Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Горский, Угловой момент и гравимагнетизация
 $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричного вакуума, *ТМФ*, 2012,
том 171, номер 2, 225–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 05:39:33

© 2012 г.

А. С. Горский*

УГЛОВОЙ МОМЕНТ И ГРАВИМАГНЕТИЗАЦИЯ $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО ВАКУУМА

Рассматривается гравимагнетизация $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричного вакуума в присутствии Ω -деформации. Утверждается, что препотенциал Виттена–Зайберга связан с плотностью углового момента в пространстве $\mathbb{R}^4$ с евклидовой метрикой. Обсуждается возможная роль дионных инстантонов в качестве микроскопических носителей углового момента, которая может привести к спонтанной гравимагнетизации вакуума. Дионный инстантон интерпретируется как аналог евклидова отскока в $\mathbb{R}^4$. Подобный отскок связан с швингеровским рождением пар. Также коротко обсуждается индуцированный угловой момент в пространстве $\mathbb{R}^4$ в дуальной лиувиллевской формулировке $SU(2)$ -теории в терминах гипотезы о соответствии Алдая–Гайотто–Тачикавы.

Ключевые слова: суперсимметрия, калибровочные теории, инстантоны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Общий метод исследования свойств сложной системы состоит в помещении ее в соответствующие фоновые поля и изучении отклика. Фоновое поле обычно играет двоякую роль: во-первых, оно регуляризует возникающие расходимости, а во-вторых, помогает исследовать эффективные степени свободы как функции отклика. Таким способом исследуются, например, намагниченность $\langle M \rangle = d \ln Z / dB$ во внешнем магнитном поле B и транспортные коэффициенты, такие как проводимость во внешнем электрическом поле. Этот метод был применен при анализе основного состояния в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в работе [1]. Формально с помощью статистической суммы Некрасова учитывается инстантонный вклад в голоморфный препотенциал в Ω -деформированной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [1]. Фоном в этой теории является гравифотонное поле. С его помощью удастся избавиться от сингулярности при интегрировании по пространству модулей инстантонов.

Несмотря на то что процедура локализации является эффективным способом получения явного ответа, она несколько формальна и не может дать немедленных ответов на более “наивные” вопросы. В частности, интересно знать, не организуются ли инстантоны в эффективные степени свободы в высоких измерениях. С другой

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: gorsky@itep.ru

стороны, давно существует подозрение, что сами инстантоны могут быть рассмотрены как составные объекты (см. [2] и ссылки в этой работе).

В настоящей статье мы сосредоточимся на втором аспекте метода фонового поля, а именно на функциях отклика. Простейшей функцией отклика является производная статистической суммы Некрасова по гравифотонному полю. По построению параметры Ω -деформации играют роль химических потенциалов для вращений в четырехмерном евклидовом пространстве и для преобразований R-симметрии. Таким образом, можно вычислить вакуумное ожидание углового момента в $\mathbb{R}^4$ путем дифференцирования $\ln Z_{\text{Nek}}$ по гравифотонному полю.

Полезно иметь в виду картину в пятимерной теории, в которой инстантоны являются частицами, заряженными относительно внешнего гравифотонного поля. Препотенциал в четырехмерной теории интерпретируется как предел обобщенного индекса в пятимерной суперсимметричной теории Янга–Миллса в пространстве $\mathbb{R}^4 \times S^1$, а сам препотенциал Виттена–Зайберга [3] может быть получен в результате однопетлевого вычисления, учитывающего, что в петле могут распространяться любые частицы, включая инстантоны [4].

Рассмотрение простого квазиклассического предела статсуммы приводит к неожиданному результату. Из него немедленно следует, что плотность углового момента расходится при слабом гравифотонном поле. Абсолютная нестабильность материи в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса подобна абсолютной нестабильности материи в квантовой электродинамике во внешнем электрическом поле, которая возникает из-за эффекта Швингера. Однопетлевое вычисление препотенциала в пятимерной теории предполагает, что аналогия с квантовой электродинамикой может быть продолжена. Электродинамика также является упрощенной моделью для изучения генерации углового момента. Мы сравним явления в квантовой электродинамике и теории Янга–Миллса, пользуясь евклидовой интерпретацией процесса рождения пар с помощью отскокового решения.

Зная, что вакуумное ожидание углового момента отлично от нуля, разумно задать вопрос о его микроскопических носителях в евклидовом пространстве-времени. Частицей, естественно заряженной относительно гравифотонного поля, является D0-брана. Включение гравифотонного поля приводит к стабилизации евклидова отскока, так как топологический D0-заряд растворяется в мировом объеме D2-браны. Кроме того, так как мы имеем дело с инстантонной материей, естественным носителем углового момента является дионный инстантон [5]–[8]. Дионный инстантон – это цилиндрическая D2-брана, обладающая топологическим и электрическим зарядами. Такое решение существует и в отсутствие гравифотонного фона и стабилизируется угловым моментом полей, пропорциональным произведению инстантонного и электрического зарядов. Таким образом, вообще говоря, может произойти явление спонтанной гравимагнетизации инстантонной материи.

Так как статсумма Некрасова идентифицируется с конформным блоком [9], можно задаться вопросом о генерации углового момента и в теории Лиувилля. Параметры фона входят в выражения для конформных весов и центрального заряда. Таким образом, можно получить интересную интерпретацию производных конформного блока по конформным весам операторов, соответствующих операторам углового момента в физическом пространстве. Мы обсуждаем возникновение дополнительного углового момента за счет специальных операторов. Мы также связываем од-

нопетлевое вычисление во внешнем поле со вспомогательной задачей в пространстве AdS и с ее помощью получаем объекты, аналогичные конформным блокам теории Лиувилля.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 обсуждается индуцированный момент в Ω -деформированной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Мы сравниваем его с евклидовым описанием рождения пар во внешнем поле в квантовой электродинамике (КЭД) в разделе 3. Раздел 4 освещает предполагаемую роль дионных инстантонов в спонтанной гравимагнетизации. Раздел 5 посвящен рассмотрению углового момента в теории Лиувилля, а в разделе 6 содержится обсуждение результатов.

2. УГЛОВОЙ МОМЕНТ ИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ НЕКРАСОВА

Напомним основные свойства статистической суммы Некрасова. Рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса и введем Ω -деформацию, чтобы включить гравифотонное рамон-рамоновское поле в пространстве $\mathbb{R}^4$. Простейший способ описать Ω -фон состоит в том, чтобы рассмотреть $\mathbb{R}^4$ -расслоение над двумерным тором с нетривиальной $SO(4)$ -связностью в шестимерном пространстве-времени. Соответствующая метрика имеет вид

$$ds^2 = A dz d\bar{z} + g_{ij}(dx^i + V^i dz + \bar{V}^i d\bar{z})(dx^j + V^j dz + \bar{V}^j d\bar{z}), \quad (1)$$

где $V^i = \Omega_j^i x^j$, A – площадь тора. Компоненты тензора напряженности гравифотонного поля Ω_j^i , $\epsilon_{1,2}$ регуляризуют интегралы по пространству модулей инстантонов. Альтернативное описание Ω -деформации можно найти в работе [10].

Локализация интеграла по пространству модулей инстантонов относительно естественного действия тора приводит к точной статсумме $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории в Ω -фоне [1]. Ее можно интерпретировать в терминах взвешенных эквивариантных объемов пространства модулей инстантонов $\mathcal{M}_N$:

$$Z_{\text{Nek}}(a, \epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_N q^N \int_{\mathcal{M}_N} \text{“1”}. \quad (2)$$

Необходимо заметить, что обычный препотенциал Виттена–Зайберга $\mathcal{F}$ [3] может быть получен через квазиклассический предел при $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$

$$Z_{\text{Nek}} \propto \exp\left(\frac{\mathcal{F}}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \dots\right). \quad (3)$$

Заметим, что в Ω -фоне эффективный объем системы

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (4)$$

так как в некотором смысле квазиклассический предел препотенциала может быть рассмотрен как “плотность действия” вакуумного состояния.

Впоследствии для наших целей будет полезно рассматривать другую реализацию статсуммы Некрасова – обобщенный индекс в пятимерной суперсимметричной теории Янга–Миллса [1]

$$Z_{\text{Nek}} = \text{Tr}_H (-1)^{2(J_L + J_R)} \exp((\epsilon_1 - \epsilon_2)J_L^3 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)J_R^3 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)J_I^3 + \beta H), \quad (5)$$

где J_L, J_R – генераторы независимых вращений в пространстве $\mathbb{R}^4$, а J_I соответствует преобразованию R-симметрии. Это представление ясно показывает, что параметры деформации играют роль параметров генераторов углового момента и преобразования R-симметрии.

Это представление согласуется с выводом препотенциала Виттена–Зайберга из теории на пространстве $\mathbb{R}^4 \times S^1$ [4]. Этот вывод содержит явное однопетлевое вычисление, в котором просуммированы все частицы Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) с топологическими и электрическими зарядами. Так как инстантоны в пятимерном пространстве являются частицами, их можно рассматривать как степени свободы, распространяющиеся в петле. В нужном пределе однопетлевое вычисление в пятимерной теории дает инстантонный препотенциал Виттена–Зайберга [4]. Представление Z_{Nek} как обобщенного индекса согласуется с этим однопетлевым вычислением в Ω -фоне. Подобное представление обобщенных индексов было также исследовано в работе [11].

Из индексного представления очевидно, что производные $\ln Z$ по эквивариантным параметрам дают вакуумное ожидание физических угловых моментов $\langle J_{L,R} \rangle$. Аргументы в пользу такой интерпретации в четырехмерной теории основаны на форме метрики (1). Действительно, четырехмерная часть метрики деформирована членами, пропорциональными координатам x_ν . Отклик лагранжиана на эту деформацию канонически дает четырехмерный угловой момент. Следовательно, конфигурации в четырехмерном и пятимерном пространствах согласованы между собой.

Полезно выделить чистый угловой момент, без примеси R-вращений. Для этого рассмотрим разность $\partial_{\epsilon_1} - \partial_{\epsilon_2}$

$$\langle J_L \rangle = (\partial_{\epsilon_1} - \partial_{\epsilon_2}) \ln Z, \quad (6)$$

которая в квазиклассическом пределе ведет себя как

$$\langle J \rangle \propto \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mathcal{F}}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^2} + \dots. \quad (7)$$

Значит, плотность углового момента в слабом поле и при $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$ пропорциональна $\langle J_L \rangle \propto \epsilon^{-1}\mathcal{F}$, что указывает на нестабильность вакуума суперсимметричной теории Янга–Миллса во внешнем гравифотонном рамон-рамоновском поле. Неожиданно, что сам препотенциал оказывается пропорционален плотности углового момента.

Завершая этот раздел, отметим, что имея в виду конечный эффективный объем в Ω -фоне, можно написать для “вакуумного состояния” соотношение

$$\langle E \rangle_{\text{vac}} \propto \langle J_L \rangle_{\text{vac}}, \quad (8)$$

из которого следует, что это состояние ведет себя как система ротаторов во внешнем поле. В дальнейшем мы рассмотрим вопрос о степенях свободы, которые могут служить такими ротаторами.

3. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим простейший пример – квантовую электродинамику во внешнем электрическом поле E . Теория нестабильна относительно рождения пар заряженных частиц. Туннелирование описывается на языке первичного квантования в терминах классических траекторий частиц в евклидовом пространстве-времени [12]. Траектории являются окружностями в плоскости (x, t_E) . Радиусы окружностей можно найти путем поиска экстремума эффективного действия

$$S_{\text{eff}} = 2\pi Rm - E\pi R^2. \quad (9)$$

Ось x выбрана в направлении внешнего поля. Это квазиклассическое движение в евклидовом пространстве-времени может быть интерпретировано как движение в постоянном магнитном поле. Таким же образом рождение дионов во внешнем поле может быть описано с помощью замкнутых классических траекторий. Радиус траектории тоже фиксирован внешним полем; более того, конфигурация тоже является нестабильной. Отрицательная мода спектра флуктуаций дает повод интерпретировать ее как евклидов отскок.

Вероятность рождения пары в единичном объеме в единицу времени вычисляется из действия на отскоковом решении

$$w \propto e^{-S_{\text{eff}}(R_{\text{cr}})} \propto e^{-m^2/eE}. \quad (10)$$

Так как классическая траектория является окружностью с фиксированным радиусом, пара обладает ненулевым угловым моментом $\langle J \rangle$ с точки зрения четырехмерного евклидова пространства. Плотность круговых траекторий в плоскости (x, t_E) соответствует плотности углового момента с точки зрения пространства $\mathbb{R}^4$. Так как мы интересуемся производной препотенциала по внешнему полю, рассмотрим аналогичное выражение в КЭД:

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial E} \propto \langle R^2 \rangle, \quad (11)$$

т.е. производная пропорциональна площади, ограниченной классической траекторией. В квазиклассическом приближении $\langle R^2 \rangle \propto R_{\text{cr}}^2 \propto E^{-2}$, следовательно, расходится при малых полях. Это поведение отражает нестабильность системы.

Эта картина может быть обобщена на случай множественного рождения пар. В отличие от случая рождения единичной пары, здесь необходимо учитывать взаимодействие между отскоками, что существенно усложняет задачу. От плотности отскоков на двумерной плоскости зависит, находится ли среда ротаторов в “газообразной” или “жидкой” фазе.

Чтобы перейти к случаю $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, представим рождение пар на языке бран [13]. Отскок, соответствующий рождению диона (p, q) , – цилиндрическая струна (p, q) , натянутая между двумя D3-бранами в ПВ теории. В теории поля деформация цилиндра из-за конечного струнного действия пренебрежимо мала. В дальнейшем мы рассмотрим аналогичную конфигурацию цилиндрических D2-бран между параллельными D4-бранами в ПА теории.

Язык бран позволяет обсуждать проблему туннелирования с точки зрения теории на мировой поверхности рожденной браны. Напомним, что швингеровские процессы включают два этапа: туннелирование, описываемое евклидовым отскоком,

и эволюцию в пространстве Минковского после аналитического продолжения в точке поворота. Например, разрезав струнный цилиндр в точке поворота, мы получим диск, представляющий собой открытую струну в пространстве Минковского. Функция, описывающая такие браны, может быть представлена как волновая функция Хартли–Хокинга Ψ_{HH} в теории на мировой поверхности

$$Z(a) \propto \Psi_{\text{HH}}(a), \quad (12)$$

где a – некоторые граничные характеристики возникающего объекта, а $Z(a)$ отвечает вероятности рождения браны. Обычно аргументами волновой функции служат размер, метрика или некоторая граничная голономия. В рассматриваемом случае аргумент функции Хартли–Хокинга Ψ_{HH} может быть отождествлен с длиной границы; таким образом, $\Psi_{\text{HH}}(L)$ играет роль “конформного блока”. Позже мы вернемся к этой интерпретации. Обсуждение этой точки зрения можно найти в работе [14].

Статистическая сумма Некрасова в квазиклассическом приближении также допускает интерпретацию с точки зрения теории Хартли–Хокинга. Для этого препотенциал $\mathcal{F}(a)$ должен быть рассмотрен в качестве действия для некоторой гамильтоновой системы, например системы с фазовым пространством (a, a_D) [15], [16]

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}(a)}{\partial a}, \quad H(a, a_D) = \frac{\partial \mathcal{F}(a)}{\partial \tau}, \quad (13)$$

где a, a_D – традиционные обозначения центрального заряда в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [3]. Таким образом, препотенциал определяет квазиклассическую волновую функцию Уизема в определенной поляризации и допускает интерпретацию в качестве функции Хартли–Хокинга непертурбативно порожденного объекта. Будучи интегралом по A -циклу, координата a является допустимым аргументом волновой функции Хартли–Хокинга в качестве граничной характеристики.

4. ДИОННЫЕ ИНСТАНТОНЫ И СПОНТАННАЯ ГРАВИМАГНЕТИЗАЦИЯ ВАКУУМА

В предыдущем разделе мы объяснили аналогию между эффективным действием в КЭД в постоянном поле и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теорией Янга–Миллса в Ω -фоне. Евклидов отскок отвечает за рождение пар, и такие электронные или дионные петли в пространстве-времени $\mathbb{R}^4$ дают микроскопическое описание углового момента, который связан с производными по внешнему электрическому или магнитному полю. Индуцированный угловой момент в четырехмерном евклидовом пространстве-времени порожден евклидовыми дионными петлями.

Разумно задать вопрос о возможности микроскопического описания углового момента в Ω -фоне в терминах отскоков в евклидовом пространстве. Так как в пятимерной суперсимметричной теории Янга–Миллса при однопетлевом вычислении препотенциала Виттена–Зайберга суммируются все состояния с инстантонным и электрическим зарядами [4], естественно представлять дионные инстантоны как такие отскоки. Дионные инстантоны в Ω -фоне представляются в виде раздутых инстантонов в гравифотонном поле. D0-браны превращаются в цилиндрические D2-браны с некоторой плотностью D0-бран на мировой поверхности. В T-дуальной картине дионный инстантон представляется как D1-спираль.

D0-браны заряжены относительно гравифотонного поля и предотвращают схлопывание D2-бран в точку. Таким образом, в Ω -фоне мы получаем аналог отскоковой конфигурации в евклидовом пространстве-времени. Заметим, что подобная картина была получена в работе [17], где статсумма Некрасова выводилась в терминах раздутья инстантонов на фоне соответствующего $D2 - \overline{D2}$ состояния.

Подчеркнем, что необходимо прояснить происхождение индуцированного углового момента в отсутствие внешнего поля, так как препотенциал Виттена–Зайберга, который мы связали с плотностью углового момента, можно вычислить и в случае $\epsilon_{1,2} = 0$. Можно надеяться, что, в отличие от КЭД, в теории Янга–Миллса возможна спонтанная гравимагнетизация, т.е. генерация углового момента в пространстве $\mathbb{R}^4$ при нулевом гравифотонном поле. Впоследствии мы коротко обсудим решения, ответственные за это явление. Соответствующее бранное решение в евклидовом пространстве-времени стабилизируется не внешним полем, а угловым моментом.

Дионные инстантоны могут быть реализованы как инстантоны (D0-браны), на которых оканчиваются фундаментальные струны [5]–[7]. Эффект Майерса раздувает состояния “D0+фундаментальная струна” в цилиндрические D2-браны с электрическим и инстантонным зарядами, т.е. в четырехмерном пространстве-времени точечный инстантон превращается в круговую дионную петлю. Эта петля обладает топологическим зарядом благодаря плотности D0-струны и электрическим зарядом благодаря фундаментальной струне.

Более точно, D0-браны локализованы на D4-бранах, натянутых между двумя параллельными NS5-бранами в стандартной геометрии типа Ханани–Виттена. Их мировые линии протянуты вдоль координаты x_6 трансверсально к NS5-бранам. Фундаментальная струна соединяет две параллельные D4-браны в геометрии $\mathbb{R}^4 \times I$, в которой определяется пятимерная калибровочная теория. Дионные инстантоны являются решениями стандартных уравнений движения в пятимерной теории

$$F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}, \quad D_\mu \phi = E_\mu, \quad D_0 \phi = 0, \quad (14)$$

где ϕ – скалярное поле, а E_μ – электрическое поле в $\mathbb{R}^4$. Форма петли может быть произвольной [6], но экстремизация углового момента приводит к круговой форме. Дионный инстантон является БПЗ-состоянием и сохраняет половину от начальной суперсимметрии. Из формулы БПЗ можно найти его массу:

$$M = \frac{4\pi^2}{g^2} |I| + |vQ_e|, \quad (15)$$

где $|I|$ – инстантонный заряд, v – вакуумное ожидание скалярного поля. Сохранение половины суперсимметрии происходит в результате комбинированных эффектов скаляра, электрического поля и “движения” инстантонов в петле. Заметим, что дионные инстантоны сохраняют те же симметрии, что и Ω -фон, т.е. диагональную $SU(2)$ -симметрию из комбинации левых вращений и преобразований R-симметрии.

Опишем динамические квантовые числа системы более детально. Для этого полезно обсудить лагранжиан цилиндрической D2-браны постоянного радиуса R в плоском евклидовом пространстве-времени

$$L = -\sqrt{R^2(1 - E^2) + B^2}, \quad (16)$$

где E , B – электрическое и магнитное поля в мировом объеме браны. Соответствующий канонический импульс и плотность гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{\partial L}{\partial E} = \frac{R^2 E}{\sqrt{R^2(1 - E^2) + B^2}}, \\ \mathcal{H} &= R^{-1} \sqrt{(\Pi^2 + R^2)(B^2 + R^2)}.\end{aligned}\quad (17)$$

Очевидные интегралы

$$Q_F = \frac{1}{2\pi} \oint \Pi d\phi, \quad Q_0 = \frac{1}{2\pi} \oint B d\phi \quad (18)$$

отвечают сохраняющимся F1- и D0-зарядам на единицу длины D2-браны. Натяжение браны

$$T = Q_F = \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{H} d\phi, \quad (19)$$

что на решениях уравнения движения дает

$$T = |Q_F| + |Q_0|. \quad (20)$$

Из этой формулы следует, что натяжение D2-браны не дает вклада, поэтому сечение цилиндрической браны ведет себя как объект “без натяжения”. Это объясняет произвольную форму сечения. На бране есть скрещенные электрическое и магнитное поля, поэтому ненулевой вектор Пойнтинга рождает ненулевой угловой момент

$$M_\phi = \Pi B. \quad (21)$$

Следовательно, угловой момент дионного инстантона на единицу длины равен

$$J = Q_F Q_0 \quad (22)$$

и направлен вдоль оси цилиндра.

Напомним, что дионный инстантон выглядит как замкнутая петля с точки зрения пространства $\mathbb{R}^4$ и протяжен вдоль оси x_6 . Он переносит угловой момент, который был найден в работах [6]. Можно точно вычислить угловой момент на сечении трубки [6]:

$$L = \oint ds \left(x_3 \frac{\partial x_4}{\partial s} - x_4 \frac{\partial x_3}{\partial s} \right). \quad (23)$$

Этот угловой момент стабилизирует радиус цилиндрической D2-браны, протянутой между двумя D4-бранами.

Какие физические процессы в четырехмерном пространстве-времени описывают дионные инстантоны? Они определены в пространстве $\mathbb{R}^4 \times I$, что, возможно, подразумевает некоторый процесс туннелирования в пространстве Минковского. Есть несколько доводов в пользу этой интерпретации. Прежде всего, отметим, что дионный инстантон обобщается на случай нескольких цилиндрических D2-бран [8]. Это решение имеет нулевой полный рамон-рамоновский D2-заряд, но ненулевые 4-форму напряженности дипольного поля

$$G_4 = dC_3 - dB_2 \wedge C_1 \quad (24)$$

и 3-форму дипольного момента, пропорционального угловому моменту. Следовательно, возможен процесс исчезновения углового момента и, соответственно, поля G_4 путем отталкивания оболочек [8].

Отрицательная мода в евклидовом пространстве-времени после аналитического продолжения приводит к неустойчивости решения в пространстве Минковского. Отрицательная мода, ответственная за увеличение радиуса, была найдена для больших радиусов в работе [8]. Аналогичная отрицательная мода для больших радиусов была найдена в метрике Гёделя [18]. Таким образом, по крайней мере при больших радиусах дионного инстантона, зафиксированных угловым моментом, имеется отрицательная мода, что поддерживает интерпретацию в терминах отскока. Отметим, что обычно неустойчивость отражает попытки системы экранировать фоновое поле, как в механизме Швингера. В случае дионного инстантона фон имеет плотность углового момента. Следовательно, возникающие объекты должны иметь и угловой момент, чтобы экранировать фон.

Предполагая, что мы находимся в области, где существует отрицательная мода, зададимся вопросом о судьбе решения после аналитического продолжения. Наиболее тонкий момент касается судьбы топологического заряда. Действительно, так как решение является раздутым инстантоном, оно несет топологический заряд. Что происходит с ним при аналитическом продолжении из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^{3,1}$? Наивно мы получаем одетую пару монополя и антимонполя, а значит, начальный инстантонный заряд должен быть как-то разделен между ними. Так как с точки зрения пространства Минковского инстантон – это процесс туннелирования между двумя состояниями с различными числами Черна, можно сделать вывод, что рождаются два “одетых монополя” с дробным инстантонным зарядом. Такие состояния известны в теориях с компактными измерениями. Разумеется, этот вопрос заслуживает дальнейшего изучения.

5. УГЛОВОЙ МОМЕНТ В ТЕОРИИ ЛИУВИЛЛЯ

5.1. Логарифмические операторы. Согласно гипотезе Алдая–Гайотто–Та-чикавы (АГТ-соответствию) [9] статистическая сумма Некрасова совпадает с конформным блоком в теории Лиувилля. Поэтому мы будем изучать производные по эквивариантным параметрам со стороны теории Лиувилля. С помощью этой формальной процедуры мы, конечно же, надеемся получить новый взгляд на это явление. Наша основная цель – понять, что соответствует группе вращений евклидова пространства или группе Лоренца в пространстве Минковского в теории Лиувилля. Наивная догадка состоит в том, что алгебра, которая генерируется экранирующими операторами, играет ключевую роль. Мы не дадим исчерпывающего ответа на этот вопрос, но приведем некоторые интересные соображения.

Параметры ϵ_i входят в конформные веса операторов, включенных в конформный блок,

$$\alpha_i = \frac{Q}{2} + a_i \quad (25)$$

и в центральный заряд

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + b^{-1}, \quad b^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (26)$$

Производная может быть получена заменой одного из вершинных операторов на оператор

$$\widetilde{V}_\alpha = \phi e^{\alpha\phi}, \quad (27)$$

который является типичным логарифмическим оператором в конформной теории поля. Следовательно, формально вставка $U(1)$ -углового момента в пространстве $\mathbb{R}^4$ соответствует вставке лиувиллевого поля ϕ в отмеченных точках.

Подобное выражение можно вывести из квазиклассического приближения, в котором коррелятор Лиувилля $\Phi(z_i)$ может быть выражен через классическое действие Лиувилля на решениях уравнений движения с заданным поведением в точках вставки z_i

$$\Phi(z_i) \propto e^{S_{\text{cl}}(z_i)/b^2}. \quad (28)$$

Следовательно, вариация по эквивариантным параметрам сводится к вариации классического действия по модулям решения. На пространстве модулей решения классических уравнений движения в теории Лиувилля традиционно используется симплектическая форма [19]. Она содержит, кроме прочего, выражение, отвечающее вставке в точки z_i соответствующих членов

$$\omega \propto \sum_i d\phi(z_i) \wedge d\alpha_i. \quad (29)$$

Значит, мы можем использовать эту канонически сопряженную пару, чтобы выразить производную по весам через значения поля Лиувилля

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \propto \phi(z_i) \quad (30)$$

в соответствии с формальными аргументами.

5.2. Добавление специального оператора. Сделаем несколько комментариев о роли специальных операторов в гравимагнетизации вакуума. Напомним, что специальные операторы соответствуют D2-бранам, заполняющим двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, которое в четырехмерном пространстве является мировой поверхностью магнитной струны. Когда работают оба параметра $\epsilon_{1,2}$, можно до определенной степени считать этот фон конденсатом магнитных струн. Со стороны калибровочной теории вставка специального оператора, ориентированного в некоторой плоскости в пространстве $\mathbb{R}^4$, описывается в квазиклассическом приближении слабого поля как

$$Z_{\text{Nek,sur}} = \exp\left(\frac{\mathcal{F}}{\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{\mathcal{W}}{\epsilon_1} + \dots\right). \quad (31)$$

Значит, волновая функция D2-браны равна

$$\Psi_{\text{sur}} \propto e^{\mathcal{W}/\epsilon_1}. \quad (32)$$

Производная статсуммы со вставкой специального оператора в квазиклассическом пределе дает дополнительный вклад в угловой момент в пространстве $\mathbb{R}^4$

$$\delta\langle J \rangle \propto \mathcal{W}(a, z), \quad (33)$$

где координата z соответствует координате x_6 для D2-браны. Эквивалентно, оператор W может быть интерпретирован как твистованный суперпотенциал в теории на мировой поверхности D2-браны или как функция Янга–Янга для интегрируемой системы [20].

Вернемся к теории Лиувилля, где специальный оператор соответствует вставке примарного оператора $V_{1,2}$ [18], [21]. Вклад специального оператора в гравимагнетизацию соответствует вставке логарифмического примарного поля $\tilde{V}_{1,2} = \phi V_{1,2}$ в коррелятор Лиувилля. В работе [22] было показано, что логарифмические примарные операторы в квазиклассическом пределе подчиняются следующим соотношениям:

$$D_m \bar{D}_m \tilde{V}_{1,m} = A_m V(1, -m), \quad (34)$$

где A_m – численные константы, и $D_m = \partial^m + d_m$, где d_m содержит тензор энергии-импульса и его производные в теории Лиувилля.

Операторы $\tilde{V}_{1,2}$ и $V_{1,-2}$ образуют логарифмическую пару операторов с одинаковой конформной размерностью. Естественный вопрос касается объекта, порождаемого оператором $\tilde{V}_{1,2}$, т.е. одеванием специального оператора. Некая аналогия есть в минимальной струнной теории. В этом случае в теории Лиувилля есть два типа бран – ZZ и FZZT [23]. ZZ-браны отвечают D-инстантонам, локализованным на направлении нулевой моды Лиувилля. С другой стороны, FZZT-браны являются протяженными по координате Лиувилля и соответствуют специальным операторам. В работе [24] было показано, что инстантонная ZZ-брана может быть получена как суперпозиция FZZT-браны и антибраны:

$$|n, m\rangle_{\text{ZZ}} = |n, m\rangle_{\text{FZZT}} - |n, -m\rangle_{\text{FZZT}}. \quad (35)$$

Можно рассуждать о том, что реализация ZZ-браны как пары FZZT-бран аналогична раздутью инстантона.

Еще одна интересная интерпретация возникает из гамильтоновой теории. Специальные операторы являются степенями свободы некоторой гамильтоновой системы. Один из эквивариантных параметров четырехмерной суперсимметричной теории Янга–Миллса может быть отождествлен с постоянной Планка этой гамильтоновой системы [20]. Та же интерпретация может быть получена из теории на мировой поверхности [25]. Следовательно, мы должны дифференцировать волновую функцию поверхностного оператора по постоянной Планка. С точки зрения квантовой механики соответствующий угловой момент в пространстве $\mathbb{R}^4$ играет роль некоторого генератора R-симметрии. Возможно, такая картина связана с подходом Париси–Сурласа к классической динамике, в котором эффективная R-симметрия естественно определяется как вспомогательная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия.

5.3. Представление лиувиллевского типа для эффективного действия.

Завершая настоящий раздел, обсудим представление лиувиллевского типа для эффективного действия в четырехмерной теории на фоне постоянного электромагнитного поля. Для начала запишем представление первичного квантования для эффективного действия частицы массы m :

$$Z = \sum_{\text{path}} e^{-mL(C) + i\Phi(C)} W(C), \quad (36)$$

где $\Phi(C)$ – так называемый спиновый фактор, выраженный через траектории в пространстве $\mathbb{CP}^3$, и $W(C)$ – петля Вильсона вокруг контура C . Восстановление репараметризационной инвариантности потенциально ведет к появлению нулевой моды Лиувилля. Можно ожидать, что интеграл по параметризациям контура появляется в той же форме, что и в струнных вычислениях петель Вильсона.

Однако более привычная форма эффективного действия включает интегрирование по параметру Швингера. Во внешнем самодуальном поле однопетлевое эффективное действие равно

$$S_{\text{one-loop}} = \int \frac{ds}{s} \frac{e^{ism^2}}{(\text{sh } esE)^2}, \quad (37)$$

где мы предполагаем, что $E = \pm H$. Подчеркнем, что эффективное действие в КЭД не является голоморфным, следовательно, действие (37) должно быть представлено аналогом коррелятора в теории Лиувилля, т. е. интегралом произведения киральных конформных блоков по промежуточным конформным весам. Значит, вопрос состоит в том, можно ли интерпретировать интеграл по параметру Швингера как интеграл по промежуточным конформным размерностям в теории Лиувилля.

Прежде всего, отметим, что параметр Швингера можно рассматривать как радиальную координату в пространстве AdS [26], [27]. С другой стороны, радиальная координата в геометрии AdS интерпретируется как нулевая мода лиувиллевского поля [28], т. е. параметр Швингера связан с нулевой модой Лиувилля. Это соответствие можно уточнить. Для этого воспользуемся наблюдением из работы [27]: подынтегральное выражение может быть выражено через волновую функцию $SL(2, \mathbb{R})$ двумерной теории Янга–Миллса на диске, которая дает решения для гравитации в пространстве AdS_2 и зависит от граничной голономии аргумента. Граничная $SL(2, \mathbb{R})$ -голономия выражается через длину геодезической

$$\text{tr}_{1/2} P \oint_C A = 2 \text{ch} \frac{l(C)}{2}, \quad (38)$$

которая в данном случае пропорциональна eEs . Таким образом, параметр Швингера пропорционален длине граничной геодезической.

Теперь вспомним, что длины границы l_i являются естественными координатами в фазовом пространстве Тейхмюллера. Полезно рассмотреть представление когерентных состояний в фазовом пространстве Тейхмюллера в поляризации Кэлера (см. [29]). Конформный блок Лиувилля соответствует волновой функции квантовой теории Тейхмюллера в когерентном представлении. Эта волновая функция является собственной функцией оператора длины [29]

$$\Psi_L^{\text{Tei}}(q) = \Psi_L^{\text{Liouv}}(q), \quad (39)$$

где L – переменная длины в теории Тейхмюллера, которая одновременно параметризует веса в теории Лиувилля после отождествления

$$\alpha = \frac{Q}{2} + \frac{iL}{4\pi b}. \quad (40)$$

Таким образом, мы увидели явную аналогию между представлением Лиувилля для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в Ω -фоне и КЭД в постоянном

электрическом поле. Интегрирование по размерности промежуточного состояния в конформном блоке соответствует интегрированию по параметру Швингера в КЭД. Подчеркнем еще раз, что голоморфный препотенциал в $\mathcal{N} = 2$ теории соответствует конформному блоку в теории Лиувилля, а эффективное действие в КЭД играет роль коррелятора. Более того, мы отметили, что s интерпретируется как нулевая мода поля Лиувилля, а значит, до некоторой степени квантованные значения s_k в вычислении мнимой части соответствуют положениям ZZ-бран Лиувилля [23], которые локализованы в этом направлении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы сделали первые шаги в изучении функций отклика вакуума $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса на фоне гравифотонного поля, сосредоточившись на простейшей величине, аналогичной намагниченности. Разумеется, не менее интересны более сложные функции отклика, такие как гравипроводимость.

Было показано, что вакуумное состояние абсолютно нестабильно относительно генерации углового момента в евклидовом пространстве-времени $\mathbb{R}^4$ при малых гравифотонных полях. Более того, в квазиклассическом приближении препотенциал Виттена–Зайберга пропорционален плотности углового момента. Наша основная цель состояла в том, чтобы получить новую информацию о вакууме суперсимметричной теории Янга–Миллса, поэтому мы стремились найти микроскопические степени свободы в пространстве $\mathbb{R}^4$, ответственные за индуцированный угловой момент. Так как сами инстантоны не могут быть такими степенями свободы, мы рассмотрели дионные инстантоны, являющиеся переносчиками углового момента.

Аналогия с непертурбативным швингеровским рождением монополь-дионных пар оказалась очень полезной. Процесс описывается отскоками в евклидовом пространстве-времени $\mathbb{R}^4$, которые являются круговыми петлями Вильсона в случае электрического поля и круговыми петлями 'т Хофта в случае магнитного поля. Этим петлям может быть естественным образом придан угловой момент в пространстве $\mathbb{R}^4$. Дионные инстантоны, которые являются монополярными петлями в $\mathbb{R}^4$ с дополнительными электрическим и топологическим зарядами, отлично вписываются в эту картину.

Ключевым моментом является механизм стабилизации евклидова отскокового решения. Мы показали, что на гравифотонном фоне стабилизация отскока происходит из-за наличия плотности D0-заряда на цилиндрической D2-бране. Однако, так как препотенциал Виттена–Зайберга можно получить и в отсутствие гравифотонного фона, нужно искать другой источник стабилизации. Дионный инстантон дает такой механизм – нетривиальный угловой момент. Таким образом, мы приходим к интересной картине евклидова $\mathbb{R}^4$ -вакуума, населенного дионными петлями, генерирующими плотность топологического заряда. Эти петли возникают в результате спонтанной гравимагнетизации инстантонной среды.

Было бы интересно проанализировать возможность подобной картины евклидова вакуума, населенного дионными инстантонами, в теориях с меньшей суперсимметрией. Механизм стабилизации замкнутых кривых от схлопывания с помощью углового момента Пойнтинга должен работать и в более общем случае. В частности,

в теории, аналогичной КЭД, могут существовать дионные инстантоны с определенным флейвором, стабилизированные подобным образом. Также интересно исследовать роль дионных инстантонов в конденсации монополей под воздействием возмущений $\mathcal{N} = 2$.

Тонкий вопрос касается интерпретации среды с постоянной плотностью дионных петель с точки зрения пространства Минковского. В обычном механизме Швингера вклад множественных отскоков приводит к нелидирующим факторам в вероятности рождения. Однако мы не знаем, как среда дионных инстантонов описывает нестабильность вакуума. В общем случае при рассмотрении множественных отскоков нужно учитывать их взаимодействие. Кроме того, аналитическое продолжение из евклидова пространства в пространство Минковского оказывается нетривиальной задачей. Действительно, в случае отдельного отскока выбор поверхности аналитического продолжения, проходящей через точки поворота, довольно прост, однако в случае множественных взаимодействующих отскоков это отдельная сложная задача.

Подобно случаю евклидовых отскоков, препотенциал описывает квазиклассическую волновую функцию Хартли–Хокинга возникающего объекта. Это согласуется с интерпретацией потенциала как логарифма функции Уизема в гамильтоновой картине. Интересно понять, что соответствует аттракторным уравнениям в нашем случае.

Пользуясь АГТ-соответствием, мы рассмотрели вопрос углового момента в терминах конформных блоков Лиувилля и выяснили, что с ним связаны логарифмические операторы теории Лиувилля. Логарифмическая теория Лиувилля в общем случае имеет бесконечно много вырожденных операторов, и роль высших уравнений движения Замолодчикова остается невыясненной.

Стоит отметить, что среда дионных инстантонов в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеет очевидные параллели с квантовой системой Холла, а следовательно, методы и идеи, разработанные для нее, могут быть применены в контексте суперсимметричной теории Янга–Миллса. Не исключено, что система сильно взаимодействующих дионных петель может образовывать что-то вроде вакуумных капель, как в квантовом эффекте Холла. В этом случае значительно упрощается задача аналитического продолжения в пространство Минковского. Отметим, что аналогия между нестабильностью метрики Гёделя и движением в магнитном поле была упомянута в работах [30], [31]. В частности, вопрос о замкнутых времениподобных кривых сводился к задаче о замкнутости траекторий во внешнем поле.

Также интересен вопрос о том, какое отношение эти рассуждения имеют к анализу Редже. Действительно, мы убедились, что дионные инстантоны естественным образом населяют вакуум евклидовой $\mathbb{R}^4$ -теории Янга–Миллса, а их стабилизация обеспечивается угловым моментом. Эта картина имеет некоторое сходство с описанием реджеонов с помощью бран [32]. Мы надеемся вернуться к этому вопросу впоследствии.

Благодарности. Автор благодарен Е. Горскому, В. Михайлову, А. Миронову, Н. Некрасову и М. Волошину за плодотворные обсуждения, а также Fine Theoretical Physics Institute (FTPI), University of Minnesota и Institut de Physique Théorique (IPhT), Saclay, где была проделана часть этой работы, за гостеприимство и поддержку. Работа поддержана РФФИ (грант № 09-02-00308) и CRDF-RUP2-2961-MO-09.

Список литературы

- [1] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2004), 831–864, arXiv: hep-th/0206161.
- [2] B. Collie, D. Tong, *JHEP*, **08** (2009), 006, 26 pp., arXiv: 0905.2267.
- [3] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; Erratum, **430**:2 (1994), 485–486, arXiv: hep-th/9407087.
- [4] A. E. Lawrence, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **513**:1–2 (1998), 239–265, arXiv: hep-th/9706025.
- [5] N. D. Lambert, D. Tong, *Phys. Lett. B*, **462**:1–2 (1999), 89–04, arXiv: hep-th/9907014.
- [6] D. Mateos, P. K. Townsend, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:1 (2001), 011602, 4 pp., arXiv: hep-th/0103030; E. Eyras, P. K. Townsend, M. Zamaklar, *JHEP*, **05** (2001), 046, 19 pp., arXiv: hep-th/0012016; D. Mateos, S. Ng, P. K. Townsend, *JHEP*, **03** (2002), 016, 27 pp., arXiv: hep-th/0112054; P. K. Townsend, *Ann. Henri Poincaré*, **4**:Suppl. 1 (2003), S183–S195, arXiv: hep-th/0211008.
- [7] D. S. Bak, K. M. Lee, *Phys. Lett. B*, **544**:3–4 (2002), 329–336, arXiv: hep-th/0206185; H. Y. Chen, M. Eto, K. Hashimoto, *JHEP*, **01** (2007), 017, 26 pp., arXiv: hep-th/0609142.
- [8] R. Emparan, D. Mateos, P. K. Townsend, *JHEP*, **07** (2001), 011, 24 pp., arXiv: hep-th/0106012.
- [9] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [10] N. Nekrasov, E. Witten, *JHEP*, **09** (2010), 092, 82 pp., arXiv: 1002.0888.
- [11] R. Gopakumar, C. Vafa, *M-theory and topological strings*. I, arXiv: hep-th/9809187.
- [12] I. K. Affleck, O. Alvarez, N. S. Manton, *Nucl. Phys. B*, **197**:3 (1982), 509–519.
- [13] A. S. Gorsky, K. A. Saraikin, K. G. Selivanov, *Nucl. Phys. B*, **628**:1–2 (2002), 270–294; arXiv: hep-th/0110178.
- [14] H. Ooguri, C. Vafa, E. Verlinde, *Lett. Math. Phys.*, **74**:3 (2005), 311–342, arXiv: hep-th/0502211.
- [15] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **527**:3 (1998), 690–716, arXiv: hep-th/9802007.
- [16] A. Losev, N. Nekrasov, S. L. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611, arXiv: hep-th/9711108.
- [17] S. Matsuura, *JHEP*, **09** (2008), 083, 23 pp., arXiv: 0808.3493.
- [18] N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda, J. Teschner, *JHEP*, **02** (2010), 057, 61 pp., arXiv: 0909.1105.
- [19] L. Cantini, P. Menotti, D. Seminara, *Nucl. Phys. B*, **638**:3 (2002), 351–377, arXiv: hep-th/0203103.
- [20] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories”, *Proceedings of the XVIIth International Congress on Mathematical Physics* (Prague, August 3–8, 2009), ed. P. Exner, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, 265–289, arXiv: 0908.4052.
- [21] L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa, H. Verlinde, *JHEP*, **01** (2010), 113, 50 pp., arXiv: 0909.0945.
- [22] A. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:Suppl. 2 (2004), 510–523, arXiv: hep-th/0312279.
- [23] A. Zamolodchikov, A. I. Zamolodchikov, *Liouville field theory on a pseudosphere*, arXiv: hep-th/0101152.
- [24] N. Seiberg, D. Shih, *Compt. Rend. Phys.*, **6**:2 (2005), 165–174, arXiv: hep-th/0409306.
- [25] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin, *Commun. Number Theory Phys.*, **5**:1 (2011), 135–201, arXiv: 1002.2622.
- [26] R. Gopakumar, *Phys. Rev. D*, **70**:2 (2004), 025009, 15 pp., arXiv: hep-th/0308184.

- [27] A. Gorsky, V. Lysov, *Nucl. Phys. B*, **718**:1–2 (2005), 293–318, arXiv: hep-th/0411063.
- [28] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **68**:1–3 (1998), 1–8, arXiv: hep-th/9711002.
- [29] J. Teschner, “From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces”, *Prospects in Mathematical Physics*, Contemporary Mathematics, **437**, AMS, Providence, RI, 2007, 231–246, arXiv: hep-th/0308031; *Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I*, arXiv: 1005.2846; R. M. Kashaev, *Discrete Liouville equation and Teichüller theory*, arXiv: 0810.4352.
- [30] N. Drukker, B. Fiol, J. Simón, *JCAP*, **10** (2004), 012, 20 pp., arXiv: hep-th/0309199.
- [31] Y. Hikida, S.-J. Rey, *Nucl. Phys. B*, **669**:1–2 (2003), 57–77, arXiv: hep-th/0306148.
- [32] A. Gorsky, *Phys. Rev. D*, **80**:12 (2009), 125002, 18 pp., arXiv: 0905.2058.