Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Забродин, Управляющий T -оператор для вершинных моделей с тригонометрическими R -матрицами как классическая τ -функция, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 59–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:23:17

© 2013 г.

А. В. Забродин^{*†‡}

УПРАВЛЯЮЩИЙ T -ОПЕРАТОР ДЛЯ ВЕРШИННЫХ МОДЕЛЕЙ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ R -МАТРИЦАМИ КАК КЛАССИЧЕСКАЯ τ -ФУНКЦИЯ

Недавно предложенная конструкция управляющего T -оператора применяется к интегрируемым вершинным моделям и связанным с ними квантовым спиновым цепочкам с тригонометрическими R -матрицами. Управляющий T -оператор – это производящая функция коммутирующих трансфер-матриц интегрируемых вершинных моделей, зависящая от бесконечного набора параметров. В то же время он оказывается τ -функцией интегрируемой иерархии классических солитонных уравнений в том смысле, что удовлетворяет тем же билинейным уравнениям Хироты. Охарактеризован класс решений уравнений Хироты, которые соответствуют собственным значениям управляющего T -оператора, и обсуждается их связь с классической системой частиц Рейсенарса–Шнайдера.

Ключевые слова: интегрируемые вершинные модели, R -матрица, трансфер-матрица, τ -функция.

DOI: 10.4213/tmf8373

1. ВВЕДЕНИЕ

Управляющий T -оператор был недавно введен в работе [1]. Он представляет собой производящую функцию коммутирующих трансфер-матриц интегрируемых вершинных моделей и связанных с ними квантовых спиновых цепочек, которая объединяет в одно коммутирующее семейство трансфер-матрицы на всех уровнях вложенных анзацев Бете и Q -операторы Бакстера. В работе [1] было также доказано, что управляющий T -оператор как функция бесконечного набора вспомогательных параметров (один из которых является обычным спектральным параметром) удовлетворяет той же иерархии билинейных уравнений Хироты, что и классическая τ -функция. Поскольку операторнозначные производящие функции коммутируют друг с другом при всех значениях вспомогательных параметров, проблемы их упорядочения в билинейных уравнениях не возникает.

^{*}Институт биохимической физики РАН, Москва, Россия

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: zabrodin@itep.ru

[‡]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

Аналогия между квантовыми трансфер-матрицами и классическими τ -функциями была впервые отмечена в работе [2] (см. также статьи [3]), где введена дискретная интегрируемая динамика в пространстве коммутирующих интегралов движения квантовой интегрируемой модели. Эта классическая динамика отождествлена с дискретным трехчленным уравнением Хироты со специальными граничными условиями. Показано, что диагонализация трансфер-матриц с помощью техники вложенных анзацев Бете эквивалентна “раздевающей” цепочке преобразований Беклунда для дискретного уравнения Хироты. Позднее этот подход был распространен на суперсимметричные интегрируемые модели [4]. Существенный дальнейший шаг был сделан в важной работе [5], где для обобщенных квантовых спиновых цепочек с рациональными $GL(N)$ -инвариантными R -матрицами построена операторная реализация беклундовского потока, описывающего “раздевающий” процесс. В действительности в этой конструкции управляющий T -оператор уже неявно использовался. Более явное и более общее определение было дано в работе [1].

В настоящей статье мы приводим обзор конструкции из работы [1], стараясь избегать технических деталей. Здесь мы занимаемся классом интегрируемых решеточных моделей статистической механики с тригонометрическими R -матрицами. Основное утверждение заключается в том, что управляющий T -оператор для этих моделей является τ -функцией классической иерархии мКП. Мы также описываем класс решений уравнений Хироты, которые соответствуют собственным значениям управляющего T -оператора, и делаем явной тесную связь с классической системой частиц Рейсенарса–Шнайдера [6], которая появляется как динамическая система для нулей собственных значений управляющего T -оператора. Эквивалентным образом такая связь возникает из рассмотрения функции Бейкера–Ахиезера для системы Рейсенарса–Шнайдера; эта функция порождает алгебру коммутирующих операторов (трансфер-матриц) вершинной модели (алгебру Бете). Как хорошо известно, модель Рейсенарса–Шнайдера содержит систему частиц Калоджеро–Мозера в качестве предельного случая. В этой связи отметим, что аналогичная связь между квантовой моделью Годена (которую можно рассматривать как вырождение квантовых спиновых цепочек или вершинных моделей с рациональными R -матрицами) и классической системой Калоджеро–Мозера была найдена в работах [7] из других соображений.

2. ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ

Мы рассматриваем обобщенные квантовые интегрируемые модели с тригонометрической R -матрицей. Простейшая такая R -матрица – это оператор в $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ вида

$$\begin{aligned} R(u) = & (e^{\gamma(u+1)} - e^{-\gamma(u+1)}) \sum_{a=1}^N e_{aa} \otimes e_{bb} + (e^{\gamma u} - e^{-\gamma u}) \sum_{1 \leq a \neq b \leq N} e_{aa} \otimes e_{bb} + \\ & + (e^{\gamma} - e^{-\gamma}) \sum_{1 \leq a \neq b \leq N} e^{\text{sign}(b-a)\gamma u} e_{ab} \otimes e_{ba}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $u \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а e_{ab} обозначает матрицу размера $N \times N$, в которой в положении (a, b) стоит единица, а в других местах – нули. Мы предполагаем, что параметр деформации (анизотропии) γ таков, что $q = e^{\gamma}$ не является

корнем из единицы. Следуя традиции, мы называем эту R -матрицу *тригонометрической*, хотя ее коэффициенты – гиперболические функции от u , например $\text{sh } \gamma u$.

Пусть $V_i = \mathbb{C}^N$ – копии пространства $\mathbb{C}^N$, тогда через $R_{ij}(u)$ обозначим R -матрицу, действующую в пространстве $V_i \otimes V_j$. R -матрица (2.1) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}(u_1 - u_2)R_{13}(u_1 - u_3)R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3)R_{13}(u_1 - u_3)R_{12}(u_1 - u_2), \quad (2.2)$$

где обе части представляют собой операторы в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Для любой диагональной матрицы g размера $N \times N$ положим $g_1 = g \otimes \mathbb{I}$, $g_2 = \mathbb{I} \otimes g$, тогда R -матрица коммутирует с $g_1 g_2$:

$$R_{12}(u)g_1 g_2 = g_1 g_2 R_{12}(u). \quad (2.3)$$

Мы будем называть это свойство g -инвариантностью R -матрицы.

Фиксируем диагональную матрицу $g = \text{diag}(p_1, \dots, p_N)$. Будем называть ее матрицей твиста. Далее мы предполагаем, что элементы $p_i \in \mathbb{C}$ находятся в общем положении, т.е. $p_i/p_j \neq e^{2\gamma n}$ для любых $i \neq j$ и любого целого n . Трансфер-матрица вершинной модели с твистованными граничными условиями и параметрами неоднородности u_i на каждом узле определяется как

$$T(u) = \text{tr}_0(R_{10}(u - u_1)R_{20}(u - u_2) \dots R_{L0}(u - u_L)g); \quad (2.4)$$

R -матрицы и матрица g перемножаются здесь как матрицы в их общем пространстве V_0 (вспомогательном пространстве), а след tr_0 берется во вспомогательном пространстве. В результате получается оператор в тензорном произведении векторных представлений $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^L V_j = (\mathbb{C}^N)^{\otimes L}$ (квантовом пространстве). Формально наше определение включает также модели с высшими представлениями на узлах, поскольку они могут быть получены “слиянием” нескольких векторных представлений со специальным образом подобранными параметрами u_i . Согласно построению трансфер-матрица $T(u)$, заданная в (2.4), – лорановский полином от $e^{\gamma u}$.

Из уравнения Янга–Бакстера и g -инвариантности R -матрицы следует, что трансфер-матрицы моделей с одинаковыми γ и g коммутируют при всех u и могут быть одновременно диагонализированы. Их диагонализация – это основная задача теории вершинных моделей. Стандартный метод – техника вложенных анзацев Бете.

Полное коммутативное семейство операторов в квантовом пространстве в общем случае больше, чем то, которое порождается коэффициентами трансфер-матрицы $T(u)$. Алгебраическая конструкция высших коммутирующих трансфер-матриц существенным образом опирается на теорию представлений q -деформированных алгебр $U_q(\widehat{gl}(N))$ и $U_q(gl(N))$ (см., например, труды [8]–[11]).

Алгебра $U_q(gl(N))$ имеет генераторы

$$L_{ab}^+, \quad 1 \leq a \leq b \leq N, \quad \text{и} \quad L_{ab}^-, \quad 1 \leq b \leq a \leq N,$$

такие, что $L_{aa}^+ L_{aa}^- = L_{aa}^- L_{aa}^+ = 1$. Объединив их в матрицы

$$L^+ = \sum_{a \leq b} e_{ab} \otimes L_{ab}^+, \quad L^- = \sum_{a \geq b} e_{ab} \otimes L_{ab}^-$$

с $U_q(gl(N))$ -значными матричными элементами, можно представить определяющие соотношения алгебры в виде [12]

$$R_{12}L_1^\pm L_2^\pm = L_2^\pm L_1^\pm R_{12}, \quad R_{12}L_1^+ L_2^- = L_2^- L_1^+ R_{12}$$

с R -матрицей, не зависящей от u :

$$R_{12} = \lim_{e^{\gamma u} \rightarrow \infty} (e^{-\gamma u} R(u)) = q \sum_{a=1}^N e_{aa} \otimes e_{bb} + \sum_{1 \leq a \neq b \leq N} e_{aa} \otimes e_{bb} + (q - q^{-1}) \sum_{1 \leq a \leq b \leq N} e_{ab} \otimes e_{ba}.$$

Диагональные элементы $L_{aa}^\pm$ можно понимать как экспоненты от коммутирующих картановских генераторов h_a : $L_{aa}^\pm = q^{\pm h_a}$.

Пусть π_λ – неприводимое конечномерное представление алгебры $U_q(gl(N))$ со старшим весом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ такое, что $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$. Вектор старшего веса $\mathbf{v}$ удовлетворяет соотношениям

$$L_{ab}^- \mathbf{v} = \begin{cases} 0, & a > b, \\ q^{-\lambda_a} \mathbf{v}, & a = b. \end{cases}$$

Пространство представления $V^{(\lambda)}$ порождается многократным действием генераторов L_{ab}^+ на вектор старшего веса и последующей факторизацией (подробности см. в работе [9]). Эти представления являются q -деформациями конечномерных представлений старшего веса алгебры $U(gl(N))$. Старшие веса можно естественным образом отождествить с диаграммами Юнга (разбиениями) λ .

Представление $\pi_{(1)}$, соответствующее диаграмме из одной клетки, – это векторное представление в $\mathbb{C}^N$. Для введенных выше картановских генераторов h_a оно выглядит в точности так же, как и для обычной недеформированной алгебры $gl(N)$: $\pi_{(1)}(h_a) = e_{aa}$. Пусть дана диагональная матрица $g = \text{diag}(p_1, \dots, p_N)$; положим

$$g = p_1^{h_1} \dots p_N^{h_N}, \quad (2.5)$$

тогда $g = \pi_{(1)}(g)$.

R -матрица $R^\lambda(u)$, действующая в $\mathbb{C}^N \otimes V^{(\lambda)}$, дается выражением

$$R^\lambda(u) = e^{\gamma u} \sum_{a \leq b} e_{ab} \otimes \pi_\lambda(L_{ab}^+) - e^{-\gamma u} \sum_{a \geq b} e_{ab} \otimes \pi_\lambda(L_{ab}^-). \quad (2.6)$$

R -матрицы $R^\lambda(u)$ и $R^\mu(u)$ сплетаются более общей R -матрицей $R^{\lambda\mu}(u)$, которая действует в пространстве $V^{(\lambda)} \otimes V^{(\mu)}$:

$$R_{12}^{\lambda\mu}(u_1 - u_2) R_{13}^\lambda(u_1 - u_3) R_{23}^\mu(u_2 - u_3) = R_{23}^\mu(u_2 - u_3) R_{13}^\lambda(u_1 - u_3) R_{12}^{\lambda\mu}(u_1 - u_2). \quad (2.7)$$

Это соотношение Янга–Бакстера обобщает (2.2). Здесь пространство с номером 1 – это $V^{(\lambda)}$, пространство с номером 2 – это $V^{(\mu)}$, а пространство с номером 3 – это $\mathbb{C}^N$. Явный вид $R^{\lambda\mu}(u)$ гораздо более сложен чем (2.6). Он может быть получен из универсальной R -матрицы для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{gl}(N))$ [13] путем специализации ее на конечномерные представления вычисления (evaluation

representation) или с помощью процедуры слияния [11], [14], [15], примененной к фундаментальной R -матрице $R(u)$. Обобщение условия g -инвариантности (2.3) на случай матрицы $R^{\lambda\mu}(u)$ выглядит следующим образом:

$$R_{12}^{\lambda\mu}(u)\pi_\lambda(\mathbf{g})_1\pi_\mu(\mathbf{g})_2 = \pi_\lambda(\mathbf{g})_1\pi_\mu(\mathbf{g})_2R_{12}^{\lambda\mu}(u). \quad (2.8)$$

Высшие трансфер-матрицы, или T -операторы, строятся способом, аналогичным (2.4), путем взятия следа от произведения R -матриц $R^\lambda(u - u_i)$ во вспомогательном пространстве $V^{(\lambda)}$:

$$T^\lambda(u) = \text{tr}_{V^{(\lambda)}}(R_{10}^\lambda(u - u_1) \dots R_{L0}^\lambda(u - u_L)\pi_\lambda(\mathbf{g})). \quad (2.9)$$

Здесь индексом 0 обозначено вспомогательное пространство $V^{(\lambda)}$. Эти T -операторы действуют в том же самом квантовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{\otimes L}$. Если $\lambda = (1)$ – диаграмма из одной клетки, то определение (2.9) совпадает с (2.7). По аналогии будем называть элемент $\mathbf{g}$ вида (2.5) элементом твиста. Из уравнения Янга–Бакстера (2.7) и условия $\mathbf{g}$ -инвариантности (2.8) следует, что T -операторы с одинаковым $\mathbf{g}$ коммутируют при всех u и λ , $[T^\lambda(u), T^\mu(v)] = 0$, и могут быть одновременно диагонализированы. Важным свойством T -операторов, определенных формулой (2.9), является то, что они тождественно обращаются в ноль, если первый столбец диаграммы λ длиннее чем N .

Положим

$$H_a = \sum_{l=1}^L e_{aa}^{(l)}, \quad e_{aa}^{(l)} = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{l-1} \otimes e_{aa} \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{L-l},$$

тогда из $\mathbf{g}$ -инвариантности вытекает, что $[T^\lambda(u), H_a] = 0$. Следовательно, собственные состояния трансфер-матриц можно классифицировать в соответствии с собственными значениями операторов H_a . Пусть

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{M_1, \dots, M_N} \mathcal{H}(\{M_a\})$$

есть разложение квантового пространства $\mathcal{H}$ в прямую сумму собственных подпространств операторов H_a с собственными значениями $M_a \in \mathbb{Z}_+$, $a = 1, \dots, N$, тогда собственные векторы $T^\lambda(u)$ лежат в пространствах $\mathcal{H}(\{M_a\})$. Поскольку $\sum_a e_{aa} = \mathbb{I}$ – единичная матрица, мы имеем $\sum_a H_a = L\mathbb{I}^{\otimes L}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^N M_i = L. \quad (2.10)$$

Для тривиального представления (соответствующего пустой диаграмме Юнга $\emptyset$) $\pi_\emptyset(L_{ab}^\pm) = 1$, если $a = b$, и $\pi_\emptyset(L_{ab}^\pm) = 0$ в противном случае; мы имеем $\pi_\emptyset(\mathbf{g}) = 1$. Формула (2.6) дает $R^\emptyset(u) = e^{\gamma u} - e^{-\gamma u}$, где подразумевается умножение на единичную матрицу $\mathbb{I}$. Следовательно, можно определить T -оператор для тривиального представления следующим образом:

$$T^\emptyset(u) = 2^L \prod_{i=1}^L \text{sh}(\gamma(u - u_i)). \quad (2.11)$$

Для одномерного представления $\pi_{(1^N)}$ (которое соответствует диаграмме Юнга (1^N) с одним столбцом высоты N) $\pi_{(1^N)}(q^{h_a}) = q$ для диагональных генераторов и $\pi_{(1^N)}(q^{h_a}) = 0$ в остальных случаях; мы имеем $\pi_{\emptyset}(\mathbf{g}) = \det g$. Формула (2.6) дает $R^{(1^N)}(u) = e^{\gamma(u+1)} - e^{-\gamma(u+1)}$, где подразумевается умножение на единичную матрицу $\mathbb{I}$. Следовательно, T -оператор для представления со старшим весом (1^N) (квантовый детерминант квантовой матрицы монодромии) дается формулой

$$T^{(1^N)}(u) = 2^L \det g \prod_{i=1}^L \text{sh}(\gamma(u+1-u_i)) = \det g \cdot T^{\emptyset}(u+1). \quad (2.12)$$

Для произвольных λ T -операторы являются лорановскими полиномами от $e^{\gamma u}$ похожего вида:

$$T^{\lambda}(u) = \sum_{k=-L/2}^{L/2} G_k^{\lambda} e^{2k\gamma u}. \quad (2.13)$$

Их коэффициенты G_k^{λ} при фиксированном $\mathbf{g}$ порождают полное семейство коммутирующих операторов (алгебру Бете вершинной модели).

Операторы $T^{\lambda}(u)$ оказываются функционально зависимыми. Известно, что они удовлетворяют некоторым функциональным соотношениям, которые задаются детерминантными формулами Чередника–Бажанова–Решетихина (ЧБР) [16], [17]. Данные формулы позволяют выразить оператор $T^{\lambda}(u)$ для произвольной λ через трансфер-матрицы $T_s(u) := T^{(s)}(u)$, соответствующие диаграммам с одной строкой длины s , или через трансфер-матрицы $T^a(u) := T^{(1^a)}(u)$, соответствующие диаграммам с одним столбцом высоты a :

$$T^{\lambda}(u) = \left(\prod_{k=1}^{\lambda'_1-1} T^{\emptyset}(u-k) \right)^{-1} \det_{i,j=1,\dots,\lambda'_1} T_{\lambda_i-i+j}(u-j+1), \quad (2.14)$$

$$T^{\lambda}(u) = \left(\prod_{k=1}^{\lambda_1-1} T^{\emptyset}(u+k) \right)^{-1} \det_{i,j=1,\dots,\lambda_1} T^{\lambda'_i-i+j}(u+j-1). \quad (2.15)$$

Здесь и далее λ' означает транспонированную диаграмму (отраженную относительно главной диагонали), так что λ'_1 – это высота первого столбца. Можно показать, что равенство (2.15) следует из (2.14) и наоборот.

3. УПРАВЛЯЮЩИЙ T -ОПЕРАТОР

Пусть $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$ – бесконечный набор параметров, которые мы называем временами, поскольку они будут иметь смысл иерархических времен в иерархии МКП. Полиномы Шура $s_{\lambda}(\mathbf{t})$, индексированные диаграммами Юнга λ , могут быть определены посредством детерминантной формулы

$$s_{\lambda}(\mathbf{t}) = \det_{i,j=1,\dots,\lambda'_1} h_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}), \quad (3.1)$$

где полиномы h_j вводятся с помощью производящего ряда

$$\exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k z^k\right) = 1 + h_1(\mathbf{t})z + h_2(\mathbf{t})z^2 + \dots$$

Удобно положить $h_0(\mathbf{t}) = 1$, $h_n(\mathbf{t}) = 0$ для $n < 0$ и $s_\emptyset(\mathbf{t}) = 1$. Функции h_j – это элементарные полиномы Шура в том смысле, что $s_{(j)}(\mathbf{t}) = h_j(\mathbf{t})$ для диаграмм $\lambda = (j)$ из одной строки с j клетками. Эквивалентным образом можно определить

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det_{i,j=1,\dots,\lambda_1} e_{\lambda'_i - i + j}(\mathbf{t}), \quad (3.2)$$

где полиномы e_j вводятся с помощью производящего ряда

$$\exp\left(\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} t_k z^k\right) = 1 + e_1(\mathbf{t})z + e_2(\mathbf{t})z^2 + \dots$$

Для диаграмм $\lambda = (1^j)$ из одного столбца с j клетками $s_{(1^j)}(\mathbf{t}) = e_j(\mathbf{t})$. Соотношения (3.1), (3.2) известны как формулы Якоби–Труди. Можно доказать [18], что полиномы Шура образуют базис в пространстве симметрических функций от переменных x_i , которые вводятся с помощью соотношений $kt_k = \sum_i x_i^k$.

Отметим тождество Коши–Литтлвуда

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}') = \exp\left(\sum_{k \geq 1} kt_k t'_k\right), \quad (3.3)$$

где сумма идет по всем диаграммам Юнга, включая пустую диаграмму. Записав его в виде

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{y}) s_{\lambda}(\tilde{\partial}) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} y_k \partial_{t_k}\right), \quad \tilde{\partial} = \left\{\partial_{t_1}, \frac{\partial_{t_2}}{2}, \frac{\partial_{t_3}}{3}, \dots\right\},$$

и применив к $s_{\mu}(\mathbf{t})$, получим

$$s_{\lambda}(\tilde{\partial}) s_{\mu}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0} = \delta_{\lambda\mu}. \quad (3.4)$$

Следуя работе [1], введем производящую функцию T -операторов (управляющий T -оператор), зависящую от бесконечного набора параметров $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$:

$$T(u, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) T^{\lambda}(u). \quad (3.5)$$

Эти операторы коммутируют при различных значениях параметров:

$$[T(u, \mathbf{t}), T(u', \mathbf{t}')] = 0.$$

Поскольку $T^{\lambda}(u) = 0$ при $\lambda'_1 > N$, сумма (3.5) в действительности ограничена диаграммами с $\lambda'_1 \leq N$. При этом T -операторы $T^{\lambda}(u)$ могут быть восстановлены из управляющего T -оператора по формуле

$$T^{\lambda}(u) = s_{\lambda}(\tilde{\partial}) T(u, \mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0}, \quad (3.6)$$

которая следует из (3.4). В частности,

$$T^{\emptyset}(u) = T(u, 0), \quad (3.7)$$

$$T(u) = T^{(1)}(u) = \partial_{t_1} T(u, \mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0}. \quad (3.8)$$

Ниже мы используем стандартные обозначения

$$\mathbf{t} \pm [z^{-1}] = \left\{ t_1 \pm z^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}z^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}z^{-3}, \dots \right\}, \quad (3.9)$$

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k. \quad (3.10)$$

Из (3.6) следует, что $T(u, 0 \pm [z^{-1}])$ – производящий ряд для T -операторов, соответствующих диаграммам с одной строкой и одним столбцом:

$$T(u, [z^{-1}]) = \sum_{s \geq 0} z^{-s} T_s(u), \quad T(u, -[z^{-1}]) = \sum_{a \geq 0} (-z)^{-a} T^a(u). \quad (3.11)$$

Как было доказано в работе [1], из формулы ЧБР (2.14) следует, что управляющий T -оператор удовлетворяет билинейному тождеству

$$\oint_C e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} z^{u-u'} T(u, \mathbf{t} - [z^{-1}]) T(u', \mathbf{t}' + [z^{-1}]) dz = 0 \quad (3.12)$$

при всех $u, u', \mathbf{t}, \mathbf{t}'$. Контур C окружает разрез между 0 и ∞ . С помощью стандартных действий [19], [20] из (3.12) можно получить бесконечные иерархии дифференциальных (по t_k) и дифференциально-разностных (по t_k и u) уравнений КП и мКП. Переменная u – это так называемое “нулевое время”; оно естественным образом включается в расширенную последовательность времен $t_0 = u, t_1, t_2, \dots$. Выбирая $u, u', \mathbf{t}, \mathbf{t}'$ специальным образом, из (3.12) можно также получить следующие билинейные уравнения:

$$\begin{aligned} & (z_2 - z_3) T(u, \mathbf{t} + [z_1^{-1}]) T(u, \mathbf{t} + [z_2^{-1}] + [z_3^{-1}]) + \\ & + (z_3 - z_1) T(u, \mathbf{t} + [z_2^{-1}]) T(u, \mathbf{t} + [z_1^{-1}] + [z_3^{-1}]) + \\ & + (z_1 - z_2) T(u, \mathbf{t} + [z_3^{-1}]) T(u, \mathbf{t} + [z_1^{-1}] + [z_2^{-1}]) = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & z_2 T(u+1, \mathbf{t} + [z_1^{-1}]) T(u, \mathbf{t} + [z_2^{-1}]) - z_1 T(u+1, \mathbf{t} + [z_2^{-1}]) T(u, \mathbf{t} + [z_1^{-1}]) + \\ & + (z_1 - z_2) T(u+1, \mathbf{t} + [z_1^{-1}] + [z_2^{-1}]) T(u, \mathbf{t}) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Они известны как уравнения Хироты (или Хироты–Мивы) для τ -функции [21], [22]. В этом смысле управляющий T -оператор (любое из его собственных значений) является τ -функцией классической иерархии мКП (см., например, статью [23]). Формулу (3.5) можно рассматривать как разложение τ -функции по функциям Шура (см. также работы [24]).

Отметим, что преобразование $T(u, \mathbf{t}) \rightarrow C(u) \exp(\sum_k c_k t_k) T(u, \mathbf{t})$ с произвольной функцией $C(u)$ и произвольными постоянными коэффициентами c_k сохраняет пространство τ -функций. Две τ -функции считаются существенно различными, если они не могут быть получены друг из друга таким преобразованием.

Как функция от u управляющий T -оператор имеет структуру, аналогичную (2.13):

$$T(u, \mathbf{t}) = \sum_{k=-L/2}^{L/2} G_k(\mathbf{t}) e^{2k\gamma u}. \quad (3.15)$$

В частности, старший и младший коэффициенты $G_{\pm L/2}(\mathbf{t})$ легко вычисляются. Старший коэффициент $G_{L/2}^\lambda(\mathbf{t})$ равен

$$G_{L/2}^\lambda(\mathbf{t}) = \exp\left(-\gamma \sum_{n=1}^L u_n\right) \sum_{a_i, b_i} \text{tr}_{V(\lambda)}(L_{a_1 b_1}^+ \dots L_{a_L b_L}^+) e_{a_1 b_1}^{(1)} \dots e_{a_L b_L}^{(L)}$$

(надо взять первые члены из каждой R -матрицы (2.6)). Поскольку все входящие в это выражение матрицы L_{ab}^+ верхнетреугольные, искомый след равен следу произведения диагональных матриц с теми же диагональными элементами:

$$\begin{aligned} G_{L/2}^\lambda(\mathbf{t}) &= \exp\left(-\gamma \sum_{n=1}^L u_n\right) \sum_{a_i} \text{tr}_{V(\lambda)}(q^{h_{a_1} + \dots + h_{a_L}} p_1^{h_1} \dots p_L^{h_L}) e_{a_1 b_1}^{(1)} \dots e_{a_L b_L}^{(L)} = \\ &= \sum_{M_1, \dots, M_L} \exp\left(-\gamma \sum_{n=1}^L u_n\right) \text{tr}_{V(\lambda)}((e^{\gamma M_1} p_1)^{h_1} \dots (e^{\gamma M_L} p_L)^{h_L}) \times \\ &\quad \times \sum_{a_i: \{M_j\}} e_{a_1 a_1}^{(1)} \dots e_{a_L a_L}^{(L)}, \end{aligned}$$

где последняя сумма идет по всем последовательностям индексов $a_1, \dots, a_L$ таким, что число индексов, равных j , есть M_j . Легко видеть, что

$$\sum_{a_i: \{M_j\}} e_{a_1 a_1}^{(1)} \dots e_{a_L a_L}^{(L)} = \frac{L!}{M_1! \dots M_L!} P_{M_1, \dots, M_N},$$

где $P_{M_1, \dots, M_N}$ – проектор на подпространство $\mathcal{H}(\{M_i\})$. Положим

$$y_k = \frac{1}{k} \sum_{a=1}^N e^{\gamma M_a k} p_a^k,$$

тогда $\text{tr}_{V(\lambda)}((e^{\gamma M_1} p_1)^{h_1} \dots (e^{\gamma M_L} p_L)^{h_L}) = s_\lambda(\mathbf{y})$.

Вычисление $G_{-L/2}(\mathbf{t})$ проводится аналогично. Пользуясь тождеством Коши–Литтлвуда (3.3), имеем

$$G_{\pm L/2}(\mathbf{t})|_{\mathcal{H}(\{M_i\})} = \frac{(\pm 1)^L L!}{M_1! \dots M_L!} \exp\left(\mp \gamma \sum_{n=1}^L u_n + \sum_{k \geq 1} \sum_{a=1}^N t_k p_a^k e^{\pm \gamma k M_a}\right). \quad (3.16)$$

Пусть $|\omega\rangle = |\omega(\{M_i\})\rangle \in \mathcal{H}(\{M_i\})$ – собственное состояние оператора $T(u, \mathbf{t})$,

$$T(u, \mathbf{t})|\omega(\{M_i\})\rangle = |\omega(\{M_i\})\rangle \tau_u(\mathbf{t}; |\omega(\{M_i\})\rangle),$$

тогда соответствующее собственное значение $\tau_u(\mathbf{t}; |\omega(\{M_i\})\rangle)$ может быть записано в виде

$$\tau_u(\mathbf{t}; |\omega(\{M_i\})\rangle) = C(\mathbf{t}) \prod_{k=1}^L \text{sh}(\gamma(u - u_k(\mathbf{t}))). \quad (3.17)$$

Мы будем называть выражение в правой части тригонометрическим полиномом (степени L). Общий множитель $C(\mathbf{t})$ и корни тригонометрического полинома зависят от всех времен $t_1, t_2, \dots$ (и от $|\omega\rangle$). Сравнивая с (3.16), находим

$$C(\mathbf{t}) = \frac{2^L L!}{M_1! \dots M_N!} \exp \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{a=1}^N t_k p_a^k \operatorname{ch}(\gamma M_a k) \right).$$

Из формул (3.7) и (2.11) ясно, что начальные положения этих корней совпадают с параметрами неоднородности в узлах решетки: $u_i(0) = u_i$.

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИЕРАРХИИ МКП

В этом разделе мы изучаем решения иерархии МКП, периодические по переменной $t_0 = u$ с периодом $2\pi i/\gamma$. Мы называем их тригонометрическими решениями. Для решений из этого класса τ -функция представляет собой “тригонометрический квазиполином” от u , т. е. лорановский полином от переменной $e^{\gamma u}$, возможно, умноженный на экспоненциальную функцию от u .

4.1. Построение тригонометрических решений. Под тригонометрическими решениями иерархии МКП мы понимаем τ -функции, которые являются полиномами от $e^{\gamma u}$ при некотором γ , умноженными на экспоненциальную функцию от u . Их можно рассматривать как вырождения двоякопериодических (эллиптических) решений на комплексной плоскости переменной $u = t_0$ (они соответствуют вершинным моделям с эллиптическими R -матрицами). Общая теория эллиптических решений иерархии КП была развита в работе [25] и обобщена на иерархию МКП в работе [26]. При тригонометрическом вырождении конструкция упрощается и становится более явной [27]. Здесь мы применим ее к интересующему нас случаю. Ниже мы получим τ -функцию для тригонометрических решений в форме детерминанта Казорати [28].

Пусть $\tau_u(\mathbf{t})$ – τ -функция иерархии МКП. Функция Бейкера–Ахиезера и ее сопряженная определяются следующим образом [19]:

$$\psi_u(\mathbf{t}, z) = z^u e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau_u(\mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau_u(\mathbf{t})}, \quad (4.1)$$

$$\psi_u^*(\mathbf{t}, z) = z^{-u} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau_u(\mathbf{t})}, \quad (4.2)$$

где $\xi(\mathbf{t}, z)$ введено в (3.10). В общем случае отношения τ -функций в правых частях могут быть разложены в бесконечные ряды вблизи точки $z = \infty$:

$$\psi_u(\mathbf{t}, z) = z^u e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{w_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{w_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots \right), \quad (4.3)$$

$$\psi_u^*(\mathbf{t}, z) = z^{-u} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \left(\frac{w_1^*(\mathbf{t})}{z} + \frac{w_2^*(\mathbf{t})}{z^2} + \dots \right). \quad (4.4)$$

В соответствии с теорией общих алгебро-геометрических решений, развитой Кричевером [29], такие решения могут быть характеризованы и построены в явном виде путем задания определенных аналитических свойств функции Бейкера–Ахиезера

на римановой поверхности комплексной переменной z (классического спектрального параметра). Напомним, что квантовый спектральный параметр u отождествляется с нулевым временем в классической иерархии мКП.

В случае тригонометрических решений риманова поверхность – это риманова сфера (компактифицированная комплексная плоскость), которая представляет собой алгебраическую кривую рода ноль с особенностями. Функция Бейкера–Ахизера в этом случае является рациональной функцией на комплексной z -плоскости, умноженной на степенной и экспоненциальный факторы, которые дают требуемую асимптотику (существенную особенность в бесконечности). При нецелых u точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции Бейкера–Ахизера. Чтобы сделать ее однозначной, надо провести разрез между 0 и ∞ .

Мы знаем, что второй ряд в (3.11) обрывается на члене с $a = N$. Это наводит на мысль принять анзац для функции Бейкера–Ахизера, в котором ряд (4.3) также обрывается на N -м члене:

$$\psi_u(\mathbf{t}, z) = z^u e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{w_1(\mathbf{t})}{z} + \dots + \frac{w_N(\mathbf{t})}{z^N} \right). \quad (4.5)$$

Эта формула явно задает функцию $z^{-u} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \psi_u(\mathbf{t}, z)$ как рациональную функцию на расширенной комплексной плоскости. Кратность полюса в точке $z = 0$ (равная N) есть дискретный параметр, характеризующий класс решений, которые надлежит построить.

Зафиксируем N точек $p_i \in \mathbb{C}$ и N неотрицательных целых чисел M_i таких, что

$$M_1 + \dots + M_N = L,$$

а также набор параметров

$$b_{i,m}, \quad i = 1, \dots, N, \quad m = -\frac{M_i}{2}, \frac{M_i}{2} + 1, \dots, \frac{M_i}{2}$$

(предполагается, что $b_{i, \pm M_i/2} \neq 0$ при всех i). Наложим N условий вида

$$\sum_{m=-M_i/2}^{M_i/2} b_{i,m} \psi_u(\mathbf{t}, p_i e^{2\gamma m}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

которые предполагаются выполненными для всех значений u , t_i . Сумма идет по всем целым числам между $-M_i/2$ и $M_i/2$ для четных M_i и по всем полуцелым числам между $-M_i/2$ и $M_i/2$ для нечетных M_i . Эти условия приводят к системе из N линейных уравнений для N коэффициентов w_k , которые позволяют определить функцию Бейкера–Ахизера ψ . Общая теория гарантирует, что τ -функция, ассоциированная с этой ψ -функцией согласно (4.1), является решением иерархии мКП. Точки p_i и элементы матрицы $b_{i,m}$ – параметры решения. Коэффициенты w_k оказываются рациональными функциями от $e^{\gamma u}$, а τ -функция – тригонометрическим полиномом от u (возможно, умноженным на экспоненциальную функцию от u). С алгебро-геометрической точки зрения эти решения соответствуют сингулярным римановым поверхностям с N “струнами”, состоящими из особых точек

$$p_i e^{-\gamma M_i}, \quad p_i e^{-\gamma(M_i-2)}, \quad \dots, \quad p_i e^{\gamma(M_i-2)}, \quad p_i e^{\gamma M_i},$$

с центрами в p_i . Точки каждой струны склеены друг с другом некоторым сложным образом. Отметим, что параметры $b_{i,m}$ могут быть умножены на любые ненулевые комплексные числа k_i : преобразование $b_{i,m} \rightarrow k_i b_{i,m}$ ничего не меняет.

Семейство периодических N -солитонных решений – это очень частный случай данной конструкции, соответствующий $M_i = 1$ при всех i . В этом случае условия (4.6) принимают вид $b_{i,-1/2}\psi_u(\mathbf{t}, p_i e^{-\gamma}) = -b_{i,1/2}\psi_u(\mathbf{t}, p_i e^{\gamma})$, и такие решения соответствуют римановой сфере с N парами двойных точек $p_i e^{\gamma}$ и $p_i e^{-\gamma}$.

Легко видеть, что условия (4.6) эквивалентны системе линейных уравнений

$$B_i(u, \mathbf{t}) + \sum_{k=1}^N B_i(u - k, \mathbf{t}) w_k = 0, \quad (4.7)$$

где

$$B_i(u, \mathbf{t}) := p_i^u \sum_{m=-M_i/2}^{M_i/2} b_{i,m}(\mathbf{t}) e^{2\gamma m u}, \quad b_{i,m}(\mathbf{t}) := b_{i,m} e^{\xi(\mathbf{t}, p_i e^{2\gamma m})}. \quad (4.8)$$

Данную систему можно решить с помощью правила Крамера. Это дает следующее явное выражение для функции Бейкера–Ахизера:

$$\psi_u(\mathbf{t}, z) = z^u e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\begin{vmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-N} \\ B_1(u, \mathbf{t}) & B_1(u-1, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u, \mathbf{t}) & B_N(u-1, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1(u-1, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u-1, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}}. \quad (4.9)$$

Сравнивая с (4.1), мы заключаем, приняв во внимание очевидное свойство

$$B_i(u, \mathbf{t} - [z^{-1}]) = B_i(u, \mathbf{t}) - B_i(u+1, \mathbf{t}) z^{-1}, \quad (4.10)$$

что τ -функция задается разностным вронскианом (детерминантом Казорати) в знаменателе:

$$\tau_u(\mathbf{t}) = (\det g)^{-u} \det_{i,j=1,\dots,N} B_i(u-j, \mathbf{t}) \quad (4.11)$$

(здесь $g = \text{diag}(p_1, \dots, p_N)$ – та же матрица, что и в предыдущих разделах). Множитель $(\det g)^{-u}$ введен для того, чтобы $\tau_u(\mathbf{t})$ была тригонометрическим полиномом от u вида (3.17). Сравнивая старший и младший коэффициенты в (3.15) (которые задаются формулой (3.16)) с соответствующими коэффициентами в (4.11), видим, что параметры $b_{i,\pm M_i/2}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^N b_{i,\pm M_i/2} \right) (\det g)^{-N} e^{\mp \gamma N L} \prod_{j < k} (p_j e^{\pm \gamma M_j} - p_k e^{\pm \gamma M_k}) = \\ & = \frac{(\pm 1)^L L!}{M_1! \dots M_N!} \exp \left\{ \mp \gamma \sum_{n=1}^N u_n \right\}. \end{aligned}$$

Из формулы (4.9) ясно, что последний коэффициент в (4.5) (коэффициент w_N) выражается через τ -функцию посредством формулы

$$w_N(u, \mathbf{t}) = (-1)^N \frac{\tau_{u+1}(\mathbf{t})}{\tau_u(\mathbf{t})}.$$

Отметим формулу $w_1(u, \mathbf{t}) = -\partial_{t_1} \ln \tau_u(\mathbf{t})$ для первого коэффициента в (4.5), которая легко получается из очевидного соотношения $\partial_{t_1} B_i(u, \mathbf{t}) = B_i(u+1, \mathbf{t})$.

Перепишав (4.10) в виде

$$B_i(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = B_i(u, \mathbf{t}) + z^{-1} B_i(u+1, \mathbf{t} + [z^{-1}]),$$

можно непосредственно проверить, что

$$\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}]) = (\det g)^{-u} \begin{vmatrix} B_1(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_1(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ B_2(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_2(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_2(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_N(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}.$$

Из определения (4.8) непосредственно следует, что

$$B_i(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = p_i^u \sum_{m=-M_i/2}^{M_i/2} \frac{b_{i,m} z}{z - p_i e^{2\gamma m}} e^{2\gamma m u + \xi(\mathbf{t}, p_i e^{2\gamma m})}. \quad (4.12)$$

Разложив это выражение по степеням z^{-1} , получим

$$B_i(u, \mathbf{t} + [z^{-1}]) = B_i(u, \mathbf{t}) + B_i(u+1, \mathbf{t}) z^{-1} + B_i(u+2, \mathbf{t}) z^{-2} + \dots$$

Следовательно, разложение функции $\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}])$ вблизи $z = \infty$ имеет вид

$$\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}]) = (\det g)^{-u} \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} \begin{vmatrix} B_1(u+s-1, \mathbf{t}) & B_1(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ B_2(u+s-1, \mathbf{t}) & B_2(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_2(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u+s-1, \mathbf{t}) & B_N(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}.$$

Тем самым мы видим, что сопряженная функция Бейкера–Ахизера имеет детерминантное представление

$$\psi_u^*(\mathbf{t}, z) = z^{-u} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\begin{vmatrix} B_1(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_1(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ B_2(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_2(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_2(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}]) & B_N(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1(u-1, \mathbf{t}) & B_1(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_1(u-N, \mathbf{t}) \\ B_2(u-1, \mathbf{t}) & B_2(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_2(u-N, \mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(u-1, \mathbf{t}) & B_N(u-2, \mathbf{t}) & \dots & B_N(u-N, \mathbf{t}) \end{vmatrix}}. \quad (4.13)$$

Введем обозначение

$$\overline{B}_k(u, \mathbf{t}) := \det_{\substack{i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, N-1}} B_i(u+1-j, \mathbf{t})$$

для минора $M_{k,N}$ матрицы размера $N \times N$ с элементами $B_i(u+1-j)$, $1 \leq i, j \leq N$. Тогда, разлагая определитель в числителе (4.13) по первому столбцу, получим

$$\psi_u^*(\mathbf{t}, z) = \frac{z^{-u} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)}}{\tau_u(\mathbf{t})} \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \overline{B}_k(u-2, \mathbf{t}) B_k(u-1, \mathbf{t} + [z^{-1}])$$

или, подставив (4.12),

$$\begin{aligned} \psi_u^*(\mathbf{t}, z) &= (\det g)^{-u} \frac{z^{-u+1} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)}}{\tau_u(\mathbf{t})} \times \\ &\times \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} p_i^{u-1} \sum_{m=-M_i/2}^{M_i/2} \frac{b_{i,m} e^{2\gamma m(u-1) + \xi(\mathbf{t}, p_i e^{2\gamma m})}}{z - p_i e^{2\gamma m}} \bar{B}_i(u-2, \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Это дает разложение по полюсам для сопряженной функции Бейкера–Ахиезера. Видно, что в общем случае она имеет простые полюсы во всех точках, образующих “струны”. Ниже нам понадобится формула (4.14), переписанная для функции $\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}])$,

$$\begin{aligned} \tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}]) &= z(\det g)^{-u} \times \\ &\times \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} p_i^{u-1} \sum_{m=-M_i/2}^{M_i/2} \frac{b_{i,m} e^{2\gamma m(u-1) + \xi(\mathbf{t}, p_i e^{2\gamma m})}}{z - p_i e^{2\gamma m}} \bar{B}_i(u-2, \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

с простыми полюсами в тех же точках.

4.2. Раздевающие преобразования Беклунда для тригонометрических решений. Как было показано в работе [1] для моделей с рациональными R -матрицами, основные соотношения метода, связанного с применением анзаца Бете, естественным образом встроены в конструкцию рациональных решений иерархии мКП. Схема вложенных анзацев Бете оказывается эквивалентной цепочке некоторых специальных преобразований Беклунда исходного рационального решения иерархии мКП, которые “раздевают” его до тривиального решения путем последовательного уменьшения числа особых точек. Все это остается справедливым для вершинных моделей с тригонометрическими R -матрицами с единственным отличием, что процедуру раздевания надо применять к тригонометрическим решениям. Технически она становится даже проще, поскольку полюсы сопряженной функции Бейкера–Ахиезера в этом случае простые. В частности, функции $\bar{B}_k(u, \mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0}$ и $B_k(u, \mathbf{t})|_{\mathbf{t}=0}$ должны быть отождествлены, с точностью до некоторых несущественных множителей, с Q -операторами Бакстера (их собственными значениями) на первом и последнем уровнях вложения в схеме вложенных анзацев Бете.

Добавление (или удаление) “струны” $p_i e^{2\gamma m}$ с центром в p_i к данным (или из данных) тригонометрического решения является преобразованием Беклунда. Оно переводит одну тригонометрическую τ -функцию в другую. Нас будет интересовать удаление струны, которое приводит к уменьшению степени тригонометрического полинома (преобразование раздевания). По сути такое преобразование сводится к выделению сингулярной части (вычета) функции $\tau_u(\mathbf{t} + [z^{-1}])$ в любом из ее простых полюсов, которые находятся в точках, образующих струну с центром в p_i . А именно, рассмотрим функцию

$$\tau_u^{[i]}(\mathbf{t}) = (-1)^{i-1} p_i^{-1} \det g \cdot e^{\gamma M_i(u+1) - \xi(\mathbf{t}, p_i e^{-\gamma M_i})} \operatorname{res}_{z=p_i e^{-\gamma M_i}} \tau_{u+1}(\mathbf{t} + [z^{-1}]). \quad (4.16)$$

Из равенства (4.15) следует, что

$$\tau_u^{[i]}(\mathbf{t}) = b_{i, -M_i/2} (p_i^{-1} \det g)^{-u} \bar{B}_i(u-1, \mathbf{t}),$$

т.е. с точностью до несущественного постоянного множителя введенная функция имеет ту же детерминантную форму, что и $\tau_u(\mathbf{t})$, только струна с центром в p_i удалена. Следовательно, $\tau_u^{[i]}(\mathbf{t})$ является τ -функцией, т.е. удовлетворяет тем же уравнениям Хироты, что и $\tau_u(\mathbf{t})$, а $\tau \rightarrow \tau^{[i]}$ – это действительно преобразование Беклунда. Степень тригонометрического полинома $\tau_u^{[i]}(\mathbf{t})$ равна $L - M_i$. Отметим, что вычет в формуле (4.16) берется на левом конце струны. Это имеет то преимущество, что коэффициент $b_{i,-M_i/2}$ по определению отличен от нуля, и поэтому результат преобразования никогда не равен нулю тождественно (это же верно для правого конца).

Данную процедуру можно продолжать до тех пор, пока не получится полином нулевой степени. Индуктивное определение следующее. Фиксируем множество $I_n = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, N\}$. Предположим, что у нас есть τ -функция $\tau_u^{[i_1 \dots i_{n-1}]}(\mathbf{t})$, полученная на $(n-1)$ -м шаге, тогда τ -функция на n -м шаге определяется как

$$\begin{aligned} \tau_u^{[i_1 \dots i_n]}(\mathbf{t}) = & (-1)^{i_n-1} \left(\prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus I_n} p_j \right) (b_{i_n, -M_{i_n}/2})^{-1} e^{\gamma M_{i_n}(u+1) - \xi(\mathbf{t}, p_{i_n} e^{-\gamma M_{i_n}})} \times \\ & \times \operatorname{res}_{z=p_{i_n} e^{-\gamma M_{i_n}}} \tau_{u+1}^{[i_1 \dots i_{n-1}]}(\mathbf{t} + [z^{-1}]). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Эта τ -функция имеет детерминантное представление

$$\tau_u^{[i_1 \dots i_n]}(\mathbf{t}) = \left(\prod_{i \in I_n} b_{i, -M_i/2} \right) \left(\prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus I_n} p_j^{-u} \right) \det_{\substack{i=\{1, \dots, N\} \setminus I_n, \\ j=1, \dots, N-n}} B_i(u-j, \mathbf{t}).$$

Как было в подробностях показано в работе [1], “раздевающая” цепочка преобразований Беклунда

$$\tau_u(\mathbf{t}) \rightarrow \tau_u^{[i_1]}(\mathbf{t}) \rightarrow \tau_u^{[i_1 i_2]}(\mathbf{t}) \rightarrow \dots \rightarrow \tau_u^{[i_1 \dots i_n]}(\mathbf{t}) \rightarrow 0$$

эквивалентна схеме вложенных анзацев Бете, причем τ -функции $\tau_u^{[i_1 \dots i_n]}(\mathbf{t})$ являются собственными значениями управляющих T -операторов на высших уровнях процедуры вложения. В частности, $\tau_u^{[i_1 \dots i_n]}(\mathbf{t})$ при $\mathbf{t} = 0$ суть собственные значения Q -операторов Бакстера. Они являются тригонометрическими полиномами от u , степень которых убывает с ростом n . Отсюда вытекает система уравнений Бете для нулей этих полиномов.

5. НУЛИ УПРАВЛЯЮЩЕГО T -ОПЕРАТОРА КАК ЧАСТИЦЫ РЕЙСЕНАРСА–ШНАЙДЕРА

Как мы видели, собственные значения управляющего T -оператора являются тригонометрическими полиномами от спектрального параметра u вида (3.17). Корни каждого собственного значения имеют свою динамику по временам t_i . Известно [26], что эта динамика задается тригонометрической моделью Рейсенарса–Шнайдера [6]. Параметры неоднородности u_i – это координаты частиц Рейсенарса–Шнайдера при $t_i = 0$: $u_i = u_i(0)$.

В настоящем разделе мы выведем, следуя работе [26], уравнения движения для нулей тригонометрической τ -функции (управляющего T -оператора) по первому временному потоку $t_1 = t$. Наша отправная точка – это дифференциально-разностное

уравнение для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\partial_{t_1} \psi_u(\mathbf{t}, z) = \psi_{u+1}(\mathbf{t}, z) + \partial_{t_1} \ln \frac{\tau_{u+1}(\mathbf{t})}{\tau_u(\mathbf{t})} \psi_u(\mathbf{t}, z); \quad (5.1)$$

оно следует из определения функции Бейкера–Ахиезера и из уравнений Хироты.

Из определения (4.1) ясно, что $\psi_u(\mathbf{t})$ имеет простые полюсы при $u = u_j(\mathbf{t})$. Введем функцию

$$\Phi(u, \zeta) = \frac{\text{sh}(\gamma(u + \zeta))}{\text{sh}(\gamma u) \text{sh}(\gamma \zeta)} = \text{cth}(\gamma u) + \text{cth}(\gamma \zeta)$$

и возьмем следующий полюсный анзац для функции Бейкера–Ахиезера:

$$\psi_u(\mathbf{t}, z) = z^u \sum_{j=1}^L s_j(\mathbf{t}, z, \zeta) \Phi(u - u_j(\mathbf{t}, \zeta)).$$

Здесь ζ играет роль вспомогательного спектрального параметра. Подставив этот анзац в (5.1), можно вывести уравнения движения вместе с представлением Лакса для них. Опуская подробности дальнейших вычислений, приведем результат. Двойные полюсы в $u = u_j$ сокращаются автоматически. Сокращение простых полюсов в $u = u_j - 1$ дает

$$\gamma \dot{u}_j \sum_k \Phi(u_{jk} - 1, \zeta) s_k = z s_j, \quad j = 1, \dots, L,$$

где $\dot{u}_j := \partial_{t_1} u_j$, $u_{jk} := u_j - u_k$. Сокращение простых полюсов в $u = u_j$ дает

$$\dot{s}_j = \gamma \dot{u}_j \sum_{k \neq j} \Phi(u_{jk}, \zeta) s_k + \gamma \left[\dot{u}_j \text{cth}(\gamma \zeta) + \sum_{k \neq j} \dot{u}_k [\text{cth}(\gamma u_{jk}) - \text{cth}(\gamma(u_{jk} + 1))] \right] s_j.$$

Наконец, сравнение постоянных членов при $u \rightarrow \pm\infty$ (мы предполагаем, что γ вещественна и положительна) дает условие $\sum_j \dot{s}_j = z \sum_j s_j$, которое не налагает никаких новых связей, поскольку в действительности следует из уже полученных соотношений. Найденные выше уравнения можно записать в матричной форме

$$\mathcal{L}(\zeta) \mathbf{s} = z \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \mathcal{M}(\zeta) \mathbf{s}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_L)^t$, а матрицы $\mathcal{L}(\zeta)$, $\mathcal{M}(\zeta)$ определены так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jk}(\zeta) &= \gamma \dot{u}_j \Phi(u_{jk} - 1, \zeta), \\ \mathcal{M}_{jk}(\zeta) &= \gamma \left[(\text{cth}(\gamma \zeta) - \text{cth} \gamma) \dot{u}_j + \sum_{l \neq j} V(u_{jl}) \right] \delta_{jk} + \gamma (1 - \delta_{jk}) \dot{u}_j \Phi(u_{jk}, \zeta), \end{aligned}$$

где $V(u) := \text{cth}(\gamma u) - \text{cth}(\gamma(u + 1))$. Из условия совместности уравнений (5.2) следует уравнение Лакса

$$\dot{\mathcal{L}}(\zeta) = [\mathcal{M}(\zeta), \mathcal{L}(\zeta)]. \quad (5.3)$$

Прямое вычисление показывает, что оно эквивалентно уравнениям движения системы Рейсенарса–Шнайдера:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j &= \gamma \dot{u}_j \sum_{k \neq j} \dot{u}_k (V(u_{jk}) - V(u_{kj})) = \\ &= -2\gamma \text{sh}^2 \gamma \sum_{k \neq j} \frac{\dot{u}_j \dot{u}_k \text{ch}(\gamma u_{jk})}{\text{sh}(\gamma(u_{jk} - 1)) \text{sh}(\gamma u_{jk}) \text{sh}(\gamma(u_{jk} + 1))}. \end{aligned}$$

В процессе вычисления полезны следующие тождества:

$$\begin{aligned}\Phi(u-1, \zeta)\Phi(v, \zeta) - \Phi(u, \zeta)\Phi(v-1, \zeta) &= \Phi(u+v-1, \zeta)(V(-u) - V(-v)), \\ \partial_u \Phi(u-1, \zeta) &= \gamma(\operatorname{cth}(\gamma\zeta) - \operatorname{cth} \gamma - V(-u))\Phi(u-1, \zeta) - \gamma\Phi(-1, \zeta)\Phi(u, \zeta).\end{aligned}$$

Отметим также, что (5.3) является гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{j=1}^L e^{v_j} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\operatorname{sh}(\gamma(u_{jk} + 1)) \operatorname{sh}(\gamma(u_{jk} - 1))}{\operatorname{sh}^2(\gamma u_{jk})} \right)^{1/2}$$

и канонически сопряженными переменными v_j, u_j со скобками Пуассона $\{v_j, u_k\} = \delta_{jk}$. Имеются также высшие гамильтонианы $\mathcal{H}_j$ в инволюции, которые порождают высшие потоки по t_j .

Спектральная кривая дается уравнением $\det_{L \times L}(\mathcal{L}(\zeta) - z) = 0$. Можно показать, что эта кривая есть риманова сфера, на которой точки каждой струны $p_i e^{2\gamma m}$ склеены друг с другом некоторым сложным образом. Коэффициенты характеристического полинома в левой части являются интегралами движения системы Рейсенарса–Шнайдера.

Наконец, подчеркнем специфический способ постановки задачи в контексте системы Рейсенарса–Шнайдера, который соответствует решению вершинной модели или квантовой спиновой цепочки. Стандартная постановка задачи механики такова: даны начальные значения координат и скоростей частиц $u_j(0), \dot{u}_j(0)$, найти эволюцию $u_j(t)$. В отличие от этого, для того чтобы найти собственные значения трансфер-матрицы, нужно поставить задачу следующим нестандартным образом: даны начальные координаты $u_j = u_j(0)$ и значения всех высших интегралов движения $\mathcal{H}_j$, требуется найти начальные скорости $\dot{u}_j(0)$. В самом деле, знание начальных скоростей позволяет восстановить трансфер-матрицу по вычетам в полюсах:

$$\operatorname{res}_{u=u_k} \frac{T(u)}{T^{\mathcal{Q}}(u, 0)} \Big|_{|\omega(\{M_i\})} = -\dot{u}_k(0).$$

Решение не единственно: различные возможные решения этой задачи соответствуют различным собственным состояниям трансфер-матрицы в секторе $\mathcal{H}(\{M_i\})$.

Благодарности. Автор благодарен А. Александрову, А. Горскому, В. Казакову, И. Кричеву, С. Лорану, А. Орлову, Т. Такебе, З. Цубои и С. Хорошкину за обсуждения. Часть результатов была доложена на Международном семинаре “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS–2012). Работа частично поддержана РФФИ (грант № 11-02-01220, совместные гранты № 12-02-91052-РФФИ-CNRS, 12-02-92108-РФФИ-JSPS), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3349.2012.2) и Федеральным Агентством по науке и инновациям Российской Федерации (контракт 14.740.11.0081).

Список литературы

- [1] A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, *Classical tau-function for quantum spin chains*, arXiv: [1112.3310](#).
- [2] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **188**:2 (1997), 267–304, arXiv: [hep-th/9604080](#).

- [3] A. Zabrodin, *Internat. J. Modern Phys. B*, **11**:26–27 (1997), 3125–3158, arXiv: hep-th/9610039; А. В. Забродин, *ТМФ*, **116**:1 (1998), 54–100.
- [4] V. Kazakov, A. S. Sorin, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **790**:3 (2008), 345–413, arXiv: hep-th/0703147; А. В. Забродин, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 74–93, arXiv: 0705.4006.
- [5] V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, *Commun. Math. Phys.*, **311**:3 (2012), 787–814, arXiv: 1010.4022.
- [6] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [7] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Алгебра и анализ*, **22**:3 (2010), 177–190, arXiv: 0904.2131; *KZ characteristic variety as the zero set of classical Calogero–Moser Hamiltonians*, arXiv: 1201.3990.
- [8] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [9] M. Rosso, *Commun. Math. Phys.*, **117**:4 (1988), 581–593.
- [10] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Springer, Berlin, 1997.
- [11] D. Arnaudon, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat, E. Ragoucy, *Ann. H. Poincaré*, **7**:7–8 (2006), 1217–1268, arXiv: math-ph/0512037.
- [12] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.
- [13] S. Khoroshkin, V. Tolstoy, *Commun. Math. Phys.*, **141**:3 (1991), 599–617.
- [14] P. Kulish, N. Reshetikhin, E. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393–403.
- [15] И. В. Чередник, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 87–88.
- [16] И. В. Чередник, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 94–95.
- [17] V. V. Bazhanov, N. Reshetikhin, *J. Phys. A*, **23**:9 (1990), 1477–1492.
- [18] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [19] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory*, Proceedings of RIMS Symposium (Kyoto, Japan, May 13–16, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [20] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [21] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**:11 (1981), 3785–3791.
- [22] T. Miwa, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **58**:1 (1982), 9–12.
- [23] T. Takebe, L.-P. Teo, *SIGMA*, **2** (2006), 072, 30 pp.
- [24] A. Orlov, T. Shiota, *Phys. Lett. A*, **343**:5 (2005), 384–396, arXiv: math-ph/0501017; Дж. Харнад, В. З. Энольский, *УМН*, **66**:4(400) (2011), 137–178.
- [25] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54.
- [26] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, *УМН*, **50**:6(306) (1995), 3–56.
- [27] И. М. Кричевер, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **84** (1979), 117–130; Б. А. Дубровин, Т. М. Маланюк, И. М. Кричевер, В. Г. Маханьков, *ЭЧАЯ*, **19**:3 (1988), 579–621.
- [28] Y. Ohta, R. Hirota, S. Tsujimoto, T. Imai, *J. Phys. Soc. Japan*, **62**:6 (1993), 1872–1886.
- [29] И. М. Кричевер, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208.