h^{iA}(t_-)u_i^{-1}\theta^{1,1} - 2i\dot{\chi}^{aA}(t_-)v_a^{-1}\theta^{1,1}\theta^{-1,1}.$$

Поля $f^{iA}(t)$, $\chi^{aA}(t)$ – физические, а $\psi^{aA}(t)$, $h^{iA}(t)$ – вспомогательные. Компонентный лагранжиан вне массовой поверхности записывается как

$$L \sim (2i\dot{f}^{iA}f_i^B - \psi^{aA}\psi_a^B)C_{AB} + (2\dot{\chi}^{aA}\chi_a^B - ih^{iA}h_i^B)\epsilon_{AB} - \frac{2i}{\sqrt{\kappa}}(\dot{f}^{iA}h_i^B + \psi^{aA}\dot{\chi}_a^B)\epsilon_{AB}.$$

После исключения вспомогательных полей $h_{iA} = -(1/\sqrt{\kappa})\dot{f}_{iA}$, $\psi_{aA} = (i/\sqrt{\kappa})C_{AB}\dot{\chi}_a^B$ лагранжиан принимает вид

$$L = \kappa C_{AB}\dot{f}^{iA}f_i^B - i\kappa\dot{\chi}^{aA}\chi_{aA} + \frac{1}{2}(\dot{f}^{iA}\dot{f}_{iA} + iC_{AB}\dot{\chi}^{aA}\dot{\chi}_a^B).$$

Он включает связь лоренцева типа с внешним абелевым калибровочным полем:

$$\mathcal{A}_{iB}\dot{f}^{iB}, \quad \mathcal{A}_{iB} = -\kappa C_{iB}^D f_{iD}.$$

Калибровочное поле оказывается самодуальным:

$$\mathcal{F}_{iA jB} := \partial_{iA}\mathcal{A}_{jB} - \partial_{jB}\mathcal{A}_{iA} = -2\kappa C_{AB}\epsilon_{ij} \Rightarrow \mathcal{F}_{(iA j)B} = 0.$$

Бозонный сектор в точности совпадает с лагранжианом модели, предложенной Эльванг и Польчински [24] для описания квантового $U(1)$ -эффекта Холла на $\mathbb{R}^4$ [4]. Таким образом, $\mathcal{N} = 4$ МЛ представляет собой пример суперсимметричных моделей, связанных с четырехмерным квантовым эффектом Холла.

4.2. Суперсимметрия на мировой линии. Действие инвариантно относительно $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии:

$$\delta f^{iA} = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\epsilon^{ia}C^{AB}\dot{\chi}_{aB}, \quad \delta\chi^{aA} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\epsilon^{ia}\dot{f}_i^A,$$

где ϵ^{ia} – четыре грассмановых параметра преобразований. Соответствующий сохраняющийся нётеровский суперзаряд записывается как

$$S_{ia} = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}}C^{AB}\dot{\chi}_{aA}\dot{f}_{iB}.$$

После квантования он становится квартетным генератором $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии, который антикоммутирует на квантовый гамильтониан.

4.3. Суперсимметрия в пространстве отображения. Кроме стандартной суперсимметрии на мировой линии, действие обладает некоторой внутренней суперсимметрией, которая не затрагивает время и реализуется дифференциальными операторами на $(4|4)$ -супермногообразии полей (f^{iA}, χ^{aB}) .

Набор соответствующих генераторов включает в себя:

1) генераторы “магнитных” супертрансляций

$$\delta f^{iA} = b^{iA}, \quad \delta\chi^{aB} = \nu^{aB} \Rightarrow P_{iA} = -i\partial_{f^{iA}} + \kappa C_{AB}\dot{f}_i^B, \quad \Pi_{aA} = \partial_{\chi^{aA}} + \kappa\chi_{aA}, \\ [P_{iA}, P_{jB}] = 2\kappa\epsilon_{ij}C_{AB}, \quad \{\Pi_{aA}, \Pi_{bB}\} = 2\kappa\epsilon_{ab}\epsilon_{AB};$$

⁴⁾Альтернативные подходы к квантовому эффекту Холла в четырех измерениях можно найти, например, в работах [25], [26].

2) генераторы суперповоротов

$$\begin{aligned}\delta f^{iA} &= \frac{1}{2}\omega^{ia}(C_B^A + i\delta_B^A)\chi_a^B - \frac{1}{2}\bar{\omega}^{ia}(C_B^A - i\delta_B^A)\chi_a^B, \\ \delta\chi^{aA} &= \frac{1}{2}\omega^{ia}(C_B^A - i\delta_B^A)f_i^B + \frac{1}{2}\bar{\omega}^{ia}(C_B^A + i\delta_B^A)f_i^B, \\ Q^{ia} &= \frac{1}{2}(iC_B^A - \delta_B^A)\chi^{aB}\partial_{f_i^A} + \frac{1}{2}(iC_B^A + \delta_B^A)f^{iB}\partial_{\chi_a^A}, \\ \{Q^{ia}, \bar{Q}_{jb}\} &= \delta_b^a T_j^i - \delta_j^i T_b^a + \frac{1}{2}i\delta_j^i \delta_b^a Z, \quad \{Q^{ia}, Q^{jb}\} = 0.\end{aligned}$$

Здесь ω^{ia} – комплексные нечетные параметры, $Z = C_B^A(f^{iB}\partial_{f_i^A} + \chi^{aB}\partial_{\chi_a^A})$ – центральный $U(1)$ -генератор, T_k^i, T_b^a – генераторы двух групп автоморфизмов $SU(2)$, действующих на дублетные индексы i и a .

Пятнадцать генераторов $Q^{ia}, \bar{Q}^{jb}, T_k^i, T_b^a, Z$ образуют супералгебру $su(2|2)$, градуированную версию $su(4)$. Магнитные супертрансляции образуют идеал в полной алгебре суперсимметрий пространства отображения, которая, таким образом, соответствует полупрямому произведению

$$(P_{iA}, \Pi_{aA}) \rtimes SU(2|2) = ISU(2|2).$$

Эта градуированная симметрия является естественным обобщением симметрии $ISU(1|1)$ пространства отображения в $\mathcal{N} = 2$ СМЛ. В обоих случаях соответствующие супералгебры могут быть получены контракцией из полупростых супералгебр $su(3|2)$ и $su(2|1)$.

5. КВАНТОВАНИЕ $\mathcal{N} = 4$ МОДЕЛИ

5.1. Гамильтониан и $\mathcal{N} = 4$ суперзаряды. Квантование удобно проводить на языке комплексных полей:

$$\begin{aligned}z &= f^{11}, & \bar{z} &= f^{22}, & u &= f^{21}, & \bar{u} &= -f^{12}, \\ \zeta &= \chi^{11}, & \bar{\zeta} &= \chi^{22}, & \xi &= \chi^{21}, & \bar{\xi} &= -\chi^{12}, \\ L &= |\dot{z}|^2 + |\dot{u}|^2 - i\kappa(\dot{z}\bar{z} - \dot{\bar{z}}z + i\dot{u}\bar{u} - i\dot{\bar{u}}u) + \dot{\zeta}\dot{\bar{\zeta}} + \dot{\xi}\dot{\bar{\xi}} - i\kappa(\dot{\zeta}\bar{\zeta} + \dot{\bar{\zeta}}\zeta + \dot{\xi}\bar{\xi} + \dot{\bar{\xi}}\xi).\end{aligned}$$

Квантовые гамильтониан и суперзаряды определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}H_q &= a_z^\dagger a_z + a_u^\dagger a_u - \alpha_\zeta^\dagger \alpha_\zeta - \alpha_\xi^\dagger \alpha_\xi, \\ a_z &= i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \kappa z\right), & a_u &= i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \kappa u\right), & \alpha_\zeta &= \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - \kappa \zeta, & \alpha_\xi &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} - \kappa \xi, \\ [a_z, a_z^\dagger] &= [a_u, a_u^\dagger] = 2\kappa, & \{\alpha_\zeta, \alpha_\zeta^\dagger\} &= \{\alpha_\xi, \alpha_\xi^\dagger\} = -2\kappa, \\ S^{11} &:= S_2 = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\alpha_\xi^\dagger a_z - a_u^\dagger \alpha_\zeta), & S^{21} &:= S_1 = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}(\alpha_\xi^\dagger a_u + a_z^\dagger \alpha_\zeta).\end{aligned}$$

Единственные ненулевые антикоммутаторы суперзарядов следующие:

$$\{S_1, S_1^\dagger\} = \{S_2, S_2^\dagger\} = -2H_q$$

(знак изменится после переопределения внутреннего произведения). В ковариантной записи

$$\{S^{ia}, S^{jb}\} = 2\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}H_q.$$

Для суперзарядов и гамильтониана существует представление Сугавары через $ISU(2|2)$ -генераторы:

$$S^{ia} = 2\sqrt{\kappa}(Q^{ia} + \bar{Q}^{ia}) - \frac{i}{\sqrt{\kappa}}P_A^i\Pi^{aA}, \quad H = \frac{1}{2}P^{iA}P_{iA} + \frac{i}{2}C^{AB}\Pi_B^a\Pi_{aA} + 2\kappa iZ.$$

Примечательным фактом является то, что можно определить еще одну $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию

$$\hat{S}^{ia} = 2i\sqrt{\kappa}(Q^{ia} - \bar{Q}^{ia}) + \frac{i}{\sqrt{\kappa}}P_A^i\Pi_B^aC^{AB}, \quad \{\hat{S}^{ia}, \hat{S}^{jb}\} = 2\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}H_q.$$

Замыкание этой второй (скрытой) $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии с первой (явной) образует мировую $SU(2|2)$ -супергруппу

$$\{S^{ia}, \hat{S}^{jb}\} = 8i\kappa(\epsilon^{ab}\hat{T}^{ij} - \epsilon^{ij}\hat{T}^{ab}). \quad (5.1)$$

Генераторы $\hat{T}^{ij}$ и $\hat{T}^{ab}$ соответствуют двум группам автоморфизмов $SU(2)$ и отличаются от рассмотренных ранее генераторов T^{ij} и T^{ab} членами, которые *коммутируют* со всеми $SU(2|2)$ -генераторами. В этой мировой $SU(2|2)$ -супергруппе роль центрального заряда Z играет гамильтониан H_q .

5.2. Волновые функции и вырождение. НУЛ описывается волновой функцией Ψ^0 , удовлетворяющей условиям аналитичности:

$$(\partial_{\bar{z}} + \kappa z)\Psi^0 = (\partial_{\bar{u}} + \kappa u)\Psi^0 = (\partial_{\bar{\zeta}} - \kappa\zeta)\Psi^0 = (\partial_{\bar{\xi}} - \kappa\xi)\Psi^0 = 0 \Leftrightarrow H\Psi^0 = 0. \quad (5.2)$$

Решение этих условий записывается как

$$\Psi^0 = e^{-\kappa K}\psi_0(z, u, \zeta, \xi), \quad K = |z|^2 + |u|^2 + \zeta\bar{\zeta} + \xi\bar{\xi}, \\ \psi_0(z, u, \zeta, \xi) = A^0(z, u) + \zeta B^0(z, u) + \xi C^0(z, u) + \zeta\xi D^0(z, u).$$

Эта волновая функция четырехкратно вырождена, причем набор полей A^0 , B^0 , C^0 , D^0 замкнут относительно действия $ISU(2|2)$. Волновая функция для НУЛ есть синглет $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии:

$$S^{ia}\Psi^0 = 0. \quad (5.3)$$

Высшие УЛ с $N > 0$ описываются волновыми функциями $\Psi^{(N)}$ такими, что

$$H\Psi^{(N)} = 2\kappa N\Psi^{(N)}. \quad (5.4)$$

Вводя $SU(2)$ -ковариантные обозначения $a^i \equiv (a_z, a_u)$, $\alpha^a \equiv (\alpha_\zeta, \alpha_\xi)$, $[a_i^\dagger, a^j] = 2\kappa\delta_i^j$, $\{\alpha_a^\dagger, \alpha^b\} = 2\kappa\delta_a^b$, волновую функцию $\Psi^{(N)}$ можно записать в явном виде:

$$\Psi^{(N)} = a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger e^{-\kappa K} \phi^{(i_1 i_2 \dots i_N)}(z, u, \zeta, \xi) + \\ + \alpha_a^\dagger a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_{N-1}}^\dagger e^{-\kappa K} \psi^{a(i_1 i_2 \dots i_{N-1})}(z, u, \zeta, \xi) + \\ + (\alpha^\dagger)^2 a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_{N-2}}^\dagger e^{-\kappa K} \phi^{(i_1 i_2 \dots i_{N-2})}(z, u, \zeta, \xi).$$

Коэффициентные волновые функции образуют неприводимые представления мировой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии. Таким образом, $\mathcal{N} = 4$ супермультиплет на N -м уровне содержит следующий набор $SU(2)$ -спинов:

$$s_1 = \frac{N}{2}, \quad s_2 = \frac{N-1}{2}(\times 2), \quad s_3 = \frac{N-2}{2}. \quad (5.5)$$

Например, уровню $N = 1$ соответствует гипермультиплет $(4+4)$ со спинами $s_1 = 1/2$, $s_2 = 0$:

$$\Psi^{(N=1)} = a_i^\dagger e^{-\kappa K} \phi^i + \alpha_a^\dagger e^{-\kappa K} \psi^a. \quad (5.6)$$

Вырождение N -го уровня определяется формулой

$$4[(2s_1 + 1) + 2(2s_2 + 1) + (2s_3 + 1)] = 16N. \quad (5.7)$$

$\mathcal{N} = 4$ мультиплеты волновых функций неприводимы также относительно второй $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии, определенной в формуле (5.1), и, следовательно, относительно ее замыкания с первой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией, т. е. супергруппы $SU(2|2)$. Можно показать, что на этих $(N|N)$ -мерных мультиплетах реализованы так называемые “атипические” неприводимые $SU(2|2)$ -представления [15]–[17]. Волновая функция для НУЛ является $SU(2|2)$ -синглетом.

5.3. Проблема отрицательных норм. При стандартном определении внутреннего произведения через интеграл Березина,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d\mu \overline{\phi(z, \bar{z}, u, \bar{u}, \zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi})} \psi(z, \bar{z}, u, \bar{u}, \zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi}),$$

$$d\mu = dz d\bar{z} du d\bar{u} d\zeta d\bar{\zeta} d\xi d\bar{\xi},$$

в модели появляются отрицательные нормы. Пусть $\Psi_{(l,m)}$, $l, m = 0, 1$, – волновая функция с одним или двумя фермионными квантами $\alpha_\zeta^\dagger$ и $\alpha_\xi^\dagger$. Тогда

$$\langle \Psi_{(l,m)} | \Psi_{(l,m)} \rangle \sim (-1)^{l+m} (\|D_{(l,m)}\|^2 + 2\kappa \|B_{(l,m)}\|^2 + 2\kappa \|C_{(l,m)}\|^2 + 2\kappa^2 \|A_{(l,m)}\|^2),$$

где

$$\|f\|^2 := \int dz d\bar{z} du d\bar{u} e^{-2\kappa|z|^2 - 2\kappa|u|^2} \overline{f(z, u)} f(z, u) > 0.$$

Состояния $\Psi_{(1,0)}$ и $\Psi_{(0,1)}$ имеют отрицательные нормы.

Чтобы устранить этот дефект, переопределим внутреннее произведение по образцу $\mathcal{N} = 2$ случая:

$$\langle\langle \psi | \phi \rangle\rangle := \langle G\psi | \phi \rangle,$$

$$G(\Psi_{(0,0)}^{(j,k)} + \Psi_{(1,0)}^{(j,k)} + \Psi_{(0,1)}^{(j,k)} + \Psi_{(1,1)}^{(j,k)}) = \Psi_{(0,0)}^{(j,k)} - \Psi_{(1,0)}^{(j,k)} - \Psi_{(0,1)}^{(j,k)} + \Psi_{(1,1)}^{(j,k)},$$

$$G = 1 + \frac{\alpha_\zeta^\dagger \alpha_\zeta}{\kappa} + \frac{\alpha_\xi^\dagger \alpha_\xi}{\kappa} + \frac{\alpha_\zeta^\dagger \alpha_\zeta \alpha_\xi^\dagger \alpha_\xi}{\kappa^2} = (1 - 2n_\zeta)(1 - 2n_\xi), \quad n_{\zeta,\xi} := \frac{\alpha_{\zeta,\xi}^\dagger \alpha_{\zeta,\xi}}{2\kappa}.$$

Метрический оператор G обладает стандартными свойствами

$$[H_q, G] = 0, \quad G^2 = 1.$$

Правила эрмитова сопряжения для операторов, которые не коммутируют с G , изменяются:

$$\langle\langle\psi|Q\phi\rangle\rangle = \langle G\psi|Q\phi\rangle = \langle Q^\dagger G\psi|\phi\rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle\langle\psi|Q\phi\rangle\rangle = \langle\langle Q^\dagger\psi|\phi\rangle\rangle = \langle GQ^\dagger\psi|\phi\rangle.$$

Таким образом,

$$Q^\dagger = G^{-1}Q^\dagger G = GQ^\dagger G = Q^\dagger + G[Q^\dagger, G].$$

Операторы рождения и уничтожения не коммутируют с G , поэтому

$$\alpha_\zeta^\dagger = -\alpha_\zeta^\dagger, \quad \alpha_\xi^\dagger = -\alpha_\xi^\dagger$$

и H_q принимает явно положительно-определенный вид:

$$H_q = a_z^\dagger a_z + a_u^\dagger a_u + \alpha_\zeta^\dagger \alpha_\zeta + \alpha_\xi^\dagger \alpha_\xi.$$

6. ОБОБЩЕНИЕ

Наиболее общее $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное действие суперполей $q^{(1,0)A}$ и $\psi^{(0,1)A}$ имеет вид

$$S_{\text{gen}} = \frac{\kappa}{2i} \left(\int \mu^{-2,0} L^{2,0}(q^{(1,0)A}, u, v) - i \int \mu^{0,-2} \psi^{(0,1)A} \psi^{(0,1)B} \epsilon_{AB} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \int \mu^{-2,0} q^{(1,0)A} D^{1,-1} \psi^{(0,1)B} \epsilon_{AB} \right),$$

где $L^{2,0}$ – произвольная функция своих аргументов. После перехода к компонентам и исключения вспомогательных полей получаем

$$L_{\text{gen}} = \dot{f}^{iA} \mathcal{A}_{iA} - i\kappa \dot{\chi}^{aA} \chi_{aA} + \frac{1}{2} \dot{f}^{iA} \dot{f}_{iA} + i \frac{\kappa}{2} (G^{-1})_{AB} \dot{\chi}^{aA} \dot{\chi}_a^B.$$

Здесь

$$\mathcal{A}_{iA}(f) = -\kappa \int du dv u_i^{-1} \frac{\partial L^{2,0}}{\partial f^{(1,0)A}}, \quad G_{AB}(f) = \frac{\kappa}{2} \int du dv \frac{\partial^2 L^{2,0}}{\partial f^{(1,0)A} \partial f^{(1,0)B}}.$$

Внешнее калибровочное поле $\mathcal{A}_{iA}(f)$ по построению самодуально на $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{F}_{iBjA} := \partial_{iB} \mathcal{A}_{jA} - \partial_{jA} \mathcal{A}_{iB} = -2G_{AB} \epsilon_{ij}.$$

В бозонном секторе получаем обобщение $\mathbb{R}^4$ -модели Эльванг и Польчински с произвольным самодуальным внешним $U(1)$ -калибровочным полем. Все другие члены в лагранжиане могут быть приведены к тому же виду, как и в первоначальной $\mathcal{N} = 4$ МЛ.

Как получить нетривиальную метрику в пространстве полей, подобную той, которая возникает в общей $\mathcal{N} = 2$ МЛ? Это пока открытая проблема. Возможно, для ее решения надо в качестве исходных $\mathcal{N} = 4$ мультиплетов выбрать нелинейные версии [27] мультиплетов, использованных при построении рассмотренных моделей.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В настоящей работе рассмотрен первый пример $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной МЛ. Она представляет собой минимальное расширение ранее исследованной планарной $\mathcal{N} = 2$ СМЛ, содержит $(4 + 4)$ физических поля и в бозонном пределе воспроизводит $\mathbb{R}^4$ -модель Эльванг и Польчински [24]. Помимо мировой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (и ее $SU(2|2)$ -расширения) инвариантностью модели является суперсимметрия $ISU(2|2)$, действующая в пространстве полей. Волновая функция для НУЛ есть синглет $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии, в то время как волновые функции для высших УЛ образуют неприводимые $\mathcal{N} = 4$ мультиплеты (которые могут быть идентифицированы с “атипическими” $SU(2|2)$ -мультиплетами). Волновая функция для НУЛ имеет четырехкратное вырождение, а волновая функция для N -го УЛ – $16N$ -кратное вырождение. Чтобы обеспечить положительную определенность всех норм, необходимо ввести метрический оператор на пространстве квантовых состояний.

Представлена также наиболее общая форма действия, совместимая с мировой $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией. $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрия ограничивает метрику на супермногообразии полей ее плоским значением и требует, чтобы внешнее калибровочное поле на $\mathbb{R}^4$ было самодуальным.

В заключение перечислим некоторые возможные физические приложения и нерешенные проблемы.

- Суперсимметричные варианты квантового эффекта Холла на $\mathbb{R}^4$. Связь с интегрируемыми структурами в $\mathcal{N} = 4$, $d = 4$ теории Янга–Миллса и теории струн [15]–[17]. Обобщения на $d = 1$ суперсимметрии с более высокими $\mathcal{N}$ (например, следуя работе [28]).
- Криволинейные аналоги $\mathcal{N} = 4$ МЛ, основанные, например, на супермногообразии $SU(3|2)/U(2|2) \sim \mathbb{C}^{(2|2)}$. Наша модель должна воспроизводиться в пределе контракции $R \rightarrow \infty$. В качестве бозонного сектора должна возникать одна из $SU(3)/U(2)$ -моделей из работы [26].
- Было бы интересно использовать другие мультиплеты $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии для построения альтернативных $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных МЛ, например мультиплеты $(\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1})$ и $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$.
- Обобщение на неабелевы внешние калибровочные поля (см., например, работу [29]).

Благодарности. Е. А. Иванов благодарен организаторам Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы (CQIS – 2012)” за предложение сделать доклад, результаты которого легли в основу настоящей статьи. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 09-01-93107, 11-02-90445 и 12-02-00517).

Список литературы

- [1] L. Landau, *Z. Phys.*, **64**:9–10 (1930), 629–637.
- [2] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **51**:7 (1983), 605–608.
- [3] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, *Fuzzy $CP^{(n|m)}$ as a quantum superspace*, arXiv: [hep-th/0311159](https://arxiv.org/abs/hep-th/0311159).
- [4] E. Ivanov, L. Mezincescu, P. K. Townsend, “A super-flag Landau model”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan memorial collection, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Scientific, Singapore, 2005, 2123–2146, arXiv: [hep-th/0404108](https://arxiv.org/abs/hep-th/0404108).

- [5] A. Beylin, T. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, P.K. Townsend, *JHEP*, **10** (2008), 069, 46 pp., arXiv:0806.4716.
- [6] K. Hasebe, *Phys. Rev. D*, **72**:10 (2005), 105017, 9 pp., arXiv:hep-th/0503162.
- [7] E. Ivanov, L. Mezincescu, P.K. Townsend, *JHEP*, **01** (2006), 143, 23 pp., arXiv:hep-th/0510019.
- [8] T. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, P.K. Townsend, *JHEP*, **04** (2007), 020, 25 pp., arXiv:hep-th/0612300.
- [9] Е. А. Иванов, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 409–423, arXiv:0705.2249.
- [10] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **188**:3 (1981), 513–554.
- [11] A. Beylin, T. Curtright, E. Ivanov, L. Mezincescu, *JHEP*, **04** (2010), 091, 27 pp., arXiv:1003.0218.
- [12] V. Bychkov, E. Ivanov, *Nucl. Phys. B*, **863**:1 (2012), 33–64, arXiv:1202.4984.
- [13] R.R. Metsaev, A.A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **533**:1–3 (1998), 109–126; arXiv:hep-th/9805028.
- [14] T. J. Hollowood, J.L. Miramontes, *JHEP*, **1105** (2011), 136, 34 pp., arXiv:1104.2429.
- [15] N. Beisert, *J. Stat. Mech.*, **01** (2007), P01017, 63 pp., arXiv:nlin/0610017.
- [16] N. Beisert, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **12**:5 (2008), 945–979, arXiv:hep-th/0511082.
- [17] G. Arutyunov, S. Frolov, *Nucl. Phys. B*, **804**:1–2 (2008), 90–143, arXiv:0803.4323.
- [18] B. Stefański, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **718**:1–2 (2005), 83–112, arXiv:hep-th/0503185.
- [19] Д. В. Волков, А. И. Пашнев, *ТМФ*, **44**:3 (1980), 321–326.
- [20] E. Ivanov, J. Niederle, *Phys. Rev. D*, **80**:6 (2009), 065027, 23 pp., arXiv:0905.3770.
- [21] А. Гальперин, Е. Иванов, В. Огиевецкий, Э. Сокачев, *Письма в ЖЭТФ*, **40**:4 (1984), 155–158; A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Class. Quantum Grav.*, **1** (1984), 469–498.
- [22] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [23] E. Ivanov, O. Lechtenfeld, *JHEP*, **09** (2003), 073, 33 pp., arXiv:hep-th/0307111.
- [24] H. Elvang, J. Polchinski, *The quantum hall effect on R^4* , arXiv:hep-th/0209104.
- [25] S.-C. Zhang, J. Hu, *Science*, **294**:5543 (2001), 823–828, arXiv:cond-mat/0110572.
- [26] D. Karabali, V. P. Nair, *Nucl. Phys. B*, **641**:3 (2002), 533–646, arXiv:hep-th/0203264.
- [27] F. Delduc, E. Ivanov, *Nucl. Phys. B*, **855**:3 (2012), 815–853, arXiv:1107.1429.
- [28] S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, *Nucl. Phys. B*, **699**:1–2 (2004), 226–252, arXiv:hep-th/0406015.
- [29] E. A. Ivanov, M. A. Konyushikhin, A. V. Smilga, *JHEP*, **05** (2010), 033, 14 pp., arXiv:0912.3289.