Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Корриган, Взгляд на дефекты в интегрируемой квантовой теории поля, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 2, 271–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:02:45

© 2012 г.

Э. Корриган*

ВЗГЛЯД НА ДЕФЕКТЫ В ИНТЕГРИРУЕМОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дефекты присутствуют в природе повсюду, например в виде дислокаций, ударных потрясений, каналов или примесей различного типа, и их описание составляет важную часть любой физической теории. Однако можно задаться следующим вопросом: дефекты какого типа являются разрешенными и каковы должны быть их свойства, если требуется поддерживать интегрируемость в рамках интегрируемой теории поля в двумерном пространстве-времени? Рассмотрены некоторые идеи и вопросы, связанные с этой проблемой, включая примеры интегрируемых дефектов и удивительной особой роли, которую играют закон сохранения энергии-импульса и преобразования Беклунда, а также рассеяние солитонов на дефектах и некоторые интересные эффекты в рамках модели синус-Гордон, дефекты в интегрируемой квантовой теории поля и построение матриц прохождения. В заключение сделаны замечания по поводу алгебраических подходов и направлений будущих исследований.

Ключевые слова: интегрируемый, теория поля, дефект, синус-Гордон, Цицейка.

1. ИНТЕГРИРУЕМАЯ РАЗРЫВНОСТЬ

Начнем рассмотрение с единственной выбранной точки на оси x , скажем $x_0 = 0$, и обозначим поле слева от нее (при $x < x_0$) через u , а справа от нее (при $x > x_0$) – через v :

$$\dots \quad \text{---} \quad \overset{u(x,t)}{\underset{x_0}{\bullet}} \quad \text{---} \quad \overset{v(x,t)}{} \quad \dots$$

Полевые уравнения в двух разделенных областях имеют вид

$$\begin{aligned} \partial^2 u &= -\frac{\partial U}{\partial u}, & x < x_0, \\ \partial^2 v &= -\frac{\partial V}{\partial v}, & x > x_0. \end{aligned}$$

Если как U , так и V являются потенциалами интегрируемых моделей, то вопрос в действительности заключается в том, как поля u и v можно “сшить” друг с другом в точке x_0 так, чтобы интегрируемость сохранилась. Могут существовать несколько

*Department of Mathematics, University of York, York, United Kingdom.
E-mail: edward.corrigan@york.ac.uk

типов условий сшивки, причем каждый должен соответствовать дефекту конкретного типа. Более продвинутый вариант может также допускать некоторые степени свободы, привязанные к точке x_0 , которым позволяет взаимодействовать с обоими полями. Такую возможность мы рассмотрим ниже. Если дополнительной степени свободы нет, то будем говорить, что дефект имеет тип I, в противном случае будем говорить, что дефект имеет тип II. Поля u, v могут быть многокомпонентными, однако в настоящей работе мы по большей части рассматриваем однокомпонентные скалярные поля. Если имеется только один дефект, то мы помещаем его в точку $x_0 = 0$.

Естественный выбор (δ -примесь) мог бы заключаться в том, что два поля считаются непрерывными в точке $x = 0$, однако при этом допускается разрыв первой производной по пространственной переменной. Например, можно положить

$$u(0, t) = v(0, t), \quad u_x(0, t) - v_x(0, t) = \mu F(u(0, t)).$$

Хотя в данном случае и могут найтись интересные эффекты, интегрируемость на самом деле теряется [1]. Чтобы попытаться добиться хоть какого-то успеха, заметим, что, очевидно, имеется выделенная точка, трансляционная симметрия потеряна, а законы сохранения – по крайней мере некоторые из них (например, закон сохранения энергии-импульса) – нарушены, если только примесь не дает вклада в компенсирующие члены. Задачу можно переформулировать в терминах поиска подходящих компенсирующих членов, связанных с дефектом, которые могли бы обеспечить достаточное количество сохраняющихся величин, чтобы гарантировать интегрируемость.

Рассмотрим сначала вклады поля в энергию-импульс:

$$P^\mu = \int_{-\infty}^0 dx T^{0\mu}(u) + \int_0^\infty dx T^{0\mu}(v).$$

Можно ли, используя полевые уравнения, сделать так, чтобы было выполнено соотношение

$$\frac{dP^\mu}{dt} = -[T^{1\mu}(u)]_{x=0} + [T^{1\mu}(v)]_{x=0} = -\frac{dD^\mu(u, v)}{dt},$$

где правая часть зависит только от полей при $x = 0$? Если это возможно, то $P^\mu + D^\mu$ будет сохраняющейся величиной со вкладом дефекта, равным D^μ . Лишь несколько возможных условий сшивки (и потенциалов U, V на полюсах) позволяют добиться этого.

Заметим, что более естественно было бы рассматривать заряды высших спинов, и, действительно, исторически дело обстояло именно так [2]. Однако по причинам, которые остаются до конца не ясными, оказывается достаточным исследовать лишь сохранение импульса, поскольку из этого следуют связи, эквивалентные тем, которые получаются при других способах действий.

Сначала рассмотрим полевые вклады в энергию и вычислим

$$\frac{dP^0}{dt} = [u_x u_t]_{x=0} - [v_x v_t]_{x=0}.$$

Полагая $u_x = v_t + X(u, v)$, $v_x = u_t + Y(u, v)$, очевидно, получаем

$$\frac{dP^0}{dt} = u_t X - v_t Y.$$

Это выражение представляет собой полную производную по времени, если

$$X = -\frac{\partial D^0}{\partial u}, \quad Y = \frac{\partial D^0}{\partial v}$$

при некотором D^0 . Тогда

$$\frac{dP^0}{dt} = -\frac{dD^0}{dt}.$$

Только этого и следовало ожидать без наложения каких-либо дополнительных связей на $U(u)$, $V(v)$ или D^0 , коль скоро временная трансляция не должна нарушаться.

С другой стороны, для импульса имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP^1}{dt} &= -\left[\frac{u_t^2 + u_x^2}{2} - U(u)\right]_{x=0} + \left[\frac{v_t^2 + v_x^2}{2} - V(v)\right]_{x=0} = \\ &= \left[-v_t X + u_t Y - \frac{X^2 - Y^2}{2} + U - V\right]_{x=0} = -\frac{dD^1}{dt}. \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой полную производную по времени от функционала полей при $x = 0$, если первое слагаемое является точным дифференциалом, а второе обращается в нуль. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial D^0}{\partial u} = \frac{\partial D^1}{\partial v}, \quad Y = \frac{\partial D^0}{\partial v} = -\frac{\partial D^1}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 D^0}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 D^0}{\partial u^2}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^0}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D^0}{\partial v}\right)^2 = U - V, \end{aligned}$$

и эти условия налагают сильные ограничения. Каковы могут быть возможные комбинации U, V, D^0 ? Нетрудно проверить, что в действительности единственными возможностями являются поля модели синус-Гордон, Лиувилля, безмассовые и массивные свободные поля. Например, если $U(u) = m^2 u^2/2$ и $V(v) = m^2 v^2/2$, то D^0 оказывается равным

$$D^0(u, v) = \frac{m\sigma}{4}(u+v)^2 + \frac{m}{4\sigma}(u-v)^2,$$

где σ – свободный параметр.

Заметим, однако, что другая интегрируемая теория одного поля аналогичного типа – потенциал Цицейки (известный также как потенциал Буллоу–Додда, Михайлова–Жибера–Шабата, или потенциал аффинной $a_2^{(2)}$ -теории Тоды)

$$U(u) = e^u + 2e^{-u/2}$$

не является решением. В течение некоторого времени это представлялось несколько загадочным, и разгадка появится позже, когда будут исследованы дефекты более общего типа.

Заметим также, что имеется лагранжево описание дефектов такого типа (типа I) [2]:

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\mathcal{L}(u) + \delta(x)\left(\frac{uv_t - u_tv}{2} - D^0(u, v)\right) + \theta(x)\mathcal{L}(v).$$

2. СИНУС-ГОРДОН

Пусть u, v – поля модели синус-Гордон (с помощью масштабного преобразования сделаем параметры взаимодействия и массы равными единице). Тогда

$$D^0(u, v) = 2 \left(\sigma \cos \frac{u+v}{2} + \sigma^{-1} \cos \frac{u-v}{2} \right),$$

откуда мы имеем

$$\begin{aligned} \text{при } x < x_0 : \quad & \partial^2 u = -\sin u, \\ \text{при } x > x_0 : \quad & \partial^2 v = -\sin v, \\ \text{при } x = x_0 : \quad & u_x = v_t - \sigma \sin \frac{u+v}{2} - \sigma^{-1} \sin \frac{u-v}{2}, \\ & v_x = u_t + \sigma \sin \frac{u+v}{2} - \sigma^{-1} \sin \frac{u-v}{2}. \end{aligned}$$

Неожиданным образом в двух последних выражениях мы узнаем преобразование Беклунда, “замороженное” в точке $x = 0$, что уже является намеком на интегрируемость. Действительно, в этом случае можно придумать пару Лакса так, чтобы внедрить дефект и породить подходящим образом модифицированные сохраняющиеся заряды высших спинов. Тем самым система является интегрируемой стандартным образом [2].

Рассмотрим солитон, падающий из области $x < 0$. Условия сшивки (в общем случае) можно удовлетворить, лишь если аналогичный солитон выходит в область $x > 0$. Таким образом, используя подходящие выражения для стандартных солитонных решений, имеем

$$e^{iu/2} = \frac{1+iE}{1-iE}, \quad e^{iv/2} = \frac{1+izE}{1-izE}, \quad E = e^{ax+bt+c}, \quad a = \operatorname{ch} \theta, \quad b = -\operatorname{sh} \theta,$$

где z подлежит определению. Полезно также положить $\lambda = e^{-\eta}$, а затем найти z из условий сшивки:

$$z = \operatorname{cth} \left(\frac{\eta - \theta}{2} \right).$$

Этот результат имеет несколько интересных следствий [2], [3]:

если $\theta > \eta$, то $z < 0$, и это означает, что солитон возникает как антисолитон и конечное состояние будет содержать разрыв, равный 4π , при $x = 0$;

если $\theta = \eta$, то $z = \infty$, и возникающего солитона нет, это означает, что энергия-импульс солитона захвачены “дефектом”, как и его топологический заряд, что показывает разрыв, равный 2π , в конечном состоянии;

если $\theta < \eta$, то $z > 0$, и это означает, что характер солитона остается прежним и конечное состояние не приобретает дополнительного разрыва.

Полезно сделать еще несколько замечаний.

- Дефекты при $x = x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ведут себя независимым образом, i -й дефект дает вклад как множитель z_i в полную “задержку” $z = z_1 z_2 \dots z_n$.

- Каждая компонента мультисолитона подвергается воздействию по отдельности, так что самое большее одну из них можно “отфильтровать” (поскольку быстроты отдельных солитонных компонент должны быть различны).

• Коль скоро солитон может поглотиться, может ли начальная конфигурация при $u = 0$, $v = 2\pi$ распасться в солитон? По-видимому, потребуются методы квантовой механики для определения вероятности распада в течение определенного времени.

• Перечисленные выше свойства подсказывают, что дефект типа I можно использовать для управления солитонами (см., например, работу [4]).

• Распространение дефектов типа I на другие теории поля типа аффинной теории Тоды возможно только для моделей, основанных на серии $a_n^{(1)}$ [5], [6].

3. КЛАССИЧЕСКИЙ ДЕФЕКТ ТИПА II

Поскольку не во всех теориях поля типа аффинной теории Тоды может присутствовать дефект типа I, естественно попытаться добавить дополнительные степени свободы к самому дефекту [7]. Например, рассмотрим две релятивистские теории поля с полями u и v и следующим образом добавим $\lambda(t)$ в том месте, где расположен дефект:

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\mathcal{L}_u + \theta(x)\mathcal{L}_v + \delta(x)(2q\lambda_t - D^0(\lambda, p, q)),$$

где

$$q = \frac{u-v}{2} \Big|_{x=0}, \quad p = \frac{u+v}{2} \Big|_{x=0}.$$

Тогда обычным путем получаем уравнения движения

$$\partial^2 u = -\frac{\partial U}{\partial u}, \quad x < 0, \quad \partial^2 v = -\frac{\partial V}{\partial v}, \quad x > 0,$$

вместе с условиями наличия дефекта в точке $x = 0$:

$$2q_x = -D_p^0, \quad 2p_x - 2\lambda_t = -D_q^0, \quad 2q_t = -D_\lambda^0.$$

Заметим, что если бы потенциала дефекта не было, то λ играла бы роль лагранжева множителя.

Как и ранее, рассмотрим импульс

$$P^1 = - \int_{-\infty}^0 dx u_t u_x - \int_0^{\infty} dx v_t v_x$$

и будем искать такой функционал $D^1(u, v, \lambda)$, что $P_t^1 \equiv -D_t^1$. Тогда $P^1 + D^1|_{x=0}$ будет полным сохраняющимся импульсом системы. Это приводит к следующим условиям связи для U , V и D^1 :

$$D_p^0 = D_\lambda^1, \quad D_\lambda^0 = D_p^1, \quad D_\lambda^1 D_q^0 - D_q^1 D_\lambda^0 = 2(U - V),$$

откуда следует, что

$$D^0 = f(p + \lambda, q) + g(p - \lambda, q), \quad D^1 = f(p + \lambda, q) - g(p - \lambda, q),$$

где

$$f\lambda g_q - g\lambda f_q = U(u) - V(v).$$

Последнее равенство также представляет собой мощное ограничение, поскольку левая его часть зависит от λ , тогда как правая часть – нет. Однако на этот раз не

совсем ясно, каков полный набор решений. Тем не менее можно, разумеется, выбрать f, g так, чтобы потенциалы U, V были потенциалами модели синус-Гордон, Лиувилля, Цицейки или свободного массивного или безмассового поля, т.е. любыми из полного набора потенциалов теорий одного релятивистского интегрируемого поля. Например, для потенциала Цицейки

$$U(u) = e^u + 2e^{-u/2} - 3, \quad V(v) = e^v + 2e^{-v/2} - 3$$

соответствующий потенциал дефекта имеет вид

$$D^0 = 2\sigma(e^{(p+\lambda)/2} + e^{-(p+\lambda)/4}(e^{q/2} + e^{-q/2})) + \frac{1}{\sigma}(8e^{-(p-\lambda)/4} + e^{(p-\lambda)/2}(e^{q/2} + e^{-q/2})^2).$$

Однако заметим, что вытекающие отсюда условия наличия дефекта не являются “замороженным” преобразованием Беклунда. Более того, другие многокомпонентные аффинные теории поля Тоды могут поддерживать дефекты типа II, хотя и не все (не поддерживают дефекты потенциалы, основанные на корневых данных, соответствующих диаграммам Каца–Дынкина, которые содержат простой корень, связанный с тремя соседними корнями, как в серии e). Поэтому мы можем предположить, что должен существовать лагранжиан типа III, который еще ждет своего открытия. В модели синус-Гордон дефект типа II также является новинкой (в том смысле, что он на самом деле представляет собой два “слившихся” дефекта типа I), и соответствующие условия наличия дефекта не вполне совпадают с “замороженным” преобразованием Беклунда даже в этом случае.

4. ДЕФЕКТЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

На основании фактов, взятых из классической теории рассеяния солитона на дефекте, можно ожидать следующего.

- Рассеяние солитона на дефекте представляет собой чистое прохождение, совместное с S -матрицей, отвечающей части, которая не содержит дефект; при этом топологический заряд будет сохраняться, однако может произойти его обмен с дефектом.

- Для дефектов каждого типа может существовать несколько типов матриц прохождения (например, в случае модели синус-Гордон можно ожидать, что имеются две различные матрицы прохождения, поскольку топологический заряд на дефекте может измениться только на ± 2 при прохождении солитона/антисолитона).

- Не все матрицы прохождения непременно должны быть унитарными: в случае модели синус-Гордон одна такая матрица может оказаться резонансом другой.

Далее мы должны выяснить, как понимать различные типы дефектов, ансамбли дефектов, рассеяние дефекта на дефекте, слияние дефектов и т.д.

Наиболее существенной величиной является “матрица прохождения”, которая обозначается как $T_{a\alpha}^{b\beta}(\theta, \eta)$, $a + \alpha = b + \beta$, где индексы α, β и a, b относятся соответственно к дефекту и к солитону, а η – набор параметров дефекта. Помимо всяких общих соображений, таких как унитарность (где это уместно) или свойство кроссинг-симметрии, матрица прохождения должна быть совместна с S -матрицей, отвечающей части, которая не содержит дефект, что подсказывает нам следующие алгебраические связи [8]:

$$S_{ab}^{cd}(\Theta)T_{d\alpha}^{f\beta}(\theta_a)T_{c\beta}^{e\gamma}(\theta_b) = T_{b\alpha}^{d\beta}(\theta_b)T_{a\beta}^{c\gamma}(\theta_a)S_{cd}^{ef}(\Theta).$$

Здесь $\Theta = \theta_a - \theta_b$, а суммы следует понимать как суммы по внутренним повторяющимся индексам β, c, d .

Вообще говоря, для аффинных теорий поля Тоды, основанных на корневых данных алгебры Ли g , мы ожидаем наличия нескольких различных матриц прохождения (все они бесконечномерные). Эти матрицы могут быть пронумерованы элементами соответствующей решетки весов, различающимися на корни. Таким образом, две возможности для модели синус-Гордон, пронумерованные четными и нечетными целыми числами, можно с большим правом считать пронумерованными соответственно целыми или полужелыми нечетными спинами.

4.1. Решение для дефекта типа I. Для модели синус-Гордон решение было найдено некоторое время назад Конигом и Леклером (КЛ) [9]. Чтобы описать их результат, напомним сначала, что S -матрица Замолотчикова [10] зависит от быстрой θ и параметра взаимодействия β , отвечающего части, которая не содержит дефект, посредством соотношений

$$x = e^{\gamma\theta}, \quad q = e^{i\pi\gamma}, \quad \gamma = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1;$$

кроме того, полезно определить переменную $Q = e^{4i\pi^2/\beta^2} = \sqrt{-q}$. Тогда решение КЛ, записанное в виде (2×2) -матрицы с солитонными индексами, будет иметь вид

$$T_{\alpha\alpha}^{b\beta}(\theta) = f(q, x) \begin{pmatrix} Q^\alpha \delta_\alpha^\beta & q^{-1/2} e^{\gamma(\theta-\eta)} \delta_\alpha^{\beta-2} \\ q^{-1/2} e^{\gamma(\theta-\eta)} \delta_\alpha^{\beta+2} & Q^{-\alpha} \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix},$$

где функция $f(q, x)$ не определяется единственным образом, но для унитарной матрицы прохождения она должна удовлетворять условиям

$$\bar{f}(q, x) = f(q, qx), \quad f(q, x)f(q, qx) = \frac{1}{1 + e^{2\gamma(\theta-\eta)}}.$$

“Минимальное” решение КЛ этих уравнений имеет вид

$$f(q, x) = \frac{e^{i\pi(1+\gamma)/4}}{1 + ie^{\gamma(\theta-\eta)}} \frac{r(x)}{\bar{r}(x)},$$

где удобно положить $z = i\gamma(\theta - \eta)/2\pi$ и

$$r(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\gamma + 1/4 - z)\Gamma((k+1)\gamma + 3/4 - z)}{\Gamma((k+1/2)\gamma + 1/4 - z)\Gamma((k+1/2)\gamma + 3/4 - z)}.$$

Пусть $\theta > 0$. Заметим следующее: соблазнительно предположить, что параметр η (возможно, перенормированный) является по существу тем же параметром, который появлялся в модели дефектов типа I, с учетом видимого сходства со свойствами классического рассеяния солитона на дефекте [3]. В частности:

- если $\eta < 0$ или $\theta > \eta > 0$, то преобладают внедиагональные элементы;
- если $\theta < \eta$, $\eta > 0$, то преобладают диагональные элементы.

Значение скорости $\theta = \eta$, которое имеет специальный смысл в классической картине, не является в данном случае таким уж специальным. Тем не менее функция $f(q, x)$ имеет простой полюс вблизи этой точки, при

$$\theta = \eta - \frac{i\pi}{2\gamma} \rightarrow \eta, \quad \beta \rightarrow 0,$$

и этот полюс подобен резонансу с комплексной энергией

$$E = m_s \operatorname{ch} \theta = m_s \left(\operatorname{ch} \eta \cos \frac{\pi}{2\gamma} - i \operatorname{sh} \eta \sin \frac{\pi}{2\gamma} \right).$$

Очевидно, он имеет “ширину”, пропорциональную $\sin(\pi/2\gamma)$, которая стремится к нулю при $\beta \rightarrow 0$. Тот факт, что солитоны и антисолитоны воспринимаются по-разному в диагональных элементах решения КЛ, также связан с частью лагранжиана, линейной по временным производным – это характерное свойство, которое наблюдается в рамках квазиклассического подхода [3].

Отметим, что S -матрица Замолотчикова имеет “бризерные” полюсы, соответствующие связанным состояниям солитон–антисолитон при

$$\Theta = i\pi \left(1 - \frac{n}{\gamma} \right), \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max} < \gamma,$$

и можно использовать метод бутстрапа, чтобы вычислить множители прохождения для бризеров. Для самого легкого бризера результат имеет вид

$$T(\theta) = -i \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\theta - \eta}{2} - \frac{i\pi}{4} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\theta - \eta}{2} + \frac{i\pi}{4} \right)},$$

что в точности совпадает с множителем прохождения для плоской волны, набегающей на дефект, в линеаризованной модели синус-Гордон.

4.2. Решение для дефекта типа II. Кроме решения КЛ, существует еще один, более общий, набор решений квадратичных условий совместности для матрицы прохождения [11]:

$$T_{\alpha\alpha}^{b\beta}(\theta) = \rho(\theta) \begin{pmatrix} (a_+ Q^\alpha + a_- Q^{-\alpha} x^2) \delta_\alpha^\beta & x(b_+ Q^\alpha + b_- Q^{-\alpha}) \delta_\alpha^{\beta-2} \\ x(c_+ Q^\alpha + c_- Q^{-\alpha}) \delta_\alpha^{\beta+2} & (d_+ Q^\alpha x^2 + d_- Q^{-\alpha}) \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix},$$

где $x = e^{\gamma\theta}$, а свободные постоянные удовлетворяют двум условиям связи

$$a_\pm d_\pm - b_\pm c_\pm = 0.$$

На эти величины и на $\rho(\theta)$ далее наложены условия кроссинг-симметрии и унитарности. Подробности можно найти в работе [11], здесь уместно сделать несколько замечаний.

- При некотором выборе параметров аналогия с классическим рассеянием подсказывает, что описывается дефект типа II.

- При $a_- = d_+ = 0$ и $b_+ = c_- = 0$ или $b_- = c_+ = 0$ (после преобразования подобия) этот дефект сводится к решению типа I.

- Для некоторых других значений параметров дефект сводится к прямой сумме S -матрицы Замолотчикова как таковой и двух бесконечномерных частей; это подсказывает, что дефект типа II сам по себе аналогичен солитону.

4.3. Решение для модели Цицейки. Напомним, что квантовая теория поля Цицейки слегка отличается от своего классического варианта тем, что в ней присутствуют солитоны с вырожденной массой и зарядами ± 1 и 0 , рассеяние которых описывается S -матрицей Изергина–Корепина–Смирнова [12]. Используя последнюю и решая соотношения совместности, получаем [13]

$$T_{a\alpha}^{b\beta}(\theta) = \rho(\theta) \begin{pmatrix} (\varepsilon^2 q^{2\alpha} + \tau^2 q^{-2\alpha} x) \delta_\alpha^\beta & \varepsilon \mu(\alpha) \delta_\alpha^{\beta-1} & M(\alpha) \delta_\alpha^{\beta-2} \\ \tau \lambda(\alpha) x \delta_\alpha^{\beta+1} & (\tilde{\tau} \varepsilon + \tau \tilde{\varepsilon} x) \delta_\alpha^\beta & \tilde{\tau} \mu(\alpha) q^{-2\alpha-1} \delta_\alpha^{\beta-1} \\ L(\alpha) x \delta_\alpha^{\beta+2} & \tilde{\varepsilon} q^{2\alpha-1} \lambda(\alpha) x \delta_\alpha^{\beta+1} & (\tilde{\varepsilon}^2 q^{2\alpha} x + \tilde{\tau}^2 q^{-2\alpha}) \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix},$$

где

$$M(\alpha) = \mu(\alpha) \mu(\alpha + 1) \frac{q^{-2\alpha-1}}{1 + q^2}, \quad L(\alpha) = \lambda(\alpha) \lambda(\alpha - 1) \frac{q^{2\alpha-1}}{1 + q^2},$$

$$\mu(\alpha) \lambda(\alpha + 1) = (q + q^{-1})(\tau \tilde{\tau} q^{-2\alpha-1} + \varepsilon \tilde{\varepsilon} q^{2\alpha+1}), \quad q = e^{4i\pi^2/\beta^2}.$$

Как и выше, общий множитель и некоторые комбинации постоянных подчинены условиям связи, следующим из кроссинг-симметрии и самосогласованного бутстрапа (в этом случае модель не обладает унитарным рассеянием, но каждый солитон является связанным состоянием двух других). Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho(\theta) \rho(\theta i\pi) (\tilde{\tau} \varepsilon + \tau \tilde{\varepsilon} q^{-4} x) (\tilde{\tau} \varepsilon - \tau \tilde{\varepsilon} q^{-2} x) &= 1, \\ \rho(\theta) &= (\tilde{\tau} \varepsilon + \tau \tilde{\varepsilon} x) \rho(\theta + i\pi/3) \rho(\theta - i\pi/3). \end{aligned}$$

Это решение выглядит сложным, но к нему можно подойти с другой стороны, как было предложено в работе [14], и использовать его в случае модели синус-Гордон для воспроизведения описанной выше матрицы прохождения типа II. Идея заключается в том, чтобы ассоциировать матрицу прохождения со сплетающим оператором, который связывает два копроизведения в конечномерном и в бесконечномерном представлениях борелевской подалгебры “квантованной” аффинной алгебры $U_q(a_2^{(2)})$. Солитоны относятся к конечномерному представлению, а бесконечномерное представление описывает дефект. Более того, удобно описывать бесконечномерное представление в терминах операторов, создающих и уничтожающих топологический заряд.

Прежде всего, может оказаться полезным краткое введение в алгебру. Если α_0 – кратчайший корень, то $a_2^{(2)}$ -матрица Картана имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Квантованная алгебра $U_q(a_2^{(2)})$, введенная Дринфельдом и Джимбо [15], имеет шесть генераторов $\{X_1^\pm, X_0^\pm, K_1, K_0\}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [K_1, K_0] &= 0, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad i = 0, 1, \\ K_0 X_0^\pm K_0^{-1} &= q^{\pm 4} X_0^\pm, \quad [X_0^+, X_0^-] = \frac{K_0^2 - K_0^{-2}}{q^4 - q^{-4}}, \\ K_1 X_1^\pm K_1^{-1} &= q^{\pm 1} X_1^\pm, \quad [X_1^+, X_1^-] = \frac{K_1^2 - K_1^{-2}}{q - q^{-1}}, \\ K_1 X_0^\pm K_1^{-1} &= q^{\mp 2} X_0^\pm, \quad K_0 X_1^\pm K_0^{-1} = q^{\mp 2} X_1^\pm, \quad [X_1^\pm, X_0^\mp] = 0, \end{aligned}$$

а также соотношениям Серра

$$\sum_{k=0}^5 (-1)^k \begin{bmatrix} 5 \\ k \end{bmatrix}_q (X_1^\pm)^{5-k} X_0^\pm (X_1^\pm)^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^k \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}_{q^4} (X_0^\pm)^{2-k} X_1^\pm (X_0^\pm)^k = 0.$$

Копроизведения Δ и Δ' определены как

$$\begin{aligned} \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, & \Delta(X_i^\pm) &= X_i^\pm \otimes K_i^{-1} + K_i \otimes X_i^\pm, \\ \Delta'(K_i) &= \Delta(K_i), & \Delta'(X_i^\pm) &= K_i^{-1} \otimes X_i^\pm + X_i^\pm \otimes K_i, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Фундаментальное представление этой алгебры является трехмерным, и сплетающий оператор между двумя копроизведениями трехмерных представлений есть S -матрица.

Для наших целей потребуется также бесконечномерное представление борелевской подалгебры, порожденной $\{X_1^+, X_0^+, K_1, K_0\}$; его удобно реализовать, используя пару операторов рождения и уничтожения, аналогичных введенным двадцать лет назад в работах [16]. Эти операторы определяются как

$$a|j\rangle = F(j)|j-1\rangle, \quad \hat{a}|j\rangle = |j+1\rangle, \quad N|j\rangle = j|j\rangle, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $F(j)$ не должна обращаться в нуль при любом j , поскольку j представляет собой топологический заряд. Кроме того, имеем

$$a\hat{a} = F(N+1), \quad \hat{a}a = F(N), \quad aG(N) = G(N+1)a, \quad \hat{a}G(N) = G(N-1)\hat{a},$$

где $G(N)$ – любая функция от оператора “числа частиц”. Нет необходимости настаивать на выполнении соотношения сопряжения $\hat{a} = a^\dagger$. С учетом изложенного выше возьмем генераторы борелевской подалгебры в виде

$$X_1^+ = \hat{a}, \quad X_0^+ = aa, \quad K_1 = \kappa_1 q^N, \quad K_0 = \kappa_0 q^{-2N},$$

где κ_0 и κ_1 – константы. Такой выбор удовлетворяет борелевской подалгебре, а соотношения Серра требуют, чтобы были выполнены равенства

$$\sum_{k=0}^5 (-1)^k \begin{bmatrix} 5 \\ k \end{bmatrix}_q F(N+k)F(N+k+1) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^k \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}_{q^4} F(N+2k) = 0,$$

что, в свою очередь, требует выполнения равенств

$$\hat{a}a = F(N) = (b_1(-1)^N + c_1)q^{-2N} + (b_2(-1)^N + c_2)q^{2N}, \quad b_1c_2 = b_2c_1.$$

Наконец, необходимо использовать однородную градуировку [17], а именно

$$E_1 = X_1^+, \quad F_1 = X_1^-, \quad E_0 = xX_0^+, \quad F_0 = x^{-1}X_0^-.$$

Тогда матрица прохождения T сплетает бесконечномерное представление в пространстве $\mathcal{V}$ и трехмерное представление в пространстве V :

$$T(z/x): \mathcal{V}_z \otimes V_x \rightarrow \mathcal{V}_z \otimes V_x.$$

Это можно получить путем решения линейного уравнения $T\Delta(b) = \Delta'(b)T$ (для любого элемента b из борелевской подалгебры), откуда

$$T = \begin{pmatrix} a'q^{-2N} + a''q^{2N} & kq^N a & vaa \\ jq^{-N}\hat{a} & b & iq^{-N}a \\ w\hat{a}\hat{a} & lq^N\hat{a} & c'q^{2N} + c''q^{-2N} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты следует выбрать подходящим образом [13].

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Нет причин, по которым дефекты типа I или типа II должны быть статичными. В самом деле, движущиеся дефекты, относящиеся к типу I, исследовались в рамках теории синус-Гордон [3]; если имеется несколько дефектов, движущихся с разными скоростями, то их классическое рассеяние согласуется с их взаимодействиями с солитонами благодаря “перестановочной теореме” для повторных преобразований Беклунда. С другой стороны, квантовое рассеяние таких дефектов еще не полностью исследовано, хотя имеется кандидат на роль S -матрицы, совместной с солитонной матрицей прохождения [3], [14], [18]. Существует много интересных свойств, присущих дефектам в теории синус-Гордон, которые рассматривались другими исследователями (см., например, работы [19], [20]), а также дефектам, которые могут возникать в рамках расширений теории синус-Гордон, включая фермионы или анализ взаимосвязи с массивной моделью Тирринга [21], или в рамках других интегрируемых теорий поля нетодовского типа, таких как НУШ, КдФ или мКдФ [22]. Дефекты можно строить в рамках $a_r^{(1)}$ -серии аффинных моделей Тоды [5], а матрицы прохождения были выписаны для дефектов как типа I, так и типа II в работах [6], [13]. Для всех аффинных квантовых групп можно построить обобщенные представления борелевских подалгебр в терминах операторов рождения и уничтожения [13], хотя имеются альтернативные подходы, которые возникают в других приложениях, например представления Q -оператора Бакстера в контексте решаемых спиновых цепочек [23].

Благодарности. Автор выражает благодарность организаторам Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS–2011) за возможность представить настоящую работу, а также Питеру Баукоку и Кристине Самбон за длительное и приятное сотрудничество, Роберту Вестону за несколько поучительных бесед. Автор благодарит UK Engineering and Physical Sciences Research Council за финансовую поддержку (грант EP/F026498/1).

Список литературы

- [1] R. H. Goodman, P. J. Holmes, M. I. Weinstein, *Physica D*, **161**:1–2 (2002), 21–44.
- [2] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:suppl.2 (2004), 82–91, arXiv: hep-th/0305022.

- [3] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP*, **08** (2005), 023, 35 pp., arXiv: hep-th/0506169.
- [4] E. Corrigan, C. Zambon, *J. Phys. A*, **37**:37 (2004), L471–L477, arXiv: hep-th/0407199.
- [5] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP*, **01** (2004), 056, 25 pp., arXiv: hep-th/0401020.
- [6] E. Corrigan, C. Zambon, *JHEP*, **07** (2007), 001, 38 pp., arXiv: 0705.1066.
- [7] E. Corrigan, C. Zambon, *J. Phys. A*, **42**:47 (2009), 475203, 20 pp., arXiv: 0908.3126.
- [8] G. Delfino, G. Mussardo, P. Simonetti, *Phys. Lett. B*, **328**:1–2 (1994), 123–129, arXiv: hep-th/9403049; *Nucl. Phys. B*, **432**:3 (1994), 518–550, arXiv: hep-th/9409076.
- [9] R. Konik, A. LeClair, *Nucl. Phys. B*, **538**:3 (1999), 587–611, arXiv: hep-th/9703085.
- [10] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.*, **120**:2 (1979), 253–291.
- [11] E. Corrigan, C. Zambon, *J. Phys. A*, **43**:34 (2010), 345201, 17 pp., arXiv: 1006.0939.
- [12] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **79**:3 (1981), 303–316; F. A. Smirnov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:8 (1991), 1407–1428.
- [13] E. Corrigan, C. Zambon, *Nucl. Phys. B*, **848**:3 (2011), 545–577, arXiv: 1012.4186.
- [14] R. Weston, *An algebraic setting for defects in the XXZ and sine-Gordon models*, arXiv: 1006.1555.
- [15] M. Jimbo, “Introduction to the Yang–Baxter equation”, *Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics*, v. II, Advanced Series in Mathematical Physics, **17**, eds. C. N. Yang, M.-L. Ge, World Scientific, River Edge, NJ, 1994, 153–176.
- [16] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22**:21 (1989), 4581–4588; L. C. Biedenharn, *J. Phys. A*, **22**:18 (1989), L873–L878.
- [17] C. J. Efthimiou, *Nucl. Phys. B*, **398**:3 (1993), 697–740.
- [18] H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, K. S. Nirov, A. V. Razumov, *J. Phys. A*, **43**:41 (2010), 415208, 35 pp., arXiv: 1004.5342.
- [19] I. Habibullin, A. Kundu, *Nucl. Phys. B*, **795**:3 (2008), 549–568, arXiv: 0709.4611.
- [20] Z. Bajnok, Zs. Simon, *Nucl. Phys. B*, **802**:3 (2008), 307–329, arXiv: 0712.4292; F. Nemes, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:23 (2010), 4493–4509, arXiv: 0909.3268.
- [21] J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, *J. Phys. A*, **39**:23 (2006), 7471–7483, arXiv: hep-th/0601014; A. R. Aguirre, J. F. Gomes, L. H. Ymai, A. H. Zimerman, *JHEP*, **02** (2011), 017, 21 pp., arXiv: 1012.1537.
- [22] E. Corrigan, C. Zambon, *Nonlinearity*, **19**:6 (2006), 1447–1469, arXiv: nlin/0512038; V. Caudrelier, *Internat. J. Geom. Methods Modern Phys.*, **5**:7 (2008), 1085–1108.
- [23] V. V. Bazhanov, A. N. Hibberd, S. M. Khoroshkin, *Nucl. Phys. B*, **622**:3 (2002), 475–547, arXiv: hep-th/0105177; T. Kojima, *J. Phys. A*, **41**:35 (2008), 355206, 16 pp., arXiv: 0803.3505.