Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Калоджеро, Еще одна новая модель золотой рыбки,
ТМФ, 2012, том 171, номер 2, 241–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:35:32

© 2012 г.

Ф. Калоджеро*

ЕЩЕ ОДНА НОВАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТОЙ РЫБКИ

Выявлена новая интегрируемая (действительно разрешимая) модель типа модели золотой рыбки и рассмотрены некоторые ее свойства. Соответствующие ньютоновские уравнения движения имеют вид

$$\ddot{z}_n = \frac{\dot{z}_n^2}{z_n} + c_1 \frac{\dot{z}_n}{z_n} + c_2 \dot{z}_n + c_2 c_3 z_n + c_1 c_2 + \\ + \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\dot{z}_n + c_3 z_n + c_1)(\dot{z}_m + c_3 z_m + c_1)}{z_m} \cdot \frac{z_n + z_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные константы, $z_n \equiv z_n(t)$ – N зависимых переменных, N – произвольное положительное число ($N > 1$), t – независимая переменная (“время”), а точки обозначают дифференцирование по времени.

Ключевые слова: интегрируемые динамические системы, разрешимые динамические системы, интегрируемая ньютоновская задача многих тел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная динамическая система золотой рыбки [1], которую также можно интерпретировать как простейший пример интегрируемой динамической системы, относящейся к классу Рейсенарса–Шнайдера [2], определяется ньютоновскими уравнениями движения

$$\ddot{z}_n = \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{2\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}. \quad (1a)$$

Обозначения. Здесь и далее N – произвольное целое число ($N \geq 2$), индексы n, m, k принимают значения от 1 до N , если не указано другое, t (“время”) – независимая (*вещественная*) переменная, N координат z_n являются зависимыми переменными, $z_n \equiv z_n(t)$, а точки сверху обозначают дифференцирование по времени. Иногда удобно считать, что зависимые переменные z_n являются *комплексными* числами, которые задают положения N точек, движущихся в *комплексной* z -плоскости. Если ввести вещественную и мнимую части $z_n = x_n + iy_n$, то можно

*Physics Department, University of Rome “La Sapienza”, National Institute of Nuclear Physics, Sezione di Roma, Roma, Italy.

E-mail: Francesco.Calogero@roma1.infn.it, Francesco.Calogero@uniroma1.it

также определить *вещественные* 2-векторы $\vec{r}_n \equiv (x_n, y_n)$ с декартовыми координатами x_n, y_n , таким образом имея в виду, что движение происходит в *вещественной* xy -плоскости; тогда уравнения движения (1a) можно записать в ковариантном (т. е. вращательно-инвариантном) виде. Этот прием также можно с успехом использовать для получения более “реалистичной” интерпретации (подходящей версии) всех моделей типа модели золотой рыбки, включая подходящие версии моделей, упомянутых и рассматриваемых ниже, как характеризующие задачи многих тел в “физической” плоскости (см., например, главу 4 в монографии [3]). Далее мы больше не будем останавливаться на этой реинтерпретации, ограничивая наше рассмотрение *комплексными* версиями рассматриваемых моделей, тем не менее ссылаясь время от времени на них как на “задачи многих тел”: N точечных частиц с единичной массой, движение которых в плоскости определяется ньютоновскими уравнениями с зависящими от скорости силами в случае задач одного и двух тел.

Замечательным свойством задачи многих тел (1a) является ее *разрешимость*, определяемая следующим ясным предписанием: N значений N зависимых переменных $z_n \equiv z_n(t)$ в моменты времени t представляют собой N корней следующего алгебраического уравнения относительно неизвестной $z \equiv z(t)$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0)}{z - z_n(0)} = \frac{1}{t}, \quad (16)$$

где $\dot{z}_n(0)$ и $z_n(0)$ – *начальные* скорости и положения N точечных движущихся частиц [1], [3], [4]. Заметим, что это уравнение после умножения на $\prod_{k=1}^N [z - z_k(0)]$ (многочлен степени N по z) становится зависящим от времени полиномиальным уравнением степени N относительно неизвестной z , демонстрируя тем самым, что оно действительно дает N значений $z_n \equiv z_n(t)$ в качестве решений.

Прототип другого, более общего, семейства моделей золотой рыбки (также *разрешаемых*, см. [3]) имеет вид

$$\ddot{\zeta}_n = \sum_{m=1, m \neq n}^N 2\dot{\zeta}_m \alpha \operatorname{cth}[\alpha(\zeta_n - \zeta_m)], \quad (2)$$

где α – произвольная постоянная (при $\alpha = 0$ данная модель сводится к (1a)).

С течением времени были установлены еще несколько моделей типа модели золотой рыбки для случая N тел, причем их отличительная черта состояла в наличии в правой части помимо других вкладов соответствующих ньютоновских уравнений движения (“ускорение равно силе”) члена, тождественного тем, которые возникают в правой части (1a) или (2). Все эти модели обладают замечательным свойством – они являются *разрешаемыми*, а именно: соответствующие им задачи на начальные значения можно решить с помощью *алгебраических* операций, в основном путем нахождения N собственных значений известной явно зависящей от времени $(N \times N)$ -матрицы, или, эквивалентно, как в описанном выше случае (см. (16)), путем нахождения N корней зависящего от времени многочлена степени N (см. [3] и особенно каталог таких моделей в разделе 4.2.2, озаглавленном “Ловля золотой рыбки”, в книге [4]). Два недавних дополнения к этому каталогу задач многих тел типа модели золотой рыбки представлены в работе [5], а третье – в работе [6]. Цель

настоящей работы заключается в том, чтобы привести еще одну разрешаемую задачу многих тел типа модели золотой рыбки. Замечательным образом, эта новая модель (так же, как и модель, представленная в работе [6]) была найдена взятием предела непрерывного времени в дискретной по времени недавно открытой модели типа модели золотой рыбки [7]. Возможно, что со временем будут найдены новые примеры, мы считаем подобные поиски оправданными и любые полученные в связи с этим результаты – замечательными.

В разделе 2 описываются модель и ее решение, в разделе 3 представлены соответствующие доказательства. Некоторые математические аспекты собраны в приложениях А и Б.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Новая модель N тел определяется ньютоновскими уравнениями движения

$$\ddot{z}_n = \frac{\dot{z}_n^2}{z_n} + c_1 \frac{\dot{z}_n}{z_n} + c_2 \dot{z}_n + c_2 c_3 z_n + c_1 c_2 + \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\dot{z}_n + c_3 z_n + c_1)(\dot{z}_m + c_3 z_m + c_1)}{z_m} \frac{z_n + z_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $z_n \equiv z_n(t)$ – зависимые переменные, t (“время”) – независимая переменная, точки сверху обозначают дифференцирование по времени, а c_1, c_2, c_3 – три *априори* произвольные константы (очевидно, определенные с точностью до общего рескейлинга и рескейлинга времени, $c_j \Rightarrow c_j/\eta, t \Rightarrow \eta t$).

Эквивалентный вариант такой модели получается с помощью следующей замены зависимых переменных:

$$z_n(t) = \gamma e^{-2\alpha\zeta_n(t)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4a)$$

где α и γ – произвольные константы ($\gamma \neq 0$). Эта модель, очевидно, описывается уравнением

$$\ddot{\zeta}_n = (c_2 - 2\alpha b_2 e^{2\alpha\zeta_n}) \dot{\zeta}_n + c_2(b_1 + b_2 e^{2\alpha\zeta_n}) + 2 \sum_{m=1, m \neq n}^N (\dot{\zeta}_n + b_1 + b_2 e^{2\alpha\zeta_n}) \times \\ \times (\dot{\zeta}_m + b_1 + b_2 e^{2\alpha\zeta_m}) \alpha \operatorname{cth}[\alpha(\zeta_n - \zeta_m)], \quad n = 1, \dots, N, \quad (4b)$$

где мы положили $c_3 = -2\alpha b_1, c_1 = -2\alpha\gamma b_2$. Такой вариант ньютоновских уравнений движения содержит четыре *априори* произвольных константы c_2, b_1, b_2, α ; последнюю из этих констант можно исключить путем рескейлинга $\alpha\zeta_n \Rightarrow \zeta_n, \alpha b_1 \Rightarrow b_1, \alpha b_2 \Rightarrow b_2$, однако мы сохраним ее, чтобы заметить, что при замене двух констант b_1, b_2 на γ_1, γ_2 посредством равенств $2\alpha b_1 = 2\alpha\gamma_1 - \gamma_2, 2\alpha b_2 = \gamma_2$ и при взятии затем предела $\alpha \rightarrow 0$ уравнения движения (4b) принимают вид (также после подходящей замены зависимых переменных $\gamma_1 + \gamma_2\zeta_n = \chi_n$)

$$\ddot{\chi}_n = (c_2 - \gamma_2) \dot{\chi}_n + c_2 \gamma_2 \chi_n + 2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{(\dot{\chi}_n + \gamma_2 \chi_n)(\dot{\chi}_m + \gamma_2 \chi_m)}{\chi_n - \chi_m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Однако тот факт, что система (5) N нелинейных ОДУ имеет разрешимый характер, не является открытием (см. уравнение (2.3.3-2) в [3]).

Здесь и далее для простоты мы сконцентрируемся на первом варианте (3) ньютоновских уравнений движения. Их разрешимый характер очевиден по следующим причинам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. N координат $z_n(t)$ – решений ньютоновских уравнений движения (3) – совпадают с N собственными значениями $(N \times N)$ -матрицы $U \equiv U(t)$, определяемой в терминах $2N$ начальных условий $z_m(0)$, $\dot{z}_m(0)$ и времени t следующим образом:

$$U(t) = U(0)\tau^{-r} \left\{ 1 + \frac{e^{a(\tau-1)} - 1}{a} A \right\} - \frac{c_1}{c_2} \left\{ \frac{1 - \tau^{-r}}{r} \left[1 + \frac{e^{a\tau} - 1}{a} A \right] + \right. \\ \left. + [\psi^{(r)}(-a\tau) - \tau^{-r}\psi^{(r)}(-a)] \frac{e^a}{a} A \right\}, \quad (6a)$$

$$\tau \equiv \tau(t) = e^{c_2 t}, \quad \psi^{(r)}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{(s+r)s!}, \quad r = \frac{c_3}{c_2}. \quad (6b)$$

Здесь $U(0)$ и A – диагональная и диадическая постоянные $(N \times N)$ -матрицы, определяемые в терминах начальных условий $z_n(0)$, $\dot{z}_n(0)$ следующим образом:

$$U(0) = \text{diag}[z_n(0)], \quad U_{nm}(0) = \delta_{nm} z_n(0), \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (7)$$

$$A_{nm} = \alpha_n \alpha_m, \quad \alpha_n = \left\{ r + \frac{\dot{z}_n(0) + c_1}{c_2 z_n(0)} \right\}^{1/2}, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (8a)$$

откуда следует

$$A^2 = aA, \quad (8b)$$

где

$$a = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 = Nr + \sum_{n=1}^N \frac{\dot{z}_n(0) + c_1}{c_2 z_n(0)}. \quad (8b)$$

Эти формулы выполняются, если они выписаны в случае, когда используемые значения всех величин берутся в общем положении (в частности, различны константы взаимодействия). Как правило, они справедливы для произвольных значений этих величин, но для специальных значений – только после взятия подходящих пределов; в частности, если r обращается в нуль, $r = 0$, то

$$U(t) = U(0) \left\{ 1 + \frac{e^{a(\tau-1)} - 1}{a} A \right\} - c_1 \left\{ 1 + \frac{e^{a\tau} - 1}{a} A \right\} t + \\ + \frac{c_1}{c_2} \frac{e^{a\tau}}{a} [\psi^{(0)}(-a\tau) - \psi^{(0)}(-a)], \quad (9a)$$

тогда как если r – отрицательное целое число, $r = -\sigma$, $\sigma = 1, 2, \dots$, то

$$U(t) = U(0)\tau^\sigma \left\{ 1 + \frac{e^{a(\tau-1)} - 1}{a} A \right\} + c_1 \tau^\sigma e^{a\tau} \frac{(-a)^{\sigma-1}}{\sigma!} A t - \\ - \frac{c_1}{c_2} \frac{\tau^\sigma - 1}{\sigma!} \left[1 + \frac{e^{a\tau} - 1}{a} A \right] + \frac{c_1}{c_2} \frac{e^{a\tau}}{a} A \sum_{s=1, s \neq \sigma}^{\infty} \frac{(-a)^{s-1} (\tau^s - \tau^\sigma)}{(s - \sigma)s!}. \quad (9b)$$

Разумеется, при этом $\tau \equiv \tau(t)$, $\psi^{(r)}(x)$, а и A определяются как было показано выше (см. (66) и (8)).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если r – положительное целое число, то функцию $\psi^{(r)}(x)$ (см. (66)) можно выразить в виде комбинации степеней и экспонент. Например, в специальном случае $r = 1$ имеем $\psi^{(1)}(x) = [e^x - 1 - x]/x$. Если же c_1 обращается в нуль, $c_1 = 0$, то решение $U(t)$ становится довольно простым:

$$U(t) = U(0)\tau^{-r} \left\{ 1 + \frac{e^{a(\tau-1)} - 1}{a} A \right\}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если константа c_2 является чисто мнимым числом, $c_2 = i\omega$ или $c_2 = -i\omega$, где ω – положительная константа ($\omega > 0$ – размерное обратное время), и, более того, или c_1 обращается в нуль, или c_1 не обращается в нуль и константа c_3 также является мнимой и такой, что r (см. (66)) является рациональным числом, $r = p/q$, где p и q – два взаимно простых ненулевых целых числа (и, скажем, $q > 0$, причем, более того, $q > 1$, если p – отрицательное целое число, поскольку должно выполняться $r \neq -\sigma$, $\sigma = 1, 2, \dots$), то, очевидно, матрица $U(t)$ является изохронной с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{или} \quad T = q \frac{2\pi}{\omega}, \quad (11)$$

т. е. для начальных условий общего положения $U(t \pm T) = U(t)$. Отсюда с очевидностью следует, что в этих случаях модель N тел (3) также является изохронной, а именно, ее решение общего положения является полностью периодическим с периодом T или, возможно, с периодом, который является в общем случае малым целым кратным T^1).

Если же константа c_2 является чисто мнимым числом, $c_2 = i\omega$, ω – ненулевая вещественная константа, а c_1 не обращается в нуль, но константа c_3 не является мнимой, а обладает положительной вещественной частью $\text{Re } c_3 \equiv \rho > 0$, так что $\tau^{-r} = e^{-c_3 t}$ (см. (66)) обращается в нуль при $t \rightarrow \infty$, то, очевидно, в этом пределе имеем

$$U(t) = -\frac{c_1}{c_2} \left\{ \frac{1}{r} \left[1 + \frac{e^{a\tau} - 1}{a} A \right] + \psi^{(r)}(-a\tau) \frac{e^a}{a} A \right\} + O(e^{-\rho t}). \quad (12a)$$

Поэтому в данном случае модель N тел (3) (при начальных условиях общего положения) является асимптотически изохронной, причем с точностью до поправок порядка $e^{-\rho t}$ одна из N координат $z_n(t)$ асимптотически приближается к периодической траектории

$$z_{\text{asy}}(t) = -\frac{c_1}{c_3} e^{a\tau} - \frac{c_1}{c_2} \psi^{(r)}(-a\tau) e^a, \quad \tau \equiv \tau(t) = e^{i\omega t} \quad (126)$$

(что соответствует собственному значению a матрицы A , зависящему от начальных условий (см. (8b)), но при этом периодическому с периодом $2\pi/\omega$, не зависящему от начальных условий), а все остальные $N - 1$ координаты приближаются к постоянному значению $\bar{z} = -c_1/c_3$ (что соответствует $N - 1$ обращаяющимся в нуль собственным значениям диадической матрицы A).

¹⁾Поскольку некоторые собственные значения матрицы $U(t)$ могут меняться местами в ходе временной эволюции (анализ этой феноменологии можно найти в работе [8]), что подтверждает утверждение о том, что даже если это происходит, то в общем случае это лишь приводит к увеличению полного периода движения N тел на малый множитель.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Равновесные конфигурации, $z_n(t) = \bar{z}_n$, $\dot{z}_n = 0$, системы (3), как показано в приложении Б, отождествляются следующим образом²⁾: первые $\bar{N} - 2$ величины $\bar{z}_n$ (где $\bar{N}$ – произвольное целое число в интервале $2 \leq \bar{N} \leq N$) отождествляются с помощью формулы

$$\bar{z}_n = \frac{c_1(x_n - 1)}{2}, \quad (13)$$

где $\bar{N} - 2$ чисел x_n являются $\bar{N} - 2$ нулями многочлена Якоби $P_{\bar{N}-2}^{(2,\beta)}(x)$, в котором

$$\beta = 1 - \bar{N} + \frac{\bar{N} - 2}{r(\bar{N} - 1)}. \quad (14)$$

Здесь r определяется соотношением (66), а из оставшихся $N + 2 - \bar{N}$ величин $\bar{z}_n$ две обращаются в нуль (скажем, $z_{\bar{N}-1} = z_{\bar{N}} = 0$, что в силу (13) отвечает $x_{\bar{N}-1} = x_{\bar{N}} = 1$). При этом оставшиеся $N - \bar{N}$ величин $\bar{z}_n$ (если таковые имеются) принимают значение $-c_1/c_3$ (т.е. при нашей нумерации $\bar{z}_n = -c_1/c_3$, что в силу (13) отвечает равенствам $x_n = -1$, $n = \bar{N} + 1, \dots, N$). Заметим, что мы предполагаем для простоты, что $N \geq 3$ и константы c_1, c_2, c_3 имеют значения *общего положения* (в частности, $c_1 \neq 0$).

“Физическое значение” этих состояний равновесия, разумеется, является спорным ввиду *неопределенности*, возникающей, когда значения двух координат z_n совпадают, в члене в правой части ньютоновских уравнений движения (3) в состоянии равновесия (см. ниже (33)), куда эти две координаты входят в сумме. Тем не менее в *изохронных* случаях исследование движения динамической системы (3) в окрестности этих состояний равновесия может привести к *диофантовым* результатам, включающим нули многочленов Якоби. Эти результаты будут представлены в отдельной работе, если мы сочтем их достаточно интересными для обоснования их публикации.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Отправной точкой для получения результатов, приведенных в разделе 2, является система двух матричных эволюционных уравнений первого порядка

$$\dot{U} = -c_1 I - c_3 U + c_4 UV, \quad \dot{V} = c_2 V, \quad (15)$$

где зависимые переменные $U \equiv U(t)$, $V \equiv V(t)$ представляют собой $(N \times N)$ -матрицы, I – единичная $(N \times N)$ -матрица (которую в дальнейшем мы будем иногда опускать), а четыре параметра c_j – произвольные *скалярные* константы. Решение соответствующей задачи на начальные условия дается, как легко проверить (однако для полноты мы приводим доказательство в приложении А), формулами

$$V(t) = V(0)e^{c_2 t}, \quad (16)$$

²⁾Разумеется, с точностью до перестановок; ниже мы для простоты выбираем для них некоторую конкретную нумерацию.

$$U(t) = U(0)\tau^{-r}e^{(\tau-1)A} - \frac{c_1}{c_2}e^{\tau A}\varphi^{(r)}(A, \tau), \quad (17a)$$

$$A = \frac{c_4}{c_2}V(0), \quad \varphi^{(r)}(a, \tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-a\tau)^s - \tau^{-r}(-a)^s}{(s+r)s!}, \quad (17b)$$

где r определено как в (66). Выражение для $U(t)$ в виде (17) имеет место при условии, что $r \neq 0, -1, -2, \dots$, а для модифицированных версий, наоборот, при $r = 0, -1, -2$ (см. приложение A).

Теперь диагонализуем матрицу $U(t)$, называя $z_n(t)$ ее N собственными значениями (такое название обосновано сказанным ниже), а $R(t)$ – диагонализующей матрицей:

$$U(t) = R(t)Z(t)[R(t)]^{-1}, \quad Z(t) \equiv \text{diag}[z_n(t)]. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из формул (18) следует, что матрица $R(t)$ определена с точностью до правого умножения на произвольную диагональную матрицу $D(t)$, т. е. $R(t) \Rightarrow R(t)D(t)$.

Более того, мы предполагаем, что матрица $U(t)$ исходно является диагональной:

$$U(0) = Z(0) \equiv \text{diag}[z_n(0)], \quad (19a)$$

откуда следует (с точностью до упомянутой выше неоднозначности, см. замечание 4)

$$R(0) = I. \quad (19b)$$

Теперь введем две матрицы $Y(t)$ и $M(t)$, определенные как

$$V(t) = R(t)Y(t)[R(t)]^{-1}, \quad Y(t) = [R(t)]^{-1}V(t)R(t), \quad (20a)$$

$$M(t) = [R(t)]^{-1}\dot{R}(t). \quad (20b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Элемент свободы в определении матрицы $R(t)$ (см. замечание 4) влечет за собой то, что матрица $M(t)$ определена с точностью до “калибровочного преобразования”

$$M(t) \Rightarrow \widetilde{M}(t) = [D(t)]^{-1}M(t)D(t) + [D(t)]^{-1}\dot{D}(t),$$

которое следует из замены в определении (20b) матрицы $R(t)$ на матрицу $R(t)D(t)$ (и $\dot{R}(t)$ на $\dot{R}(t)D(t) + R(t)\dot{D}(t)$). Поэтому вследствие произвольной природы диагональной матрицы $D(t)$ из N^2 элементов $(N \times N)$ -матрицы $M(t)$ важны только $N^2 - N$ внедиагональных элементов, в то время как N диагональных элементов

$$\mu_n(t) \equiv M_{nn}(t) \quad (21a)$$

можно выбрать произвольным образом. Аналогичное свойство имеет место для матрицы $Y(t)$, однако, разумеется, диагональные элементы этой матрицы

$$y_n(t) = Y_{nn}(t) \quad (21b)$$

определены единственным образом (см. ниже), коль скоро диагональные элементы $\mu_n(t)$ матрицы $M(t)$ заданы.

Теперь очевидно, что из определений (18) и (20) следуют формулы

$$\dot{U} = R\{\dot{Z} + [M, Z]\}R^{-1}, \quad \dot{V} = R\{\dot{Y} + [M, Y]\}R^{-1}, \quad (22)$$

поэтому матрицы эволюционного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) (15) принимают вид

$$\dot{Z} + [M, Z] = -c_1 - c_3Z + c_4ZY, \quad \dot{Y} + [M, Y] = c_2Y. \quad (23)$$

Здесь и ниже $[B, C]$ обозначает коммутатор двух матриц B, C :

$$[B, C] \equiv BC - CB. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим *диагональные* и *внедиагональные* элементы двух матричных ОДУ (23) по отдельности.

Диагональная часть первого из этих двух ОДУ (напомним, что матрица Z является *диагональной* (см. (18)) и мы обозначили через y_n диагональные элементы матрицы Y , см. (216)) имеет вид

$$\dot{z}_n = -c_1 - c_3z_n + c_4z_ny_n, \quad (25a)$$

откуда следует

$$y_n = \frac{\dot{z}_n + c_3z_n + c_1}{c_4z_n}. \quad (25b)$$

Внедиагональная часть первого из двух ОДУ (23) имеет покомпонентный вид

$$M_{nm}(z_m - z_n) = c_4z_nY_{nm}, \quad n \neq m, \quad (26a)$$

откуда следует

$$M_{nm} = -\frac{c_4z_n}{z_n - z_m}Y_{nm}, \quad n \neq m. \quad (26b)$$

Диагональная часть второго из двух ОДУ (23) имеет вид

$$\dot{y}_n = c_2y_n + \sum_{m=1, m \neq n}^N (Y_{nm}M_{mn} - M_{nm}Y_{mn}), \quad (27a)$$

поэтому с учетом (26b) получаем

$$\dot{y}_n = c_2y_n + c_4 \sum_{m=1, m \neq n}^N Y_{nm}Y_{mn} \frac{z_n + z_m}{z_n - z_m}. \quad (27b)$$

Прежде чем мы рассмотрим *внедиагональную* часть второго из двух матричных ОДУ (23), продифференцируем (25a). Используя затем соотношения (25b) и (27b), получим следующую систему N ОДУ второго порядка:

$$\ddot{z}_n = \frac{\dot{z}_n^2}{z_n} + c_1 \frac{\dot{z}_n}{z_n} + c_2 \dot{z}_n + c_2 c_3 z_n + c_1 c_2 + c_4^2 z_n \sum_{m=1, m \neq n}^N Y_{nm}Y_{mn} \frac{z_n + z_m}{z_n - z_m}. \quad (28)$$

Как обычно, при таком подходе мы интерпретируем ОДУ (28) как ньютоновские уравнения движения для координат z_n , которые характеризуются наличием в правых частях зависящих от скорости одночастичных и двухчастичных сил, которые, в свою очередь, характеризуются четырьмя константами c_1, c_2, c_3, c_4 и набором $N(N-1)$ “постоянных взаимодействий” $Y_{nm}Y_{mn}$. Кавычки здесь подчеркивают тот факт, что величины $Y_{nm}Y_{mn}$ не являются не зависящими от времени; действительно, временная эволюция $Y_{nm}(t)$ определяется остающимся набором $N(N-1)$ ОДУ, соответствующих *внедиагональной* части второго из двух матричных ОДУ (23), и имеет покомпонентный вид:

$$\dot{Y}_{nm} = c_2 Y_{nm} + \sum_{\ell=1}^N (Y_{n\ell} M_{\ell m} - M_{n\ell} Y_{\ell m}), \quad n \neq m. \quad (29a)$$

С помощью (21) и (266) эти $N(N-1)$ ОДУ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}_{nm}}{Y_{nm}} &= c_2 + \mu_m - \mu_n - \frac{c_4 z_n}{z_n - z_m} (y_n - y_m) + \\ &+ c_4 \sum_{k=1, k \neq n, m}^N \frac{Y_{nk} Y_{km}}{Y_{nm}} \left(\frac{z_n}{z_n - z_k} + \frac{z_k}{z_m - z_k} \right), \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (29b)$$

Наша следующая задача заключается в том, чтобы попытаться избавиться от величин Y_{nm} . Стандартный прием для этого заключается в том, чтобы найти, если возможно, выражение для этих $N(N-1)$ величин Y_{nm} в терминах N координат z_n и N скоростей $\dot{z}_n$, которые удовлетворяют этим $N(N-1)$ ОДУ (29b), возможно, благодаря уравнениям движения для координат $z_n(t)$ (см. (28)), которые следуют именно из этой подстановки и свободы в выборе N величин $\mu_n(t)$ (см. замечание 5).

Правдоподобная догадка о виде этой подстановки имеет вид

$$Y_{nm} = (y_n y_m)^{1/2}, \quad n \neq m, \quad (30)$$

где y_n в конце концов выражается через z_n и $\dot{z}_n$ с помощью (256). Подстановка его в (276) позволяет переписать систему N ОДУ следующим образом (после деления на y_n):

$$\frac{\dot{y}_n}{y_n} = c_2 + c_4 \sum_{k=1, k \neq n}^N y_k \frac{z_n + z_k}{z_n - z_k}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (31)$$

в то время как его подстановка в (29b) позволяет переформулировать данную систему $N(N-1)$ ОДУ как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{y}_n}{y_n} + \frac{\dot{y}_m}{y_m} \right) &= c_2 - \mu_n + \mu_m - c_4 (y_n - y_m) \frac{z_n}{z_n - z_m} + \\ &+ c_4 \sum_{k=1, k \neq n, m}^N y_k \left(\frac{z_n}{z_n - z_k} + \frac{z_k}{z_m - z_k} \right) = c_2 - \mu_n + \mu_m + c_4 \sum_{k=1, k \neq n}^N y_k \frac{z_n}{z_n - z_k} + \\ &+ c_4 \sum_{k=1, k \neq m}^N y_k \frac{z_k}{z_m - z_k}, \quad n \neq m, \quad n, m = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (32a)$$

Теперь легко видеть, что с учетом (31) последняя формула существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}\mu_n - \mu_m &= -\frac{c_3}{2} \sum_{k=1, k \neq n}^N y_k + \frac{c_3}{2} \sum_{k=1, k \neq m}^N y_k = \\ &= \frac{c_3}{2} (y_n - y_m), \quad n, m = 1, \dots, N.\end{aligned}\quad (326)$$

Этот набор $N(N-1)$ уравнений может с очевидностью быть удовлетворен путем задания $\mu_n = c_3 y_n / 2$, что мы можем сделать (см. замечание 5).

Таким образом, мы приходим к заключению, что подстановка (30) совместима с системой (296). Тогда легко видеть, что эта подстановка в (28) приводит, с учетом (256), к системе ньютоновских уравнений движения (3).

Это завершает доказательство главной части предложения 1. Остается обосновать выражение (6a) для матрицы $U(t)$, собственные значения которой определяют координаты $z_n(t)$. Для этого мы должны отождествить две матрицы $U(0)$ и A в терминах начальных условий $z_n(0)$, $\dot{z}_n(0)$ и показать, что выражения для $U(t)$, задаваемые в предложении 1, следуют из (17).

Выражение (7) для $U(0)$ совпадает с выражением (19a).

Аналогично покомпонентное выражение (8a) для $(N \times N)$ -матрицы A , демонстрирующей *диадический* характер, следует из ее определения (176), с использованием (20a) и с учетом (196), откуда следует $V(0) = Y(0)$, и из выражений для *диагональных* элементов $Y_{nn}(0) = y_n(0)$ (см. (216)) и для *внедиагональных* элементов $Y_{nm}(0) = [y_n(0)y_m(0)]^{1/2}$, $n \neq m$ (см. подстановку (30)), где $y_n(0)$ задается с помощью (256) при $t = 0$ (также с использованием определения r , см. (66)).

И, наконец, используя *диадический* характер матрицы A (см. (8)), из (17) легко получить, как объясняется в конце приложения А, выражение (6a), равно как и выражения (9a) и (96) для $U(t)$, приведенные в предложении 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обсудим состояния равновесия, $z_n(t) = \bar{z}_n$, $\dot{z}_n = 0$, динамической системы (3). Здесь N не зависящих от времени координат $\bar{z}_n$, разумеется, определены с точностью до перестановок, и для простоты мы полагаем, что $N \geq 3$. Они характеризуются алгебраической системой (см. (3))

$$(c_3 \bar{z}_n + c_1) \left\{ c_2 + \sum_{m=1, m \neq n}^N \left(c_3 + \frac{c_1}{\bar{z}_m} \right) \frac{\bar{z}_n + \bar{z}_m}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} \right\} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Теперь предположим, что только $N - \bar{N}$ координат $\bar{z}_n$, скажем последние, если таковые координаты имеются, приводят к тому, что первый множитель в левой части уравнения (33) обращается в нуль, поэтому

$$\bar{z}_n = -\frac{c_1}{c_3}, \quad n = \bar{N} + 1, \dots, N, \quad (34)$$

где $\bar{N}$ — произвольное целое число в интервале $2 \leq \bar{N} \leq N$. Это соответствует последней части замечания 3.

Что же касается оставшихся $\bar{N}$ координат $\bar{z}_n$, то они должны удовлетворять системе $\bar{N}$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1, m \neq n}^{\bar{N}} \left(c_3 + \frac{c_1}{\bar{z}_m} \right) \frac{\bar{z}_n + \bar{z}_m}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} = -c_2, \quad n = 1, \dots, \bar{N}. \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из (34) следует, что верхний предел суммы в левой части уравнений (35) равен $\bar{N}$, а не N .

Теперь выясним, каковы $\bar{N}$ решений $\bar{z}_m$, $m = 1, \dots, \bar{N}$, данной системы $\bar{N}$ алгебраических уравнений. Заметим для начала, что, суммируя (35) по n от 1 до $\bar{N}$, мы получаем (благодаря обращению в нуль двойной суммы по двум индексам n, m , когда выражение под знаком суммы меняет знак при замене $n \leftrightarrow m$)

$$\sum_{m,n=1, m \neq n}^{\bar{N}} \frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_m} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} = -\frac{c_2}{c_1}, \quad (36a)$$

поэтому (с учетом замены $n \leftrightarrow m$)

$$\sum_{m,n=1, m \neq n}^{\bar{N}} \left(\frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_m} - \frac{\bar{z}_m}{\bar{z}_n} \right) \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} = -2 \frac{c_2}{c_1}. \quad (36b)$$

Отсюда, поскольку $[(\bar{z}_n/\bar{z}_m) - (\bar{z}_m/\bar{z}_n)]/(\bar{z}_n - \bar{z}_m) \equiv 1/\bar{z}_n + 1/\bar{z}_m$, имеем

$$\bar{S} \equiv \sum_{n=1}^{\bar{N}} \frac{1}{\bar{z}_n} = -\frac{c_2}{(\bar{N}-1)c_1}. \quad (36b)$$

Теперь с учетом тождеств $\bar{z}_n + \bar{z}_m \equiv 2\bar{z}_n - (\bar{z}_n - \bar{z}_m) \equiv 2\bar{z}_m + (\bar{z}_n - \bar{z}_m)$ получаем

$$\sum_{m=1, m \neq n}^{\bar{N}} \frac{\bar{z}_n + \bar{z}_m}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} = 2\bar{z}_n \bar{\Sigma}_n - \bar{N} + 1, \quad n = 1, \dots, \bar{N}, \quad (37a)$$

$$\sum_{m=1, m \neq n}^{\bar{N}} \frac{1}{\bar{z}_m} \frac{\bar{z}_n + \bar{z}_m}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} = 2\bar{\Sigma}_n + \bar{S} - \frac{1}{\bar{z}_n}, \quad n = 1, \dots, \bar{N}, \quad (37b)$$

где

$$\bar{\Sigma}_n \equiv \sum_{m=1, m \neq n}^{\bar{N}} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m}, \quad n = 1, \dots, \bar{N}. \quad (37b)$$

Таким образом, уравнение (35) принимает вид

$$2\bar{z}_n(c_1 + c_3\bar{z}_n)\bar{\Sigma}_n = c_1 + \left[(\bar{N}-1)c_3 - \frac{\bar{N}-2}{\bar{N}-1}c_2 \right] \bar{z}_n. \quad (38)$$

Это наводит на мысль положить $c_3\bar{z}_n = c_1(x_n - 1)/2$ (см. (13)), так что (с учетом (37b)) последнее уравнение, а следовательно, и (35), принимают вид

$$2(1 - x_n^2) \sum_{m=1, m \neq n}^{\bar{N}} \frac{1}{x_n - x_m} = -2 + \beta(x_n - 1), \quad n = 1, \dots, \bar{N}, \quad (39)$$

где β определяется соотношением (14). Тогда из сравнения с уравнением (5.2а) из работы [9], которое имеет вид

$$2(1 - x_n^2) \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1}{x_n - x_m} = \alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_n, \quad (40)$$

где N чисел x_n представляют собой N нулей многочлена Якоби $P_N^{(\alpha, \beta)}(x)$, или, что эквивалентно, с уравнением (6.7.5) из работы [10], следует, что числа x_n представляют собой $\bar{N}$ нулей многочлена Якоби $P_{\bar{N}}^{(-2, \beta)}(x)$. Тогда справедливость (первой части) замечания 3 подтверждается уравнением (4.22.2) из работы [10], которое имеет вид

$$C_{k, \ell} P_k^{(-\ell, \beta)}(x) = C_{k+\beta, \ell} \left(\frac{x-1}{2} \right)^\ell P_{k-\ell}^{(\ell, \beta)}(x), \quad \ell, k \text{ — целые, } 1 \leq \ell \leq k, \quad (41)$$

где $C_{k, \ell}$ — биномиальный коэффициент, откуда следует, что из k нулей многочлена Якоби $P_k^{(-2, \beta)}(x)$ два имеют значение $x = 1$, а оставшиеся $k - 2$ нулей совпадают с $k - 2$ нулями многочлена Якоби $P_{k-2}^{(2, \beta)}(x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Покажем, как было получено решение задачи на начальные условия для матричного эволюционного уравнения (15) (см. (16) и (17), а также (6) и (9) в предложении 1).

Обоснование (16) очевидно и не требует усилий.

Далее удобно положить

$$U(t) = W(t) \exp \left\{ \int_0^t dt' [-c_3 I + c_4 V(t')] \right\}, \quad (42a)$$

откуда следует

$$W(0) = U(0), \quad (42б)$$

и с учетом (15) получаем

$$\dot{W}(t) = -c_1 \exp \left\{ - \int_0^t dt' [-c_3 + c_4 V(t')] \right\}. \quad (42в)$$

Заметим, что здесь и ниже мы используем свойство $[V(t'), V(t'')] = 0$, которое вытекает из (16). Отсюда следует возможность интерпретировать матрицу $V(t)$ как скаляр во всех вычислениях, не включающих другие матрицы (или только единичную матрицу I). Более того, из (16) получаем явное выражение

$$\int_0^t dt' [-c_3 + c_4 V(t')] = -rc_2 t + A[e^{c_2 t} - 1], \quad (43a)$$

где r — скалярная константа, а постоянная $(N \times N)$ -матрица A определяется соотношением (176). Таким образом,

$$\exp \left\{ \pm \int_0^t dt' [-c_3 + c_4 V(t')] \right\} = e^{\mp A} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pm A)^s e^{(s \mp r)c_2 t}}{s!}, \quad (43б)$$

откуда с учетом (42в) (при условии $r \neq -\sigma$, $\sigma = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$W(t) = W(0) - \frac{c_1}{c_2} e^A \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-A)^s \{[\tau(t)]^{s+r} - 1\}}{(s+r)s!}, \quad (43в)$$

где $\tau(t)$ определяется соотношением (66). Эта формула с учетом (42а), (42б), (43а) и определения (66) для $\tau(t)$ приводит к выражению (17а) для $U(t)$, которое тем самым доказано.

Теперь отметим, что эту формулу можно упростить, используя *диадический* характер матрицы A (см. (8)). Действительно, хорошо известно, что для любой скалярной аналитической функции $f(x)$ выполнено тождество (что следует из (86))

$$f(A) = f(0)I + \frac{f(a) - f(0)}{a} A. \quad (44)$$

Легко видеть, что путем многократного использования этого тождества выражение (17) для $U(t)$ приводится к (6).

В то же время, если $r = -\sigma$, $\sigma = 0, 1, 2, \dots$, то формула (43в) принимает вид

$$W(t) = W(0) - c_1 e^A \frac{(-A)^\sigma}{\sigma!} t - \frac{c_1}{c_2} e^A \sum_{s=0, s \neq \sigma}^{\infty} \frac{(-A)^s \{[\tau(t)]^{s-\sigma} - 1\}}{(s-\sigma)s!}, \quad (45а)$$

поэтому с учетом (42а), (42б), (43б) и определения $\tau(t)$ (см. (66))

$$\begin{aligned} U(t) = & U(0) \tau^\sigma e^{(\tau-1)A} - c_1 \tau^\sigma e^{\tau A} \frac{(-A)^\sigma}{\sigma!} t - \\ & - \frac{c_1}{c_2} \tau^\sigma e^{\tau A} \sum_{s=0, s \neq \sigma}^{\infty} \frac{(-A)^s \{[\tau(t)]^{s-\sigma} - 1\}}{(s-\sigma)s!}. \end{aligned} \quad (45б)$$

И снова, многократно используя тождество (44), получаем из этой формулы две формулы (9а) и (9б) из предложения 1, которые тем самым доказаны.

Список литературы

- [1] F. Calogero, *Physica D*, **152–153** (2001), 78–84.
- [2] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170:2** (1986), 370–405.
- [3] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, Lecture Notes in Physics. New Series m, **66**, Springer, Berlin, 2001.
- [4] F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [5] F. Calogero, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **17:3** (2010), 397–414.
- [6] Ф. Калоджеро, *ТМФ*, **167:3** (2011), 364–376.
- [7] F. Calogero, *SIGMA*, **7** (2011), 082, 35 pp., arXiv: 1108.4492.
- [8] D. Gomez-Ullate, M. Sommacal, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12:Suppl. 1** (2005), 351–362.
- [9] S. Ahmed, M. Bruschi, F. Calogero, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Nuovo Cimento B*, **49:2** (1979), 173–199.
- [10] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publ., **23**, AMS, Providence, RI, 1939.