Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хельминк, А. Г. Хельминк, Е. А. Панасенко, Интегрируемые деформации в алгебре псевдодифференциальных операторов с точки зрения алгебраической теории Ли, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 154–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:48:37

© 2013 г. Г. Ф. Хельминк*, А. Г. Хельминк[†], Е. А. Панасенко[‡]

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В АЛГЕБРЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИ

Представлена (двумя различными способами) алгебра псевдодифференциальных операторов в виде прямой суммы двух подалгебр Ли и деформированное множество коммутирующих элементов одной из подалгебр в направлении другой компоненты. Эволюция деформируемых элементов приводит к двум совместным системам уравнений Лакса, которые обе имеют минимальную реализацию. Показано, что такая форма Лакса эквивалентна множеству отношений нулевой кривизны. Приводятся линеаризации указанных систем, которые являются ключевым подходом к построению решений.

Ключевые слова: интегрируемые деформации, псевдодифференциальные операторы, уравнения Лакса, иерархия Кадомцева–Петвиашвили, отношения нулевой кривизны, линеаризации.

DOI: 10.4213/tmf8362

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются алгебраические аспекты двух совместных систем уравнений Лакса для псевдодифференциальных операторов. Обе системы связаны с разложением этой алгебры Ли как векторного пространства в прямую сумму двух подалгебр Ли и деформацией базисного множества коммутирующих элементов одной компоненты разложения в направлении другой компоненты. Одно из представленных разложений приводит к иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП), другое – к строгой иерархии КП. Как показано в работе [1], обе системы появляются естественным образом в двумерной иерархии Тоды. Мы предложим минимальную реализацию обеих систем уравнений Лакса и покажем ниже в теореме 2, что подобная форма Лакса в обоих случаях эквивалентна системе уравнений нулевой кривизны. Последнее указывает на существование системы совместных линейных уравнений.

*Korteweg-de Vries Institute, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
E-mail: g.f.helminck@uva.nl

[†]North Carolina State University, Raleigh, USA. E-mail: loek@math.ncsu.edu

[‡]Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Россия.
E-mail: panlena_t@mail.ru

В заключение будет предложено описание этих линеаризаций, дающих алгебраическую постановку задачи построения решений из бесконечномерных многообразий (см. работы [2], [3]).

Порядок изложения следующий. В разделе 2 представлены аспекты алгебраической теории Ли совместных систем уравнений Лакса в пространстве конечномерных матриц. Затем представляется алгебра псевдодифференциальных операторов, ее наиболее значимые свойства и разложения. Раздел 4 посвящен описанию систем уравнений Лакса в этой алгебре. В разделе 5 показано, что существует реализация обеих систем с минимальным числом соотношений между коэффициентами деформированных операторов. В разделе 6 доказывается, что форма Лакса уравнений эквивалентна форме нулевой кривизны. Линеаризации описаны в заключительной части работы.

2. СОВМЕСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАКСА ДЛЯ МАТРИЦ

Рассмотрим дифференцируемое отображение $t \mapsto g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, действующее во множестве обратимых $(n \times n)$ -матриц. Каждую $(n \times n)$ -матрицу V можно деформировать, сопрягая ее с заданным отображением, что приводит к потоку

$$t \mapsto L(t) := g(t)^{-1} V g(t). \quad (1)$$

Обозначим $M(t) := (dg(t)/dt)g(t)^{-1} = \dot{g}(t)g(t)^{-1}$. Тогда прямые вычисления показывают, что эволюция деформации L матрицы V может быть задана в виде

$$\dot{L} := \frac{dL}{dt} = LM - ML = [L, M]. \quad (2)$$

Уравнение (2) является примером так называемого уравнения Лакса. Многие системы в механике имеют такую форму (см., например, работу [4]), прототипом которой является конечная открытая решетка Тоды (для сравнения см. работу [5]). Их связь с теорией представлений подробно исследована в работе [6].

Следующим шагом является изучение систем совместных уравнений вида (2). Обыкновенные производные в этом случае заменяются на частные производные. Мы вкратце напомним (сначала для $(n \times n)$ -матриц), как с точки зрения алгебраической теории Ли получаются совместные системы уравнений Лакса. Это послужит основой для изучения бесконечномерного случая.

Мы начнем с вещественной или комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $(n \times n)$ -матриц и соответствующей ей матричной группы Ли G . Будем предполагать, прежде всего, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ как векторное пространство представима в виде прямой суммы

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \quad (3)$$

ее подалгебр Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$; соответствующие проекции будем обозначать $\pi_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$. Следующее необходимое условие заключается в том, что каждая из $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2$, есть алгебра Ли подгруппы Ли G_i группы G . Оно не представляет сложности в конечномерной ситуации, но выполнение его в бесконечномерном случае может оказаться проблематичным.

Далее, мы должны предположить, что разложение в прямую сумму имеет свой эквивалент на групповом уровне, а именно отображение $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ является диффеоморфизмом из $G_1 \times G_2$ в G . Это свойство может не иметь места как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае.

Системы уравнений Лакса, которые мы хотим исследовать, связаны с коммутирующими потоками на G_2 . Рассмотрим семейство $\{F_i \mid F_i \in \mathfrak{g}_2, 1 \leq i \leq m\}$ матриц, которые, прежде всего, линейно независимы и, кроме того, коммутируют между собой:

$$[F_{i_1}, F_{i_2}] = 0 \quad (4)$$

для любых i_1 и $i_2 \in \{1, \dots, m\}$. Тогда соответствующие коммутирующие потоки суть

$$\gamma(t) = \gamma(t_1, \dots, t_m) = e^{\sum_{i=1}^m t_i F_i}. \quad (5)$$

Теперь деформируем образующие коммутирующих потоков в $\mathfrak{g}_2$ в направлении G_1 и рассмотрим эволюцию этих деформаций. Для этого возьмем произвольный $g \in G$ и коммутирующие потоки γ , определенные формулой (5). В силу единственности разложения $G = G_1 G_2$ найдутся такие элементы $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$, что

$$\gamma(t)g\gamma(t)^{-1} = g_1(t)^{-1}g_2(t). \quad (6)$$

Далее используем компоненту G_1 , чтобы деформировать направления в $\mathfrak{g}_2$, а именно определим многомерные потоки $\mathcal{F}_i$ в $\mathfrak{g}$ равенствами

$$\mathcal{F}_i := g_1 F_i g_1^{-1}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (7)$$

Такая деформация сохраняет коммутативность:

$$[\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_2}] = 0. \quad (8)$$

Эволюция $\{\mathcal{F}_i\}$ относительно параметров коммутирующих потоков задается уравнениями Лакса. Точнее, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В используемых обозначениях деформации $\{\mathcal{F}_i\}$ исходных коммутирующих направлений удовлетворяют равенствам*

$$\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(\mathcal{F}_{i_2}) = [\mathcal{F}_{i_2}, \pi_1(\mathcal{F}_{i_1})] = [\pi_2(\mathcal{F}_{i_1}), \mathcal{F}_{i_2}]. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что второе из равенств (9) является следствием того факта, что деформации $\{\mathcal{F}_i\}$ коммутируют, а также тождества

$$\pi_1(\mathcal{F}_{i_1}) = \mathcal{F}_{i_1} - \pi_2(\mathcal{F}_{i_1}).$$

Так как все $\{\mathcal{F}_i\}$ получены сопряжением постоянной матрицы матрицей, зависящей от параметров $\{t_i\}$, можно непосредственно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(\mathcal{F}_{i_2}) = \left[\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_1)g_1^{-1}, \mathcal{F}_{i_2} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, достаточно показать, что коммутаторы в правых частях уравнений (10) совпадают с заявленными в теореме. Для этого продифференцируем выражения $g_1\gamma g$ и $g_2\gamma$ по t_{i_1} . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_1)\gamma g + g_1 F_{i_1} \gamma g &= \left(\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_1)g_1^{-1} + \mathcal{F}_{i_1} \right) g_1 \gamma g, \\ \frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_2) + g_2 F_{i_1} \gamma &= \left(\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_2)g_2^{-1} + g_2 F_{i_1} g_2^{-1} \right) g_2 \gamma, \end{aligned}$$

и в силу равенства $g_1\gamma g = g_2\gamma$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_1)g_1^{-1} + \mathcal{F}_{i_1} = \frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_2)g_2^{-1} + g_2 F_{i_1} g_2^{-1}. \quad (11)$$

Поскольку $F_{i_1} \in \mathfrak{g}_2$, то $g_2 F_{i_1} g_2^{-1} \in \mathfrak{g}_2$. Будучи касательным вектором потока в G_2 , перенесенным в начало координат, слагаемое $(\partial g_2 / \partial t_{i_1}) g_2^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{g}_2$, и поэтому вся правая часть равенства (11) лежит в $\mathfrak{g}_2$. Аналогичные рассуждения показывают, что $(\partial g_1 / \partial t_{i_1}) g_1^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{g}_1$, а слагаемое $\mathcal{F}_{i_1}$ в равенстве (11) как G -сопряжение матрицы в $\mathfrak{g}$ принадлежит $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{g}_1$ -компонента в левой части равна нулю. Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_{i_1}}(g_1)g_1^{-1} = -\pi_1(\mathcal{F}_{i_1}),$$

что приводит к уравнениям Лакса (9). Теорема доказана.

Предположим теперь, что вместо вещественных или комплексных $(n \times n)$ -матриц у нас есть бесконечномерная алгебра Ли, состоящая из интегральных и дифференциальных операторов. Совместные системы уравнений Лакса, которые мы рассмотрим для этой алгебры, являются обобщениями формы Лакса уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Напомним, что это уравнение описывает изменение во времени высоты волны $u(x, t)$, распространяемой на поверхности воды в узком канале:

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{2} uu_x. \quad (12)$$

Уравнение КдФ может быть записано как уравнение Лакса для дифференциальных операторов относительно $\partial = \partial/\partial x$ с коэффициентами из кольца R дифференцируемых функций переменных x и t .

Для любых $a \in R$ и $m \in \mathbb{N}$ пусть $a\partial^m$ есть эндоморфизм R , представляющий собой дифференцирование m раз по переменной x , а затем умножение на $a \in R$. Конечные суммы таких операторов называются дифференциальными операторами относительно ∂ с коэффициентами из R . Они образуют алгебру, которую мы будем обозначать $R[\partial]$.

Уравнение КдФ может быть записано теперь как равенство операторов из $R[\partial]$. Чтобы убедиться в этом, сопоставим каждой функции $v \in R$ дифференциальные операторы

$$\mathcal{L}_2 = \partial^2 + v, \quad P_3 = \partial^3 + \frac{3}{2}v\partial + \frac{3}{4}\partial(v). \quad (13)$$

Так как P_3 и $\mathcal{L}_2$ есть эндоморфизмы кольца R , мы можем говорить о коммутаторе $[P_3, \mathcal{L}_2]$. Прямые вычисления показывают, что

$$[P_3, \mathcal{L}_2] = \frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{3}{2}v\partial(v).$$

Другими словами, оператор $[P_3, \mathcal{L}_2]$ является оператором нулевого порядка относительно ∂ . Далее будем рассматривать $t \mapsto \partial^2 + v(x, t)$ как поток операторов Шредингера, а $\partial_t := \partial/\partial t$ — как оператор, действующий покоэффициентно на элементы $R[\partial]$, одним из которых является $\mathcal{L}_2$. Отметим, что утверждение “ v есть решение уравнения КдФ” равносильно следующему уравнению Лакса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_2) = 0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial t} = [P_3, \mathcal{L}_2]. \quad (14)$$

Первым уравнение КдФ в таком виде записал Лакс [7], что объясняет название *форма Лакса* уравнения КдФ для (14). Чтобы понять, как появилось уравнение (14), нужно перейти к соответствующему расширению $R[\partial]$ – алгебре псевдодифференциальных операторов относительно ∂ . Можно доказать, что в этой алгебре существует квадратный корень $L = (\mathcal{L}_2)^{1/2}$ из $\mathcal{L}_2$ вида

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{j+1} \partial^{-j}.$$

Тогда P_3 есть компонента алгебры $R[\partial]$ третьей степени L , и уравнение

$$[P_3, \mathcal{L}_2] = [\mathcal{L}_2, L^3 - P_3]$$

объясняет, почему $[P_3, \mathcal{L}_2]$ является оператором нулевого порядка относительно ∂ . Подобная алгебра псевдодифференциальных операторов является также подходящей средой для изучения совместных систем уравнений Лакса вида (14) и составляет тему следующего раздела.

3. КОЛЬЦО $R[\xi, \xi^{-1}]$ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Целью настоящего раздела является описание расширения множества дифференциальных операторов, которое объясняет форму Лакса таких уравнений, как уравнение КдФ и его обобщения. Чтобы подчеркнуть алгебраический характер наших рассуждений, а также для рассмотрения на равных вещественных и комплексных решений, мы начнем абстрактно, с алгебры R над полем k нулевой характеристики, которая будет служить источником решений интересующих нас нелинейных уравнений. Далее, в качестве замены операторам $\partial/\partial x$ в КдФ-постановке предположим, что на R задана линейная относительно k операция дифференцирования $\partial: R \mapsto R$. В силу k -линейности ∂ поле k лежит в кольце констант

$$R_{\text{const}} = \{r \in R \mid \partial(r) = 0\}$$

внутри R . Приведенные ниже примеры являются прототипами для такой исходной постановки.

ПРИМЕР 1. Пусть R есть кольцо $k[t_i]$ многочленов переменных $\{t_i \mid i \in I\}$ с коэффициентами из k или кольцо формальных степенных рядов $k[[t_i]]$ тех же переменных, и пусть ∂ есть частная производная по одной из переменных, например t_{i_0} . Кольцами констант R_{const} в этих случаях будут $k[t_i, i \neq i_0]$ и $k[[t_i, i \neq i_0]]$ соответственно.

Если R и ∂ заданы, то можно построить дифференциальные операторы относительно ∂ с коэффициентами из R . Они образуют семейство $R[\partial]$ k -линейных эндоморфизмов R вида $\sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $a_i \in R$, т. е. отображений

$$r \rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \partial^i(r),$$

действующих из R в R .

Правило

$$\partial^m \circ r_1 = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \partial^i(r_1) \partial^{m-i}$$

определяет операцию композиции двух таких эндоморфизмов $\sum_i a_i \partial^i$ и $\sum_j b_j \partial^j$. Результатом является

$$\sum_{i,j} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a_i \partial^k(b_j) \partial^{j+i-k}, \quad (15)$$

т. е. снова элемент $R[\partial]$. Может оказаться, что степени ∂ не являются R -линейно независимыми. Чтобы избежать этого, мы введем в рассмотрение алгебру $R[\xi]$, умножение в которой определяется практически так же, как и в $R[\partial]$, но соответствующие отношения в которой разделены. Элементами $R[\xi]$ являются формальные выражения

$$\sum_{i=0}^n a_i \xi^i, \quad a_i \in R, \quad i \geq 0.$$

Их сложение, умножение, а также умножение на скаляры заданы следующим образом:

$$\sum_i a_i \xi^i + \sum_i b_i \xi^i = \sum_i (a_i + b_i) \xi^i, \quad (16)$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \xi^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j \xi^j \right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n, \\ 0 \leq j \leq m}} \sum_{0 \leq k \leq i} \binom{i}{k} a_i \partial^k(b_j) \xi^{i+j-k}, \quad (17)$$

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot \left(\sum_j a_j \xi^j \right) := \sum_j \lambda a_j \xi^j. \quad (18)$$

Можно показать, что такая мультипликативная структура ассоциативна, и поэтому $R[\xi]$ становится k -алгеброй, а также свободным модулем над кольцом R с базисом $\{\xi^i \mid i \geq 0\}$. Отображение

$$a = \sum_{i=0}^n a_i \xi^i \mapsto \phi(a) := \sum_{i=0}^n a_i \partial^i$$

есть сюръективный гомоморфизм ϕ k -алгебр, действующий из $R[\xi]$ на $R[\partial]$. В вырожденном случае, т. е. когда $\partial = 0$, кольцо $R[\xi]$ превращается в коммутативную алгебру

$$R[\lambda] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \mid a_i \in R \right\}$$

многочленов от λ с коэффициентами из R . Можно рассматривать $R[\xi]$ как деформацию коммутативной алгебры $R[\lambda]$. В некоторых работах (см., например, монографию [8]) предлагается работать напрямую с $R[\xi]$ вместо $R[\partial]$. Элементы $R[\xi]$ называют формальными дифференциальными операторами относительно ∂ .

В $R[\xi]$ имеет смысл ввести понятие степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Степень $\deg(a)$ ненулевого элемента $a = \sum_{i=0}^N a_i \xi^i$ из $R[\xi]$ есть число N , если $a_N \neq 0$. Степень нулевого элемента мы полагаем равной $-\infty$.

Элементы ξ^m , $m \geq 1$, в $R[\xi]$ необратимы, поэтому мы построим расширение алгебры $R[\xi]$, которое будет содержать все формальные обратные $\{\xi^{-m} \mid m \geq 1\}$. Рассматривая элементы $R[\xi]$ как “дифференциальные операторы”, мы можем осуществить этот процесс, добавив в алгебру $R[\xi]$ “интегральные операторы”, но проделав это чисто алгебраическим способом, как будет показано ниже. В этой расширенной алгебре для всех m и $n \in \mathbb{Z}$ в первую очередь должно быть выполнено

$$\xi^n \xi^m = \xi^{n+m}.$$

Чтобы выяснить, как должен действовать ξ^{-1} на элемент вида $b\xi^m$, $b \in R$, применим последовательно правило $\xi^{-1}c = c\xi^{-1} - \xi^{-1}\partial(c)\xi^{-1}$, которое приводит к предположению, что $\xi^{-1}(b\xi^m)$ имеет вид бесконечного ряда отрицательных степеней ξ :

$$\xi^{-1}(b\xi^m) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \partial^s(b) \xi^{m-1-s}. \quad (19)$$

Формула (19) определяет также действие других отрицательных степеней ξ^n , $n < 0$, и, обозначив

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}, \quad (20)$$

$n \in \mathbb{Z}$, можно доказать, используя индукцию по $|n|$, что действие ξ^n определяется равенством

$$\xi^n b \xi^m = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} \partial^s(b) \xi^{m+n-s}. \quad (21)$$

Эта формула позволяет ввести мультипликативную структуру в множестве $R[\xi, \xi^{-1}]$ всех формальных степенных рядов

$$p = \sum_{j=-\infty}^N p_j \xi^j, \quad p_j \in R.$$

Произведение двух таких рядов $a = \sum_j a_j \xi^j$ и $b = \sum_i b_i \xi^i$ определим как

$$a \cdot b := \sum_j \sum_i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} a_j \partial^s(b_i) \xi^{i+j-s}, \quad (22)$$

что является очевидным расширением (17). Далее, если определить на $R[\xi, \xi^{-1}]$ сложение и умножение на числа из k формулами (16) и (18) соответственно, то $R[\xi, \xi^{-1}]$ становится k -алгеброй. Эта алгебра, представляющая собой смесь дифференциальных и интегральных операторов, имеет специальное название.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элементы $R[\xi, \xi^{-1}]$ называются *псевдодифференциальными операторами относительно ∂* или просто *псевдодифференциальными операторами*, если не требуется особо отметить операцию дифференцирования, которая лежит в их основе. Для обозначения k -алгебры $R[\xi, \xi^{-1}]$ будем использовать аббревиатуру Psd .

Далее, понятие степени можно распространить и на псевдодифференциал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Степенью* $\deg(a)$ ненулевого элемента a из $R[\xi, \xi^{-1}]$ называется целое n , для которого

$$a = a_n \xi^n + \sum_{j < n} a_j \xi^j, \quad a_n \neq 0.$$

Добавление элементов, обратных к $\{\xi^m \mid m \geq 1\}$, увеличивает количество обратимых элементов в $R[\xi, \xi^{-1}]$, поскольку имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Каждый псевдодифференциальный оператор $P = \sum_{j \leq m} p_j \xi^j$, где $p_m \in R^*$, имеет обратный оператор P^{-1} вида $\sum_{i \leq -m} q_i \xi^i$, где $q_{-m} = p_m^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведение элементов $\sum_{j \leq m} p_j \xi^j$ и $\sum_{i \leq -m} q_i \xi^i$ по определению равно

$$\sum_{j \leq m} p_j \sum_{i \leq -m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) \xi^{j+i-s}.$$

Это произведение есть оператор неположительной степени, и если он равен 1, то старший коэффициент q_{-m} должен быть обратным элементом к p_m , и для всех $k \geq 1$ должно выполняться равенство

$$\sum_{\substack{i, j, s, \\ i+j-s=-k}} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) = p_m q_{-m-k} + \sum_{\substack{i, j, s, \\ i+j-s=-k, \\ i > -m-k}} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) = 0.$$

Так как p_m обратим, отсюда можно найти q_{-m-k} , предположив, что все коэффициенты q_i , $i > -m-k$, известны. Это доказывает существование оператора, обратного к P . Лемма доказана.

Поскольку алгебра $R[\xi, \xi^{-1}]$ имеет широкий спектр обратимых элементов, у нее есть большой потенциал для процедуры одевания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что элемент $P \in R[\xi, \xi^{-1}]$ получается *одеванием* элемента $Q \in R[\xi, \xi^{-1}]$, если существует такой обратимый элемент $K \in R[\xi, \xi^{-1}]$, что $P = KQK^{-1}$. Оператор K в этом случае называется *одевающим оператором*.

В дальнейшем нам предстоит столкнуться с двумя подгруппами обратимых элементов $R[\xi, \xi^{-1}]$, которые заслуживают особого внимания, а именно с группой

$$D(0) = \left\{ p_0 + \sum_{j < 0} p_j \xi^j \mid p_0 \in R^* \right\}$$

и ее нормальной подгруппой $D(0)_1$ элементов вида $1 + \sum_{j < 0} p_j \xi^j$.

Как и любая ассоциативная k -алгебра, $R[\xi, \xi^{-1}]$ является алгеброй Ли над полем k относительно коммутатора. Внутри алгебры Ли $R[\xi, \xi^{-1}]$ можно использовать различные разложения. Любой $P = \sum_j p_j \xi^j \in R[\xi, \xi^{-1}]$ может быть разложен в сумму двух его составляющих – дифференциального оператора $P_{\geq 0}$ и строго интегрального оператора $P_{< 0}$, где

$$P_{\geq 0} = \sum_{j \geq 0} p_j \xi^j, \quad P_{< 0} = \sum_{j < 0} p_j \xi^j. \quad (23)$$

Аналогично оператор P можно представить как сумму его чисто дифференциальной части $P_{>0}$ и интегральной части $P_{\leq 0}$:

$$P_{>0} = \sum_{j>0} p_j \xi^j, \quad P_{\leq 0} = \sum_{j\leq 0} p_j \xi^j. \quad (24)$$

Из правил умножения, заданных в $R[\xi, \xi^{-1}]$, следует, что эти два разложения операторов определяют два способа разложения алгебры Ли $R[\xi, \xi^{-1}]$ в прямую сумму двух подалгебр Ли. Первый способ:

$$\text{Psd} = \{P \in \text{Psd}, P = P_{<0}\} \oplus \{P \in \text{Psd}, P = P_{\geq 0}\} := \text{Psd}_{<0} \oplus \text{Psd}_{\geq 0}; \quad (25)$$

второй способ:

$$\text{Psd} = \{P \in \text{Psd}, P = P_{\leq 0}\} \oplus \{P \in \text{Psd}, P = P_{>0}\} := \text{Psd}_{\leq 0} \oplus \text{Psd}_{>0}. \quad (26)$$

Предположение $\mathfrak{g}_2 = \text{Psd}_{\geq 0}$, как и предположение $\mathfrak{g}_2 = \text{Psd}_{>0}$, не позволяет удачно подобрать группу G_2 . Тем не менее если $\mathfrak{g}_1 = \text{Psd}_{<0}$, то появляется подходящий вариант для группы G_1 . А именно, для каждого элемента $P = \sum_{j<0} p_j \xi^j \in R[\xi, \xi^{-1}]_{<0}$ и любого $m \geq 1$ элемент P^m имеет степень, меньшую либо равную $-m$. Тогда формула

$$e^P = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^m}{m!}$$

определяет корректно заданный элемент из $D(0)_1$. Обратно, аналогичные рассуждения показывают, что для каждого элемента $P = \sum_{j<0} p_j \xi^j \in R[\xi, \xi^{-1}]_{<0}$ формула

$$\ln(1 + P) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{P^m}{m}$$

определяет корректно заданный элемент из $R[\xi, \xi^{-1}]_{<0}$. Очевидно, что он удовлетворяет равенству $1 + P = e^{\ln(1+P)}$. Таким образом, $D(0)_1$ можно рассматривать как группу G_1 , соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}_1 = \text{Psd}_{<0}$.

Для случая $\mathfrak{g}_1 = \text{Psd}_{\leq 0}$ можно рассмотреть, как и выше, экспоненциальное отображение элементов $P = \sum_{j\leq 0} p_j \xi^j \in R[\xi, \xi^{-1}]_{\leq 0}$, что требует, однако, учитывать сходимости, как это видно по члену нулевого порядка. Необходимо, чтобы для каждого $p_0 \in R$ выполнялось $e^{p_0} \in R$. Таким образом, если экспоненциальное отображение дает корректно заданный элемент из $\text{Psd}_{\leq 0}$, то он определяет элемент из $D(0)$. Следовательно, $D(0)$ может рассматриваться как группа, соответствующая $\text{Psd}_{\leq 0}$.

4. УРАВНЕНИЯ ЛАКСА ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящем разделе мы опишем совместные системы уравнений Лакса в $R[\xi, \xi^{-1}]$, которые являются аналогами конечномерных систем, рассмотренных в теореме 1, и основаны на разложениях, представленных в разделе 3. Здесь появятся другие k -линейные операции дифференцирования R , коммутирующие с ∂ , такие, как оператор $\partial/\partial t$ в уравнении (14). Они также действуют естественным образом на элементы Psd . Мы опишем это действие и будем использовать его в дальнейшем без

дополнительных напоминаний. Итак, пусть Δ – еще одно k -линейное дифференцирование R , которое коммутирует с ∂ . Тогда действие Δ можно распространить на $R[\xi, \xi^{-1}]$, полагая для каждого $P = \sum_j p_j \xi^j \in R[\xi, \xi^{-1}]$

$$\Delta(P) = \sum_j \Delta(p_j) \xi^j.$$

Поскольку Δ и ∂ коммутируют, непосредственная проверка показывает, что имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Расширение Δ на $R[\xi, \xi^{-1}]$ есть k -линейное дифференцирование этой алгебры.*

Очевидный выбор коммутирующих элементов в $\text{Psd}_{>0}$ и $\text{Psd}_{\geq 0}$ есть $\{\xi^m \mid m \geq 1\}$ и $\{\xi^m \mid m \geq 0\}$ соответственно. Поскольку деформации, которые мы имеем в виду для этих направлений, состоят в сопряжении с соответствующими элементами группы G_1 , мы можем не учитывать элемент ξ^0 и ограничиться в обоих случаях деформированием $\{\xi^m \mid m \geq 1\}$.

Рассмотрим сначала деформации с группой $D(0)_1$. Сопряжением с элементом $D(0)_1$ дает множество $\{L^m, m \geq 1\}$, где $L = K\xi K^{-1}$, $K \in D(0)_1$, имеет вид

$$L = \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{j+1} \xi^{-j}. \quad (27)$$

При достаточно слабом условии любой L вида (27) может быть получен одеваием оператора ξ элементами из $D(0)_1$.

ЛЕММА 3. *Если ∂ сюръективно, то любой $P = \xi + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i}$ может быть получен одеваием оператора ξ элементом из $D(0)_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство заключается в пошаговом решении уравнения $PK = K\xi$ с $K \in D(0)_1$. Если $K = 1 + \sum_{j>0} k_j \xi^{-j}$, то его правая часть есть $\xi + \sum_{j>0} k_j \xi^{1-j}$, а левая часть равна

$$\begin{aligned} PK = & \left(\xi + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i} \right) \left(1 + \sum_{j>0} k_j \xi^{-j} \right) = \xi + \sum_{i>0} k_i \xi^{1-i} + \\ & + \sum_{i>0} \partial(k_i) \xi^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i} + \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \sum_{l \geq 0} p_{i+1} \binom{-i}{l} \partial^l(k_j) \xi^{-i-j-l}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда следует, что мы должны выбрать K так, чтобы

$$\sum_{j \geq 1} \partial(k_j) \xi^{-j} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i} + \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \sum_{l \geq 0} p_{i+1} \binom{-i}{l} \partial^l(k_j) \xi^{-i-j-l} = 0.$$

Коэффициент при ξ^{-1} в выражении, стоящем в левой части, равен $\partial(k_1) + p_2$, и благодаря условию, наложенному на ∂ , можно найти такой k_1 , что этот коэффициент будет равен нулю. Предположим, что найдены $\{k_1, \dots, k_m\}$, $m \geq 1$, такие, что коэффициенты при всех ξ^{-l} , $l \leq m$, равны нулю. Тогда следующий коэффициент должен иметь вид

$$\partial(k_{m+1}) + p_{m+2} + (\text{многочлен относительно } \partial^l(k_i) \text{ и } p_{j+1}), \quad i \leq m, \quad j \leq m,$$

и можно выбрать k_{m+1} так, что и он будет равен нулю. Таким образом, коэффициенты K могут быть найдены по индукции. Лемма доказана.

Деформации с $D(0)$ носят несколько более общий характер. Сопряженные базисных направлений с элементом из $D(0)$ дает множество $\{M^m, m \geq 1\}$, где оператор $M = D\xi D^{-1}$, $D \in D(0)$, имеет вид

$$M = \xi + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1} \xi^{-j}. \quad (29)$$

Для того чтобы любой M вида (29) можно было получить, одевая ξ элементами из $D(0)$, помимо сюръективности ∂ , необходимы дополнительные условия (ср. с леммой 3).

ЛЕММА 4. Пусть R и ∂ таковы, что ∂ сюръективно и для каждого $r \in R$

$$e^r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i}{i!}$$

есть корректно заданный элемент R^* , удовлетворяющий равенству $\partial(e^r) = \partial(r)e^r$. Тогда каждый элемент

$$P = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i}, \quad p_0 \neq 0,$$

может быть получен одеванием оператора ξ элементом из $D(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша цель – найти оператор D нулевого порядка с обратным старшим коэффициентом такой, что $PD = D\xi$. Рассмотрим $D = k_0 K$, где k_0 обратим, а K есть оператор вида $K = 1 + K_- = 1 + \sum_{i \geq 1} k_i \xi^{-i}$. Если мы аналогичным образом представим оператор $P = \xi + p_1 + P_-$, где $P_- = \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \xi^{-i}$, то согласно лемме 3 для того, чтобы решить уравнение $Pk_0 K = k_0 K \xi$, достаточно найти $k_0 \in R^*$ такой, что $k_0^{-1} P k_0$ не имеет постоянного члена. Прямые вычисления показывают, что ξ^0 в $k_0^{-1} P k_0$ равен $k_0^{-1} \partial(k_0) + p_1$; таким образом, мы должны решить уравнение $\partial(k_0) + p_1 k_0 = 0$. Если l_1 есть первообразная p_1 относительно ∂ , т. е. $\partial(l_1) = p_1$, то в качестве решения этого уравнения можно взять $k_0 = e^{-l_1}$ из R . Лемма доказана.

ПРИМЕР 2. Конкретными примерами k -алгебры R и k -линейного дифференцирования ∂ на R , которые удовлетворяют условиям леммы 3, являются $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $R = k[[t_i, i \geq 1]]$ и $\partial := \partial/\partial t_1$.

Теперь мы можем обратиться к аналогам уравнений Лакса в теореме 1 для обоих разложений. Рассмотрим сначала $\mathfrak{g}_1 = \text{Psd}_{<0}$. Тогда имеем $\pi_1(P) = P_{<0}$. Каждому базисному направлению ξ^i , $i \geq 1$, в $\mathfrak{g}_2$ должен соответствовать инфинитезимальный образующий потока, т. е. k -линейное дифференцирование ∂_i на R , которое коммутирует с ∂ . Нам потребуются деформации $\{L^m, m \geq 1\}$ с L вида (27), которые удовлетворяют уравнениям

$$\partial_i(L^m) = [L^m, \pi_1(L^i)] = [L_{\geq 0}^i, L^m] = [B_i, L^m], \quad i \geq 1, \quad m \geq 1, \quad (30)$$

где B_i есть краткое обозначение для $L_{\geq 0}^i$. Поскольку и ∂_i , и коммутирование с B_i оба являются операциями дифференцирования Psd , достаточно найти L , который при всех $i, i \geq 1$, удовлетворяет соотношениям

$$\partial_i(L) = [B_i, L] = [L, \pi_1(L^i)]. \quad (31)$$

Отметим, что последнее равенство означает, что $[B_i, L]$ есть оператор порядка ≤ -1 как $\partial_i(L)$. Как мы увидим в дальнейшем, из этих уравнений следует, что дифференциальные операторы $\{B_i\}$ в $R[\xi, \xi^{-1}]$ удовлетворяют равенству

$$\partial_{i_1}(B_{i_2}) - \partial_{i_2}(B_{i_1}) - [B_{i_1}, B_{i_2}] = 0.$$

Пусть операции дифференцирования ∂ , ∂_2 и ∂_3 суть

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial t_3}$$

соответственно. Тогда это уравнение при $i_1 = 3$ и $i_2 = 2$ сводится к уравнению

$$3(\ell_2)_{t_2 t_2} = \left(2(\ell_2)_{t_3} - \frac{1}{2}(\ell_2)_{xxx} - 6\ell_2(\ell_2)_x \right)_x \quad (32)$$

для ℓ_2 , которое с точностью до коэффициента масштабирования представляет собой уравнение КП, и это объясняет следующую терминологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть задана k -алгебра R , наделенная преимущественной k -линейной операцией дифференцирования ∂ , и множество $\{\partial_i \mid i \geq 1\}$ k -линейных операций дифференцирования, коммутирующих с ∂ . Уравнения (31) для оператора L из $R[\xi, \xi^{-1}]$ вида (27) называются *уравнениями Лакса иерархии КП*. L будем называть *решением* иерархии, а набор $(R, \partial, \{\partial_i \mid i \geq 1\})$ – *реализацией* этой нелинейной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что любая реализация иерархии КП допускает тривиальное решение $L = \xi$.

Далее, возьмем $\mathfrak{g}_1 = \text{Psd}_{\leq 0}$. Тогда $\pi_1(P) = P_{\leq 0}$. Снова для каждого r , $r \geq 1$, нам нужен инфинитезимальный образующий потока, который соответствует каждому базисному направлению ξ^r . Чтобы отличать данный случай от вышеизложенного, обозначим такое k -линейное дифференцирование, которое коммутирует с ∂ , через ∂_r . Здесь нам нужны деформации $\{M^m, m \geq 1\}$ с M вида (29), удовлетворяющие уравнениям

$$\partial_r(M^m) = [M^m, \pi_1(M^r)] = [M_{>0}^r, M^m] = [C_r, M^m], \quad r \geq 1, \quad m \geq 1, \quad (33)$$

где C_r есть краткое обозначение для $M_{>0}^r$. Поскольку и ∂_r , и коммутирование с C_r являются операциями дифференцирования Psd , достаточно найти M , удовлетворяющий для всех r , $r \geq 1$, соотношениям

$$\partial_r(M) = [C_r, M] = [M, \pi_1(M^r)]. \quad (34)$$

Отметим, что последнее равенство указывает на то, что $[C_r, M]$ есть оператор порядка ≤ 0 как $\partial_r(M)$. Поскольку иерархия КП базируется на разложении, в котором $\pi_2(P)$ является той частью псевдодифференциального оператора P , которая представляет собой полный дифференциальный оператор, а настоящее разложение есть его строгая версия, мы используем следующую терминологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть задана k -алгебра R , наделенная преимущественной k -линейной операцией дифференцирования ∂ , и множество $\{\partial_r \mid r \geq 1\}$ k -линейных операций дифференцирования, коммутирующих с ∂ . Уравнения (34) для оператора M из $R[\xi, \xi^{-1}]$ вида (29) называются *уравнениями Лакса строгой иерархии КП*. M будем называть *решением* иерархии, а набор $(R, \partial, \{\partial_r \mid r \geq 1\})$ – *реализацией* этой нелинейной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что любая реализация строгой иерархии КП также допускает тривиальное решение $M = \xi$.

Как было замечено ранее, каждый $[C_r, M]$ есть оператор порядка ≤ 0 . Аналогично каждый $[B_i, L]$ есть оператор порядка ≤ -1 . Предположим, что $Q \in R[\xi]$ имеет степень $k \geq 1$, не имеет постоянного члена, а степень $[Q, M]$ не превышает нуля. Пусть также P есть элемент $R[\xi]$, коммутатор которого с L имеет порядок ≤ -1 . Тогда имеет смысл рассмотреть k -линейное дифференцирование ∂_Q на R такое, что

$$\partial_Q(M) = [Q, M],$$

и k -линейное дифференцирование ∂_P на R такое, что

$$\partial_P(L) = [P, L].$$

Следующее утверждение показывает, что это не добавит ничего нового к уравнениям, рассматриваемым как в случае иерархии КП, так и в случае строгой иерархии КП.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *пусть $Q \in R[\xi]$ есть элемент степени $k \geq 1$ без постоянного члена такой, что степень коммутатора $[Q, M]$ не превышает нуля; тогда существует единственный набор элементов $c_r \in R$, $\partial(c_r) = 0$, $1 \leq r \leq k$, таких, что $Q = \sum_{r=1}^k c_r C_r$;*

2) *пусть $P \in R[\xi]$ есть элемент степени k такой, что коммутатор $[P, L]$ имеет отрицательную степень; тогда существует единственный набор элементов $p_i \in R$, $0 \leq i \leq k$, $\partial(p_i) = 0$, таких, что $P = \sum_{i=0}^k p_i B_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем индукцию по степени Q . Если степень Q равна 1, то $Q = c_1 \xi$, где степень $[c_1 \xi, M]$ не превышает нуля. Это означает, в частности, что единственный член степени 1, полученный посредством коммутатора $[Q, M]$, а именно $[c_1 \xi, \xi] = -\partial(c_1) \xi$, должен быть равен нулю. Тогда $Q = c_1 C_1$ с $\partial(c_1) = 0$. Пусть теперь $Q = c_{k+1} \xi^{k+1} + R_k$, где R_k имеет степень $\leq k$. Тогда получаем $[c_{k+1} \xi^{k+1}, \xi] = -\partial(c_{k+1}) \xi^{k+1}$, и это единственный член в $[Q, L]$, имеющий степень $k+1$. Следовательно, $\partial(c_{k+1})$ должен быть равен нулю. Оператор $Q - c_{k+1} C_{k+1}$ имеет степень $\leq k$, не содержит постоянного члена и обладает тем же свойством, что и Q ; значит, он имеет вид

$$Q - c_{k+1} C_{k+1} = \sum_{i=1}^k c_i C_i, \quad \partial(c_i) = 0.$$

Таким образом, первое утверждение доказано; второе доказывается аналогично.

Следующий раздел посвящен минимальному способу реализации уравнений Лакса для обеих иерархий.

5. МИНИМАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАКСА

Здесь мы хотим реализовать уравнения (31) и (34) с минимальным количеством соотношений между коэффициентами потенциальных решений M и L соответственно и их производных относительно ∂ . Мы формализуем это следующим образом: в качестве алгебры R в случае строгой иерархии КП мы рассмотрим алгебру

$$\tilde{R} := k[\tilde{m}_{j+1}^{(s)} \mid j \geq 0, s \geq 0]$$

всех многочленов от неизвестных $\{\tilde{m}_{j+1}^{(s)} \mid j \geq 0, s \geq 0\}$ с коэффициентами из k , а в КП-случае – алгебру

$$\tilde{R} := k[\tilde{\ell}_{j+1}^{(s)} \mid j \geq 1, s \geq 0]$$

всех многочленов от неизвестных $\{\tilde{\ell}_{j+1}^{(s)} \mid j \geq 1, s \geq 0\}$ с коэффициентами из k . Напомним, что k -линейное дифференцирование Δ кольца многочленов $k[x_s]$ любого количества переменных определяется однозначно заданием образов $\Delta(x_s)$ всех $\{x_s\}$ в силу свойства дифференцирования

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g)$$

для любых f и $g \in k[x_s]$. Более того, $\Delta(x_s)$ можно выбирать произвольным образом. С учетом этого преимущественное дифференцирование $\tilde{\Delta}$ в первом случае определено как

$$\tilde{\Delta}(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = \tilde{m}_{j+1}^{(s+1)}, \quad j \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Аналогично базисное дифференцирование $\tilde{\partial}$ на $\tilde{R}$ можно определить равенством

$$\tilde{\partial}(\tilde{\ell}_{i+1}^{(s)}) = \tilde{\ell}_{i+1}^{(s+1)}, \quad i \geq 1, \quad s \geq 0.$$

Таким образом, начиная с псевдодифференциальных операторов $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$, определяемых как

$$\tilde{M} := \xi + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{m}_{j+1}^{(0)} \xi^{-j}, \quad \tilde{L} := \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\ell}_{j+1}^{(0)} \xi^{-j}$$

соответственно, можно заметить, что верхний индекс измеряет, сколько раз должны подействовать $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\partial}$ на коэффициенты $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$ соответственно. Очевидно, что здесь нет связей между коэффициентами $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$ и их производными относительно $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\partial}$ соответственно.

Далее, мы хотим определить k -дифференцирования $\{\tilde{\Delta}_r \mid r \geq 1\}$ на $\tilde{R}$, которые коммутируют с $\tilde{\Delta}$. Это последнее свойство приводит к

$$\tilde{\Delta}_r(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = \tilde{\Delta}^s \tilde{\Delta}_r(\tilde{m}_{j+1}^{(0)})$$

и, следовательно, достаточно определить, как действует $\tilde{\Delta}_r$ на коэффициенты $\tilde{m}_{j+1}^{(0)}$ у $\tilde{M}$. Это можно сделать оптимальным способом в терминах отношения, которому должен удовлетворять $\tilde{M}$. В соответствии с предыдущим разделом обозначим оператор $\tilde{M}_{>0}^r$ для каждого $r \geq 1$ через $\tilde{C}_r$. Далее, дифференцирование $\tilde{\Delta}_r$ на $\tilde{R}$ определим следующим равенством внутри $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1}]$:

$$\tilde{\Delta}_r(\tilde{M}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_r(\tilde{m}_{j+1}^{(0)}) \xi^{-j} := [\tilde{C}_r, \tilde{M}] = [\tilde{M}, \tilde{M}_{\leq 0}^r]. \quad (35)$$

Аналогично можно определить множество k -дифференцирований $\{\tilde{\partial}_i \mid i \geq 1\}$ на $\tilde{R}$, коммутирующих с $\tilde{\partial}$, задавая их действие на коэффициенты $\tilde{L}$ в терминах набора отношений для $\tilde{L}$. Как и прежде, для каждого $i \geq 1$ будем использовать обозначение $\tilde{B}_i$ для псевдодифференциального оператора $\tilde{L}_{\geq 0}^i$. Тогда уравнения, которым должен удовлетворять оператор $\tilde{L}$, будут иметь вид

$$\tilde{\partial}_i(\tilde{L}) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\partial}_i(\tilde{\ell}_{j+1}^{(0)}) \xi^{-j} := [\tilde{B}_i, \tilde{L}] = [\tilde{L}, \tilde{L}_{<0}^i]. \quad (36)$$

В обоих случаях уравнения Лакса выполнены по определению. Тем не менее из них можно извлечь некоторые следствия. Первое касается ряда нелинейных уравнений для множеств дифференциальных операторов $\{\tilde{C}_r\}$ и $\{\tilde{B}_i\}$ соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1. Дифференциальные операторы $\{\tilde{C}_r\}$ в $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\partial}_{r_1}(\tilde{C}_{r_2}) - \tilde{\partial}_{r_2}(\tilde{C}_{r_1}) - [\tilde{C}_{r_1}, \tilde{C}_{r_2}] = 0, \quad (37)$$

которые называются отношениями нулевой кривизны решений $\tilde{M}$ строгой иерархии КП.

2. Дифференциальные операторы $\{\tilde{B}_i\}$ в $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\partial}_{i_1}(\tilde{B}_{i_2}) - \tilde{\partial}_{i_2}(\tilde{B}_{i_1}) - [\tilde{B}_{i_1}, \tilde{B}_{i_2}] = 0, \quad (38)$$

которые называются отношениями нулевой кривизны решений $\tilde{L}$ иерархии КП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение будет справедливым, если мы сможем доказать, что левая часть уравнения (37) принадлежит одновременно и $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})_{>0}$, и $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})_{\leq 0}$. Первое очевидно, так как все $\tilde{C}_r$ принадлежат $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})_{>0}$, а $\tilde{\partial}_r$ действуют покоэффициентно. Как было отмечено ранее, из уравнений Лакса для $\tilde{M}$ следуют уравнения Лакса для его степеней

$$\tilde{\partial}_{r_1}(\tilde{M}^{r_2}) = [\tilde{C}_{r_1}, \tilde{M}^{r_2}] = -[\tilde{M}_{<0}^{r_1}, \tilde{M}^{r_2}]. \quad (39)$$

Далее, заменим в левой части уравнения (37)

$$\tilde{C}_{r_k} = \tilde{M}^{r_k} - \tilde{M}_{\leq 0}^{r_k}$$

для $k = 1, 2$ и воспользуемся соотношениями (39). Получим

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{r_1}(\tilde{C}_{r_2}) - \tilde{\partial}_{r_2}(\tilde{C}_{r_1}) - [\tilde{C}_{r_1}, \tilde{C}_{r_2}] &= [\tilde{C}_{r_1}, \tilde{M}^{r_2}] - \tilde{\partial}_{r_1}(\tilde{M}_{\leq 0}^{r_2}) - [\tilde{C}_{r_2}, \tilde{M}^{r_1}] + \\ &+ \tilde{\partial}_{r_2}(\tilde{M}_{\leq 0}^{r_1}) + [\tilde{M}_{\leq 0}^{r_1}, \tilde{M}^{r_2}] - [\tilde{M}^{r_1}, \tilde{M}_{\leq 0}^{r_2}] - [\tilde{M}_{<0}^{r_1}, \tilde{M}_{\leq 0}^{r_2}] = \\ &= \tilde{\partial}_{r_2}(\tilde{M}_{\leq 0}^{r_1}) - \tilde{\partial}_{r_1}(\tilde{M}_{\leq 0}^{r_2}) - [\tilde{M}_{\leq 0}^{r_1}, \tilde{M}_{\leq 0}^{r_2}]; \end{aligned}$$

здесь последнее выражение очевидно принадлежит $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})_{\leq 0}$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать второе утверждение.

Следствием утверждения 2 является свойство, объединяющее потоки, которые принадлежат одной иерархии

СЛЕДСТВИЕ 1. 1. Операции дифференцирования $\{\tilde{\partial}_r\}$ на $\tilde{R}$ коммутируют не только с $\tilde{\partial}$, но и между собой.

2. Операции дифференцирования $\{\tilde{\partial}_i\}$ на $\tilde{R}$ коммутируют не только с $\tilde{\partial}$, но и между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что для любых индексов выполнены равенства

$$\tilde{\partial}_{r_1} \circ \tilde{\partial}_{r_2} = \tilde{\partial}_{r_2} \circ \tilde{\partial}_{r_1}, \quad \tilde{\partial}_{i_1} \circ \tilde{\partial}_{i_2} = \tilde{\partial}_{i_2} \circ \tilde{\partial}_{i_1}.$$

Поскольку $\{\tilde{\partial}_r\}$ и $\{\tilde{\partial}_i\}$ коммутируют с $\tilde{\partial}$ и $\tilde{\partial}$ соответственно, то же самое должно выполняться и для их произведений. Следовательно, если их разности равны нулю

на коэффициентах $\widetilde{M}$ и $\widetilde{L}$ соответственно, то они являются тождественными нулями на всем $\underline{\widetilde{R}}$ и $\widetilde{R}$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\tilde{\partial}_{r_1} \circ \tilde{\partial}_{r_2}(\widetilde{M}) = \tilde{\partial}_{r_2} \circ \tilde{\partial}_{r_1}(\widetilde{M}), \quad \tilde{\partial}_{i_1} \circ \tilde{\partial}_{i_2}(\widetilde{L}) = \tilde{\partial}_{i_2} \circ \tilde{\partial}_{i_1}(\widetilde{L})$$

соответственно. Что касается первого соотношения, мы воспользуемся уравнениями Лакса для $\widetilde{M}$ и тем фактом, что каждый $\tilde{\partial}_{r_k}$ есть дифференцирование $\underline{\widetilde{R}}[\xi, \xi^{-1}]$, для получения уравнения

$$\tilde{\partial}_{r_1} \circ \tilde{\partial}_{r_2} - \tilde{\partial}_{r_2} \circ \tilde{\partial}_{r_1}(\widetilde{M}) = [\tilde{\partial}_{r_1}(\widetilde{C}_{r_2}), \widetilde{M}] + [\widetilde{C}_{r_2}, [\widetilde{C}_{r_1}, \widetilde{M}]] - [\tilde{\partial}_{r_2}(\widetilde{C}_{r_1}), \widetilde{M}] - [\widetilde{C}_{r_1}, [\widetilde{C}_{r_2}, \widetilde{M}]].$$

Поскольку коммутатор удовлетворяет равенству

$$[\widetilde{C}_{r_2}, [\widetilde{C}_{r_1}, \widetilde{M}]] - [\widetilde{C}_{r_1}, [\widetilde{C}_{r_2}, \widetilde{M}]] = [[\widetilde{C}_{r_2}, \widetilde{C}_{r_1}], \widetilde{M}],$$

то согласно первой части утверждения 2 имеем

$$[\tilde{\partial}_{r_1}(\widetilde{C}_{r_2}) - \tilde{\partial}_{r_2}(\widetilde{C}_{r_1}) - [\widetilde{C}_{r_1}, \widetilde{C}_{r_2}], \widetilde{M}] = [0, \widetilde{M}] = 0.$$

Это завершает доказательство для $\widetilde{M}$; доказательство для $\widetilde{L}$ аналогично.

6. ОТНОШЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Цель настоящего раздела – дать алгебраическое описание других реализаций решений обеих иерархий. Отправной точкой в обоих случаях являются операторы $\widetilde{M}$ и $\widetilde{L}$, представленные в разделе 5. Пусть $\underline{R}$ и R – другие k -алгебры, наделенные преимущественными k -линейными операциями дифференцирования $\underline{\partial}$ и ∂ соответственно. Далее рассмотрим предположительные решения

$$M = \xi + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1} \xi^{-j}, \quad L = \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{j+1} \xi^{-j}$$

в $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ и $R[\xi, \xi^{-1}]$ и соответствующие отсечения

$$C_r := M_{>0}^r, \quad r \geq 1, \quad B_i := L_{\geq 0}^i, \quad i \geq 1.$$

Тогда M однозначно определяет морфизм k -алгебр $i_M: \widetilde{R} \rightarrow \underline{R}$ заданием

$$i_M(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = \underline{\partial}^s(m_{j+1}), \quad (40)$$

и этот морфизм k -алгебр по определению удовлетворяет равенству

$$i_M \circ \tilde{\partial} = \underline{\partial} \circ i_M. \quad (41)$$

Аналогично оператор L определяет морфизм k -алгебр $i_L: \widetilde{R} \rightarrow R$ заданием

$$i_L(\tilde{\ell}_{j+1}^{(s)}) = \partial^s(\ell_{j+1}), \quad (42)$$

и этот морфизм k -алгебр по определению удовлетворяет равенству

$$i_L \circ \tilde{\partial} = \partial \circ i_L. \quad (43)$$

Отображения i_M и i_L можно продолжить до морфизмов k -алгебр, действующих из множеств псевдодифференциальных операторов $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ и $\widetilde{R}[\xi, \xi^{-1}]$, рассмотренных в разделе 5, в $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ и $R[\xi, \xi^{-1}]$ соответственно таким образом, что

$$i_M(\widetilde{M}) = M, \quad i_L(\widetilde{L}) = L.$$

Для того чтобы можно было говорить о решениях иерархий, внутри $\underline{R}$ и R должны существовать аналоги семейств $\{\underline{\partial}_r\}$ и $\{\tilde{\partial}_i\}$ соответственно. Это означает, что нужно определить множества k -линейных операций дифференцирования $\{\underline{\partial}_r\}$ и $\{\tilde{\partial}_i\}$ на $\underline{R}$ и R соответственно, которые коммутируют с $\underline{\partial}$ и $\tilde{\partial}$. Предположив, что такие отображения существуют, теперь имеет смысл проверить, удовлетворяют ли M и L уравнениям Лакса относительно этих наборов операций дифференцирования. Итак, если M есть решение уравнений Лакса для строгой иерархии КП, то для всех $r \geq 1$ мы имеем

$$\underline{\partial}_r(M) = \underline{\partial}_r \circ i_M(\tilde{M}) = [C_r, M] = [i_M(\tilde{C}_r), i_M(\tilde{M})] = i_M([\tilde{C}_r, \tilde{M}]) = i_M \circ \tilde{\partial}_r(\tilde{M}).$$

Таким образом, k -линейные отображения $\underline{\partial}_r \circ i_M$ и $i_M \circ \tilde{\partial}_r$ совпадают на коэффициентах $\tilde{M}$, а в силу соотношения (41) и того факта, что $\{\underline{\partial}_r\}$ коммутируют с $\underline{\partial}$, мы получаем на $\underline{R}[\xi, \xi^{-1})$ совместимости

$$\underline{\partial}_r \circ i_M = i_M \circ \tilde{\partial}_r, \quad r \geq 1. \quad (44)$$

С другой стороны, если совместимости (44) имеют место, то эти тождества можно применить к $\tilde{M}$, и поскольку i_M есть морфизм k -алгебр, получить уравнения Лакса для M . Таким образом, соотношения (44) равносильны тому факту, что M является решением строгой иерархии КП относительно $\{\underline{\partial}_r\}$.

Существует схожая формулировка и того утверждения, что L является решением иерархии КП. Действительно, если L есть решение уравнений Лакса иерархии КП, то для любого $i \geq 1$ имеет место соотношение

$$\partial_i(L) = \partial_i \circ i_L(\tilde{L}) = [B_i, L] = [i_L(\tilde{B}_i), i_L(\tilde{L})] = i_L([\tilde{B}_i, \tilde{L}]) = i_L \circ \tilde{\partial}_i(\tilde{L}).$$

Тогда k -линейные отображения $\partial_i \circ i_L$ и $i_L \circ \tilde{\partial}_i$ равны на коэффициентах $\tilde{L}$, и, используя рассуждения, аналогичные случаю M , получаем соотношения

$$\partial_i \circ i_L = i_L \circ \tilde{\partial}_i, \quad i \geq 1, \quad (45)$$

на $\tilde{R}[\xi, \xi^{-1})$. Обратно, если выполнены соотношения (45), то, применяя эти тождества к $\tilde{L}$ и учитывая, что i_L есть морфизм k -алгебр, получаем уравнения Лакса для L . Таким образом, соотношения (45) эквивалентны тому, что L суть решения иерархии КП относительно $\{\tilde{\partial}_i\}$.

Далее мы рассмотрим аналоги отношений нулевой кривизны (37) и (38) для отсечений $\{C_r\}$ и $\{B_i\}$ M и L соответственно. Если мы совместим тождества (44) и (45) с результатом утверждения 2, то увидим, прежде всего, что строгие дифференциальные операторы $\{C_r\}$ в $\underline{R}[\xi, \xi^{-1})$, отвечающие решению M строгой иерархии КП, удовлетворяют уравнениям

$$\underline{\partial}_{r_1}(C_{r_2}) - \underline{\partial}_{r_2}(C_{r_1}) - [C_{r_1}, C_{r_2}] = 0. \quad (46)$$

Используя ту же терминологию, что и для минимальной реализации, будем называть уравнения (46) *отношениями нулевой кривизны* для строгих отсечений $\{C_r\}$ решения M строгой иерархии КП. Во-вторых, для решения L иерархии КП получаем, что дифференциальные операторы $\{B_i\}$ в $R[\xi, \xi^{-1})$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{i_1}(B_{i_2}) - \partial_{i_2}(B_{i_1}) - [B_{i_1}, B_{i_2}] = 0. \quad (47)$$

Здесь мы используем ту же терминологию, что и в минимальном случае, и назовем уравнения (47) *отношениями нулевой кривизны* дифференциальных операторов $\{B_i\}$, отвечающих решению L иерархии КП.

Отношения нулевой кривизны в обоих случаях являются также достаточными для того, чтобы получить уравнения Лакса для M и L , а именно имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\underline{R}$ и R суть k -алгебры с преимущественными k -линейными операциями дифференцирования $\underline{\partial}$ и ∂ соответственно, и пусть M и L суть элементы $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ и $R[\xi, \xi^{-1}]$ вида (29) и (27) соответственно.

1. Предположим, что в $\underline{R}$ существует множество k -линейных дифференцирований $\{\underline{\partial}_r, r \geq 1\}$, которые коммутируют с $\underline{\partial}$. Тогда M удовлетворяет уравнениям Лакса строгой иерархии КП тогда и только тогда, когда для $\{C_r, r \geq 1\}$ выполнены отношения нулевой кривизны (46).

2. Предположим, что в R существует множество k -линейных дифференцирований $\{\partial_i, i \geq 1\}$, которые коммутируют с ∂ . Тогда L удовлетворяет уравнениям Лакса иерархии КП относительно $\{\partial_i\}$ тогда и только тогда, когда для $\{B_i, i \geq 1\}$ выполнены отношения нулевой кривизны (47).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях нужно показать лишь достаточность. Мы приведем доказательство только первого утверждения, так как для второго оно абсолютно аналогично. Рассмотрим оператор M , для которого при всех r_1 и r_2 выполнено

$$\underline{\partial}_{r_1}(C_{r_2}) - \underline{\partial}_{r_2}(C_{r_1}) - [C_{r_1}, C_{r_2}] = 0.$$

Если при всех $r_2 \geq 1$ мы запишем для простоты $M^{r_2} = C_{r_2} + D_{r_2}$, то это соотношение приведет к

$$\begin{aligned} \underline{\partial}_{r_1}(M^{r_2}) - [C_{r_1}, M^{r_2}] &= \underline{\partial}_{r_1}(C_{r_2} + D_{r_2}) - [C_{r_1}, C_{r_2}] - [C_{r_1}, D_{r_2}] = \\ &= \underline{\partial}_{r_2}(C_{r_1}) + \underline{\partial}_{r_1}(D_{r_2}) - [C_{r_1}, D_{r_2}]. \end{aligned}$$

Поскольку D_{r_2} содержит отрицательные степени ξ , последнее выражение содержит степени ξ , не превышающие $r_1 - 2$ для всех $r_2 \geq 1$. Предположим, что для некоторого r_1 уравнения Лакса относительно соответствующего дифференцирования не имеют места для L , т. е.

$$\underline{\partial}_{r_1}(M) - [C_{r_1}, M] = \beta \xi_m + (\text{более низкий порядок } \xi), \quad \beta \neq 0.$$

Поскольку и $\underline{\partial}_{r_1}$, и коммутирование с C_{r_1} суть k -линейные дифференцирования, для всех $r_2 \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \underline{\partial}_{r_1}(M^{r_2}) - [C_{r_1}, M^{r_2}] &= \sum_{r=0}^{r_2-1} M^r (\underline{\partial}_{r_1}(M) - [C_{r_1}, L]) M^{r_2-1-r} = \\ &= r_2 \beta \xi_{m+r_2-1} + (\text{более низкий порядок } \xi). \end{aligned}$$

В частности, степень оператора $\underline{\partial}_{r_1}(M^{r_2}) - [C_{r_1}, M^{r_2}]$ по ξ не ограничена для r_2 , стремящихся к бесконечности. Это противоречит предыдущему выводу о том, что эта степень ограничена $r_1 - 2$. Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, все уравнения Лакса для M должны выполняться. Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отношения нулевой кривизны (46) и (47) указывают на существование линейных систем, из которых формируются условия совместимости. Такие системы, которые будут представлены в следующем разделе, дают ключ к построению решений иерархий.

7. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Нашей отправной точкой являются реализация $(\underline{R}, \underline{\partial}, \{\underline{\partial}_r\})$ строгой иерархии КП и реализация $(R, \partial, \{\partial_i\})$ иерархии КП. Пусть M – потенциальное решение первой иерархии в $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$, а L – потенциальное решение второй иерархии в $R[\xi, \xi^{-1}]$. Цель настоящего раздела – с одной стороны, описать линейную систему в подходящем $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ -модуле, из которой будут следовать уравнения Лакса строгой иерархии КП и, с другой стороны, представить линейную систему в подходящем $R[\xi, \xi^{-1}]$ -модуле, которая приводит к уравнениям Лакса иерархии КП. Для потенциального решения M строгой иерархии КП должны выполняться равенства

$$M\phi = z\phi, \quad \underline{\partial}_r(\phi) = C_r(\phi), \quad r \geq 1. \quad (48)$$

Эта система называется *линеаризацией строгой иерархии КП*. В случае иерархии КП потенциальное решение L должно удовлетворять так называемой *линеаризации иерархии КП*, которая задается уравнениями

$$L\psi = z\psi, \quad \partial_i(\psi) = B_i(\psi), \quad i \geq 1. \quad (49)$$

Прежде чем определить ψ и ϕ , мы покажем, какие манипуляции приводят к уравнениям Лакса для M и L , а затем опишем условия, при которых они будут иметь место.

Применим дифференцирование $\underline{\partial}_r$ к первому из уравнений (48). Используя правило Лейбница для действия $\underline{\partial}_r$ на $M\phi$ и тот факт, что z есть скаляр относительно и $\underline{R}[\xi]$ -действия, и $\underline{\partial}_r$ -действия, заменим второе уравнение и получим

$$\begin{aligned} \underline{\partial}_r(M\phi - z\phi) &= \underline{\partial}_r(M)\phi + M\underline{\partial}_r(\phi) - z\underline{\partial}_r(\phi) = \\ &= \underline{\partial}_r(M)\phi + MC_r\phi - C_r(z\phi) = (\underline{\partial}_r(M) - [C_r, M])\phi = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Если мы можем отбросить функцию ϕ , то M будет удовлетворять уравнениям Лакса строгой иерархии КП.

Аналогично, применяя дифференцирование ∂_i к первому из уравнений (49), приходим к

$$\begin{aligned} \partial_i(L\psi - z\psi) &= \partial_i(L)\psi + L\partial_i(\psi) - z\partial_i(\psi) = \\ &= \partial_i(L)\psi + LB_i\psi - B_i(z\psi) = (\partial_i(L) - [B_i, L])\psi = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, если мы сможем не учитывать функцию ψ в последнем уравнении, то получим уравнения Лакса для L .

Чтобы использовать уравнения (48), нам нужно левостороннее действие таких операторов, как M и все $\{C_r\}$. Поэтому мы построим соответствующий $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ -модуль, и вид его элементов будет определять решение (48) для тривиального решения $M = \xi$. В этом случае $C_r = \xi^r = M^r$ для всех $r \geq 1$, и уравнения (48) превращаются в

$$M\phi = z\phi \quad \text{и} \quad \underline{\partial}_r(\phi) = M^i(\phi) = z^r\phi \quad \text{для всех} \quad r \geq 1.$$

В частности, можно заметить, что приближение первого порядка потока, соответствующего $\underline{\partial}_r$, есть умножение на z^r . Пусть s_r определяет параметр для потока, соответствующего $\underline{\partial}_r$, так что $\underline{\partial}_r$ действует как взятие частной производной $\partial/\partial s_r$. Тогда уравнения линеаризации можно формально проинтегрировать. Итак, рассмотрим формальный ряд

$$\phi_0 = e^{\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r}. \quad (52)$$

С введенной операцией $\underline{\partial}_r$ он удовлетворяет уравнениям линеаризации для тривиального решения строгой иерархии КП. Пространством, для которого можно использовать уравнения (48), является пространство $\mathcal{O}$ так называемых *осциллирующих функций*, которое можно понимать как множество возмущений тривиального решения ϕ_0 . Оно определяется следующим образом:

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) e^{\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r} = \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \phi_0 \mid a_j \in R \text{ для всех } j \right\}.$$

Отметим, что произведение $(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j) \psi_0$ в элементах $\mathcal{O}$ формально. Если мы выразим ψ_0 через элементарные функции Шура, а именно

$$e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(s) z^n,$$

то это произведение как ряд по степеням z и z^{-1} формально равно

$$\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) e^{\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k \right) z^{\ell}.$$

Поэтому, чтобы говорить о коэффициентах $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k$ при всех $\ell \in \mathbb{Z}$, требуются соответствующие условия сходимости. Этого можно достичь, рассматривая произведение в соответствующем классе граничных значений (см. работу [3]). Естественное вложение $k[s_r]$ такое, как k -подалгебра R , а также тот факт, что $\underline{\partial}_r$ являются соответствующими продолжениями операции дифференцирования $\partial/\partial s_r$ на $k[s_r]$, помогают поместить эти коэффициенты в R . Пространство $\mathcal{O}$ становится $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ -модулем согласно естественному продолжению действий

$$\begin{aligned} b \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \phi_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N b a_j z^j \right) \phi_0, \quad b \in R, \\ \xi \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \phi_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+1} \right) \phi_0. \end{aligned}$$

Мы также предположим, что каждый $\underline{\partial}_r$ действует на $\mathcal{O}$ согласно правилу Лейбница

$$\underline{\partial}_r \left(\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \phi_0 \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N \underline{\partial}_r(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+r} \right) \phi_0.$$

Это определит действие всех операторов, которые присутствуют в уравнениях (48). Отметим, что $\mathcal{O}$ является свободным $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ -модулем с образующим ϕ_0 , поскольку выполнено равенство

$$\left(\sum_j p_j \xi^j \right) \phi_0 = \left(\sum_j p_j z^j \right) \phi_0.$$

Таким образом, если мы имеем в $\mathcal{O}$ соотношения $Q\phi = 0$, где $Q \in \underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$, и $\phi = P\phi_0$, где $P \in \underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$, то можно сделать вывод, что $QP = 0$ и, более того, $Q = 0$, если P обратим. И это случай следующего класса осциллирующих функций: элемент $\phi \in \mathcal{O}$ называется *осциллирующей функцией типа $\alpha_\ell z^\ell$* , где α_ℓ обратим в $\underline{R}$, если она представима в виде

$$\phi = \phi(t, z) = \left\{ \alpha_\ell z^\ell + \sum_{k < \ell} \alpha_k z^k \right\} \phi_0 = K \cdot \phi_0, \quad K = \sum_{k \leq \ell} \alpha_k \xi^k. \quad (53)$$

Осциллирующая функция ϕ типа $\alpha_\ell z^\ell$ называется волновой функцией строгой иерархии КП, если существует оператор M такой, что уравнения (48) выполнены для M и ϕ . Отметим, что в этом случае M есть решение строгой иерархии КП, поскольку все преобразования, описанные в настоящем разделе, здесь правомерны. Тогда оператор M полностью определяется функцией ϕ . Если $\phi = K \cdot \phi_0$, как в формуле (53), то первое из уравнений (48) может быть записано в виде

$$M\phi = MK \cdot \phi_0 = z\phi = zK \cdot \phi_0 = K\xi \cdot \phi_0,$$

и, значит, M получается одеванием ξ оператором K , т. е. $M = K\xi K^{-1}$. Отметим, что для получения уравнений (48) достаточно доказать более слабый результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть ϕ есть осциллирующая функция типа $\alpha_\ell z^\ell$, а M – оператор первого порядка в $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ вида (29). Предположим, что для любого $r \geq 1$ существует дифференциальный оператор $Q_r \in \underline{R}[\xi]$ без постоянного члена такой, что

$$M\phi = z\phi, \quad \partial_r(\phi) = Q_r \phi.$$

Тогда для любого $r \geq 1$ выполнено $Q_r = C_r$. В частности, M есть решение строгой иерархии КП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для K имеет место равенство $\phi = K\phi_0$. Как было показано, первое уравнение гарантирует, что $M = K\xi K^{-1}$. По определению действия ∂_r на $\mathcal{O}$ имеем, с одной стороны,

$$\partial_r(\phi) = \{\partial_r(K) + K\xi^r\} \cdot \phi_0,$$

а с другой стороны, это должно быть равно $Q_r K \cdot \phi_0$. Отсюда получаем тождество

$$\partial_r(K)K^{-1} + K\xi^r K^{-1} = \partial_r(K)K^{-1} + M^r = Q_r.$$

Поскольку $\partial_r(K)K^{-1}$ содержит только члены степени не выше нуля по ξ , то, рассматривая строго дифференциальную часть и с левой, и с правой стороны равенства, получим $M^r_{>0} = (Q_r)_{>0} = Q_r$. Утверждение доказано.

Предположим, что имеются две волновые функции $\phi_1 = K_1 \cdot \phi_0$ и $\phi_2 = K_2 \cdot \phi_0$ строгой иерархии КП, соответствующие одному и тому же решению M строгой иерархии КП, т. е. имеют место равенства

$$M\phi_k = z\phi_k \quad \text{и} \quad \partial_r(\phi_k) = C_r \psi_k, \quad k = 1, 2.$$

Тогда, прежде всего, нам известно, что $K := K_1^{-1}K_2$ коммутирует с ξ . Следовательно, коэффициенты K постоянны для дифференцирования ∂ , т. е. $\partial(K) = 0$. Более того, из доказательства утверждения 3 следует, что для всех $r \geq 1$ выполнены

$$\partial_r(K_1) = (C_r - M^r)K_1, \quad \partial_r(K_2) = (C_r - M^r)K_2.$$

Это означает, что коэффициенты K являются константами для всех дифференцирований $\underline{\partial}_r$, так как

$$\begin{aligned}\underline{\partial}_r(K) &= -K_1^{-1}\underline{\partial}_r(K_1)K_1^{-1}K_2 + K_1^{-1}\underline{\partial}_r(K_2) = \\ &= -K_1^{-1}(C_r - M^r)K_1K_1^{-1}K_2 + K_1^{-1}\underline{\partial}_r(K_2) = \\ &= K_1^{-1}(-(C_r - M^r)K_2 + \underline{\partial}_r(K_2)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\phi_1 = K_1 \cdot \phi_0$ и $\phi_2 = K_2 \cdot \phi_0$ суть волновые функции строгой иерархии КП, соответствующие одному и тому же решению M , то элемент $K := K_1^{-1}K_2$ в $D(0)$ постоянен для всех соответствующих потоков, т. е. $\underline{\partial}_r(K) = \underline{\partial}(K) = 0$ для всех $r \geq 1$.

В случае иерархии КП можно построить аналогичный $R[\xi, \xi^{-1}]$ -модуль. Снова следует начать с линеаризации для тривиального решения $L_0 = \xi$ этой иерархии:

$$L_0\psi = z\psi, \quad \partial_i(\psi) = L_0^i(\psi) = z^i\psi, \quad i \geq 1.$$

Пусть t_i – параметр для потока, соответствующего ∂_i , так что ∂_i действует как взятие частной производной $\partial/\partial t_i$ по t_i . Тогда линеаризация имеет решение

$$\psi_0 = e^{\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i}. \quad (54)$$

Соответствующий $R[\xi, \xi^{-1}]$ -модуль снова есть множество $\mathcal{M}$ возмущений тривиального решения ψ_0 , а именно

$$\mathcal{M} = \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) e^{\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i} = \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \psi_0 \mid a_j \in R \text{ для всех } j \right\},$$

и элементы $\mathcal{M}$ также называются *осциллирующими функциями*. Пространство $\mathcal{M}$ можно сделать $R[\xi, \xi^{-1}]$ -модулем способом, аналогичным структуре $\underline{R}[\xi, \xi^{-1}]$ -модуля на $\mathcal{O}$. Более того, $\mathcal{M}$ будет свободным $R[\xi, \xi^{-1}]$ -модулем с образующим ψ_0 .

Мы снова выделим специальный класс элементов $\mathcal{M}$: элемент $\psi \in \mathcal{M}$ называется *осциллирующей функцией типа z^ℓ* , если он имеет вид

$$\psi = \psi(t, z) = \left\{ z^\ell + \sum_{k < \ell} \alpha_k z^k \right\} \psi_0 = K \cdot \psi_0, \quad K = \xi^\ell + \sum_{k < \ell} \alpha_k \xi^k. \quad (55)$$

Осциллирующая функция ψ типа z^ℓ называется волновой функцией иерархии КП, если существует оператор L вида (27) такой, что уравнения (49) выполнены для L и ψ . Отметим, что в этом случае L есть решение иерархии КП, поскольку все преобразования, описанные в этом разделе, правомерны, и если $\psi = K \cdot \psi_0$, то L получается одеванием ξ оператором K , т. е. $L = K\xi K^{-1}$. В постановке КП справедливы аналоги утверждения 3 и следствия 2. Мы сформулируем их для полноты изложения; доказательства повторяют приведенные выше.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. 1. Пусть ψ – осциллирующая функция типа z^ℓ и L есть оператор первого порядка в $R[\xi, \xi^{-1}]$, который представляет собой потенциальное решение иерархии КП. Предположим, что для любого $i \geq 1$ существует дифференциальный оператор $P_i \in R[\xi]$ такой, что

$$L\psi = z\psi, \quad \partial_i(\psi) = P_i\psi.$$

Тогда для любого $i \geq 1$ выполнено $P_i = B_i$. В частности, L есть решение иерархии КП.

2. Пусть $\psi_1 = K_1 \cdot \psi_0$ и $\psi_2 = K_2 \cdot \psi_0$ – волновые функции иерархии КП, соответствующие одному и тому же решению L . Тогда одевающие операторы K_1 и K_2 отличаются только элементом K в $D(0)_1$, который является постоянным для всех соответствующих дифференцирований, т.е. для всех $i \geq 1$

$$\partial_i(K) = \partial(K) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [3] мы дадим геометрическую постановку, позволяющую строить волновые функции строгой иерархии КП, в которой произведение возмущений и экспоненциальный сомножитель сходится.

Список литературы

- [1] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (Tokyo, December 20–27, 1982), *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **4**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1984, 1–95.
- [2] G. Segal, G. Wilson, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61** (1985), 5–65.
- [3] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenko, *Solutions of the Strict KP Hierarchy*, in preparation.
- [4] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **71**:5 (1981), 313–400.
- [5] M. Guest, *Harmonic Maps, Loop Groups and Integrable Systems*, London Mathematical Society Student Texts, **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [6] B. Kostant, *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195–338.
- [7] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.
- [8] M. Mulase, *Adv. Math.*, **54**:1 (1984), 57–66.