Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е-Хуэй Хуан, Жунь-Лян Линь, Юй-Цинь Яо, Юнь-Бо Цзэн, Применение обобщенной деформации Купершмидта для построения новых дискретных интегрируемых систем, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 2, 178–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:20:18

© 2013 г.

Е-Хуэй Хуан*, Жунь-Лян Линь†,
Юй-Цинь Яо‡, Юнь-Бо Цзэн†

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ КУПЕРШМИДТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НОВЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Известно, что уравнение КдФ-6 можно представить как деформацию Купершмидта уравнения КдФ. Предлагается использовать обобщенную деформацию Купершмидта для построения новых дискретных интегрируемых систем исходя из бигамильтоновой структуры некоторой дискретной интегрируемой системы. Рассмотрены иерархии Тоды, Каца–ван Мербеке и Абловица–Ладика. Для таких новых деформированных систем получено представление Лакса. Обобщенная деформация Купершмидта представляет собой новый способ построения дискретных интегрируемых систем.

Ключевые слова: деформация Купершмидта, бигамильтоновы системы, дискретные интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/tmf8374

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы деформации интегрируемых систем привлекают большое внимание [1]–[17]. Как известно, из бигамильтоновой системы можно построить новую интегрируемую систему [2], [3]. Уравнение КдФ-6 было получено в работе [10] с помощью анализа Пенлеве. Оно имеет вид

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x - \omega_x, \quad \omega_{xx} + 4u\omega_x + 2u_x\omega = 0 \quad (1.1)$$

и может также рассматриваться как неголономная деформация уравнения КдФ [10]. Многие авторы изучали различные свойства интегрируемости уравнения КдФ-6:

*School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing, China.
E-mail: yhhuang@ncepu.edu.cn

†Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail: rlin@math.tsinghua.edu.cn, yzeng@math.tsinghua.edu.cn

‡Department of Applied Mathematics, China Agricultural University, Beijing, China.
E-mail: yyqinw@126.com

представление нулевой кривизны, бигамильтонову структуру, законы сохранения, многосолитонные решения и т. д. [10]–[15]. Купершмидт обнаружил, что системе (1.1) можно преобразовать к виду

$$u_t = J \left(\frac{\delta H_3}{\delta u} \right) - J(\omega), \quad K(\omega) = 0,$$

где $J = \partial = \partial_x$ и $K = \partial^3 + 2(u\partial + \partial u)$ – два стандартных гамильтоновых оператора иерархии КдФ, а $H_3 = u^3 - u_x^2/2$ есть гамильтонова функция. Для бигамильтоновой системы общего вида

$$u_{t_m} = J \left(\frac{\delta H_{m+1}}{\delta u} \right) = K \left(\frac{\delta H_m}{\delta u} \right)$$

существует неголономная деформация [1]

$$u_{t_m} = J \left(\frac{\delta H_{m+1}}{\delta u} \right) - J(\omega), \quad K(\omega) = 0,$$

которую называют деформацией Купершмидта бигамильтоновых систем.

В работе [15] мы доказали, что деформацию Купершмидта уравнения КдФ можно рассматривать как деформацию Росочатиуса уравнения КдФ с самосогласованными источниками, а также получили ее бигамильтонову структуру. Кроме того, в работах [16], [17] мы построили обобщенную деформацию Купершмидта (ОДК) для некоторой бигамильтоновой системы с чисто дифференциальными гамильтоновыми операторами.

Известно, что два гамильтоновых оператора интегрируемой системы связаны соотношением

$$K \left(\frac{\delta \lambda_j}{\delta u} \right) = \gamma_j J \left(\frac{\delta \lambda_j}{\delta u} \right),$$

где значение $\delta \lambda_j / \delta u$ можно взять из спектральной задачи для данной системы, при этом $\gamma_j = \lambda_j$ или $\gamma_j = \lambda_j^2$ в зависимости от вида изучаемой интегрируемой системы. В интегрируемых системах с самосогласованными источниками в качестве компонент источников выступают собственные функции и их сопряженные, которые удовлетворяют обычной и сопряженной спектральным задачам, соответствующим λ_j . В случае ОДК мы будем считать, что неголономные члены удовлетворяют не спектральной задаче, а уравнениям $(K - \gamma_j J)(\delta \lambda_j / \delta u) = 0$ и, следовательно, являются более свободными, поскольку связаны уравнениями более высокого порядка. Таким образом, ОДК интегрируемой системы в непрерывном случае записывается как [16], [17]

$$u_{t_m} = J \left(\frac{\delta H_{m+1}}{\delta u} - \sum_{j=1}^N \frac{\delta \lambda_j}{\delta u} \right), \quad (K - \gamma_j J) \left(\frac{\delta \lambda_j}{\delta u} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

где параметр γ_j равен λ_j или λ_j^2 в зависимости от вида интегрируемой системы.

Интегрируемость обобщенной системы можно доказать, построив ее представление Лакса. Настоящая работа посвящена ОДК дискретных интегрируемых систем. В качестве примеров рассмотрены иерархии цепочки Тоды, Каца–ван Мербеке и Абловица–Ладика, для которых построены ОДК, а также представление Лакса; тем самым показано, что новые системы представляют собой интегрируемые обобщения исходных дискретных систем.

В работе [14] путем комбинации уравнений отрицательных и положительных порядков введены смешанные иерархии солитонных уравнений и показано, что системы, полученные в результате деформации Купершмидта, являются частными представителями смешанных солитонных иерархий. К смешанной иерархии солитонных уравнений из работы [14], имеющих один неголономный член, относятся некоторые частные случаи неголономных деформированных уравнений. Наша ОДК допускает N неголономных членов.

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 найдена ОДК иерархии Тоды. Раздел 3 посвящен ОДК иерархии Каца–ван Мербеке. В разделе 4 получена ОДК иерархии Абловица–Ладика. Некоторые выводы представлены в разделе 5.

2. ОБОБЩЕННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КУПЕРШМИДТА ИЕРАРХИИ ТОДЫ

Напомним некоторые фундаментальные понятия теории дискретных интегрируемых систем. Возьмем функцию $f = f(n, t)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$. Определим оператор смещения E и разностный оператор D следующим образом:

$$(Ef)(n) = f(n+1), \quad (E^{-1}f)(n) = f(n-1), \quad (Df)(n) = (E-1)f(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

при этом положим $f^{(j)} = E^j f$, $j \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим дискретную задачу на собственные значения для иерархии Тоды [18]:

$$\Psi^{(-1)} = U(u, v, \lambda)\Psi, \quad U(u, v, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v^{(1)} & \lambda - u \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Сначала обратимся к стационарному уравнению нулевой кривизны для производящей функции Γ :

$$\Gamma^{(-1)}U - U\Gamma = 0, \quad \Gamma = \sum_{i=0}^{+\infty} \Gamma_i \lambda^{-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} \lambda^{-i},$$

где a_i , b_i , c_i – функции параметров n и t . В общем случае справедливы рекуррентные формулы

$$Da_{i+1} = u^{(1)}Da_i - c_i - b_i^{(1)}v^{(2)}, \quad b_{i+1} = u^{(1)}b_i - a_i^{(1)} - a_i, \quad c_i = -v^{(1)}b_i^{(-1)},$$

где в качестве начальных использованы следующие данные: $a_0 = 1/2$, $b_0 = c_0 = 0$.

Определим матрицу модификации $\Delta_m = \text{diag}(b_{m+1} + \delta, \delta)$, в которой δ – произвольная константа. Пусть

$$\Psi_{t_m} = V_m \Psi, \quad V_m = (\lambda^m \Gamma)_+ + \Delta_m = \sum_{i=0}^m \Gamma_i \lambda^{m-i} + \Delta_m. \quad (2.2)$$

Тогда условие совместности уравнений (2.1) и (2.2) сводится к представлению нулевой кривизны для иерархии цепочки Тоды:

$$U_{t_m} = UV_m - V_m^{(-1)}U.$$

При $m = 1$ получим известное уравнение Тоды

$$v_t = v(u^{(-1)} - u), \quad u_t = v - v^{(1)}.$$

Бигамильтонова структура иерархии Тоды имеет вид (см., например, работу [19])

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(T)} \begin{pmatrix} a_{m+1}^{(-1)}/v \\ -b_{m+1}^{(-1)} \end{pmatrix} = K^{(T)} \begin{pmatrix} a_m^{(-1)}/v \\ -b_m^{(-1)} \end{pmatrix},$$

где

$$J^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & v(E^{-1} - 1) \\ (1 - E)v & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{(T)} = \begin{pmatrix} -vEv + vE^{-1}v & -vu + vE^{-1}u \\ vu - uEv & vE^{-1} - Ev \end{pmatrix}$$

– два стандартных гамильтоновых оператора.

Теперь выведем формулы для величин $\delta\lambda_j/\delta v$ и $\delta\lambda_j/\delta u$, используя уравнение (2.1) и его сопряженное и полагая $\lambda = \lambda_j$. Введем оператор $L = v^{(1)}E + u + E^{-1}$ вместе с сопряженным оператором $L^* = vE^{-1} + u + E$. Тогда получим $L\psi_j = \lambda_j\psi_j$ и $L^*\phi_j = \lambda_j\phi_j$. Предположим, что L , λ_j , ψ_j и ϕ_j подвергаются возмущению ε . При этом их можно считать функциями от этого возмущения ε . Более того, можно подобрать ϕ_j так, что $\langle\psi_j, \phi_j\rangle = 1$, где скалярное произведение определяется по формуле $\langle f, g \rangle = \sum_n f(n)g(n)$. Учитывая эти предположения, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \frac{d\langle\lambda_j\psi_j, \phi_j\rangle}{d\varepsilon} = \frac{d\langle L\psi_j, \phi_j\rangle}{d\varepsilon} = \\ &= \left\langle \frac{dL}{d\varepsilon} \psi_j, \phi_j \right\rangle + \left\langle L \frac{d\psi_j}{d\varepsilon}, \phi_j \right\rangle + \left\langle L\psi_j, \frac{d\phi_j}{d\varepsilon} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{dv^{(1)}}{d\varepsilon} \psi_j^{(1)} + \frac{du}{d\varepsilon} \psi_j, \phi_j \right\rangle + \left\langle \frac{d\psi_j}{d\varepsilon}, L^* \phi_j \right\rangle + \left\langle L\psi_j, \frac{d\phi_j}{d\varepsilon} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{dv^{(1)}}{d\varepsilon} \psi_j^{(1)} + \frac{du}{d\varepsilon} \psi_j, \phi_j \right\rangle + \lambda_j \frac{d\langle\psi_j, \phi_j\rangle}{d\varepsilon} = \left\langle \frac{dv^{(1)}}{d\varepsilon} \psi_j^{(1)} + \frac{du}{d\varepsilon} \psi_j, \phi_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{pmatrix} \delta\lambda_j/\delta v \\ \delta\lambda_j/\delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_j\phi_j^{(-1)} \\ \psi_j\phi_j \end{pmatrix}.$$

Положим $\gamma_j = \lambda_j$, тогда уравнения (1.2) порождают новую обобщенную иерархию цепочки Тоды:

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(T)} \left(\begin{pmatrix} a_{m+1}^{(-1)} \\ -b_{m+1}^{(-1)} \end{pmatrix} / v - \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)} \\ \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j \end{pmatrix} \right), \quad (2.3a)$$

$$(K^{(T)} - \lambda_j J^{(T)}) \begin{pmatrix} \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)} \\ \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3b)$$

Заметим, что функции $\bar{\psi}_j$ и $\bar{\phi}_j$ в нашей новой деформированной системе больше не являются собственными и сопряженными собственными функциями спектральной задачи. Они представляют собой решения уравнений (2.3b). Упростив эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} -v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j + v^{(-1)}\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j^{(-2)} - u\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j + \\ + u^{(-1)}\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j^{(-1)} - \lambda_j\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j^{(-1)} + \lambda_j\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j = 0, \\ v u \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)} - u v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j + v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j^{(-1)} - \\ - v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j^{(1)} + \lambda_j v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j - \lambda_j v\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)} = 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$f_j = u\bar{\psi}_j + v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)} + \bar{\psi}_j^{(-1)} - \lambda_j\bar{\psi}_j, \quad g_j = u\bar{\phi}_j + v\bar{\phi}_j^{(-1)} + \bar{\phi}_j^{(1)} - \lambda_j\bar{\phi}_j,$$

приведем эти уравнения к виду

$$\bar{\phi}_j f_j - \bar{\psi}_j^{(-1)} g_j^{(-1)} = 0, \quad v\bar{\phi}_j^{(-1)} f_j - v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)} g_j = 0.$$

Отсюда следует, что

$$f_j = \frac{\mu_j}{v\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)}}, \quad g_j = \frac{\mu_j}{v^{(1)}\bar{\psi}_j\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j}.$$

Здесь μ_j – некоторые произвольные константы. Итак, упростив уравнения (2.3b), мы видим, что наши новые уравнения связи суть не что иное, как исходная спектральная задача, дополненная несколькими членами с некоторыми произвольными константами μ_j . ОДК иерархии цепочки Тоды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{t_m} &= J^{(T)} \left(\begin{pmatrix} a_{m+1}^{(-1)} \\ -b_{m+1}^{(-1)} \end{pmatrix} / v - \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)} \\ \bar{\psi}_j\bar{\phi}_j \end{pmatrix} \right), \\ u\bar{\psi}_j + v^{(1)}\bar{\psi}_j^{(1)} + \bar{\psi}_j^{(-1)} &= \lambda_j\bar{\psi}_j + \frac{\mu_j}{v\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j\bar{\phi}_j^{(-1)}}, \\ u\bar{\phi}_j + v\bar{\phi}_j^{(-1)} + \bar{\phi}_j^{(1)} &= \lambda_j\bar{\phi}_j + \frac{\mu_j}{v^{(1)}\bar{\psi}_j\bar{\psi}_j^{(1)}\bar{\phi}_j}. \end{aligned}$$

Можно показать, что в качестве связей в ОДК иерархии Тоды выступают спектральная и ее сопряженная задачи, дополненные несколькими неголономными членами с произвольными постоянными μ_j .

ОДК уравнения Тоды при $m = 1$ имеет вид

$$v_t = v \left(u^{(-1)} + \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j^{(-1)} \bar{\phi}_j^{(-1)} \right) - v \left(u + \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j \bar{\phi}_j \right), \quad (2.4a)$$

$$u_t = v \left(1 + \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j \bar{\phi}_j^{(-1)} \right) - v^{(1)} \left(1 + \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j^{(1)} \bar{\phi}_j \right), \quad (2.4б)$$

$$u \bar{\psi}_j + v^{(1)} \bar{\psi}_j^{(1)} + \bar{\psi}_j^{(-1)} = \lambda_j \bar{\psi}_j + \frac{\mu_j}{v \bar{\psi}_j \bar{\phi}_j \bar{\phi}_j^{(-1)}}, \quad (2.4в)$$

$$u \bar{\phi}_j + v \bar{\phi}_j^{(-1)} + \bar{\phi}_j^{(1)} = \lambda_j \bar{\phi}_j + \frac{\mu_j}{v^{(1)} \bar{\psi}_j \bar{\psi}_j^{(1)} \bar{\phi}_j}. \quad (2.4г)$$

Ее представление Лакса есть

$$\begin{aligned} (v^{(1)} E + u + E^{-1}) \psi &= \lambda \psi, \\ -\psi_t &= v^{(1)} \psi^{(1)} + \sum_{j=1}^N \frac{v^{(1)} \bar{\phi}_j}{\lambda - \lambda_j} (\psi \bar{\psi}_j^{(1)} - \psi^{(1)} \bar{\psi}_j). \end{aligned}$$

Условие совместности данной системы при учете уравнений (2.4в) и (2.4г) дает уравнения (2.4а) и (2.4б). Интересной задачей является поиск пары Лакса, зависящей от параметров μ_j и порождающей систему (2.4). Этот вопрос будет изучаться в последующих работах.

Если мы положим $\lambda_j = 0$, то уравнения (2.4) сведутся к деформации Купершмидта уравнений Тоды. Если положить $\mu_j = 0$, то уравнения (2.4) сводятся к уравнению Тоды с самосогласованными источниками [20].

3. ОБОБЩЕННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КУПЕРШМИДТА ИЕРАРХИИ КАЦА–ВАН МЕРБЕКЕ

Рассмотрим задачу на собственные значения для иерархии Каца–ван Мербеке [21]:

$$(E + v E^{-1}) \psi = \lambda \psi.$$

Сопряженное уравнение имеет вид

$$(E^{-1} + E v) \phi = \lambda \phi.$$

Задачу на собственные значения можно представить в матричной форме

$$E \begin{pmatrix} \psi^{(-1)} \\ \psi \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi^{(-1)} \\ \psi \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v & \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Чтобы получить иерархию эволюционных уравнений, связанных с задачей на собственные значения, мы прежде всего решим стационарное дискретное уравнение нулевой кривизны $\Gamma^{(1)}U - U\Gamma = 0$. Пусть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{+\infty} \Gamma_i \lambda^{-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} \lambda^{-i}.$$

Выберем начальные данные в виде $a_0 = 1/2$, $b_0 = 0$, $b_1 = -1$. Можно получить рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} b_{2i} &= c_{2i} = a_{2i+1} = 0, & c_{2i+1} &= -vb_{2i+1}^{(1)}, \\ b_{2i+1} &= -(a_{2i}^{(-1)} + a_{2i}), & c_{2i+1}^{(1)} + vb_{2i+1} &= a_{2i+2}^{(1)} - a_{2i+2}, \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots$$

В качестве вспомогательной линейной задачи возьмем уравнение

$$\psi_{t_m} = V_{2m}\psi, \quad V_{2m} = (\Gamma\lambda^{2m})_+ + \Delta_{2m}, \quad (3.2)$$

где

$$(\Gamma\lambda^{2m})_+ + \Delta_{2m} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m a_{2i}\lambda^{2m-2i} & \sum_{i=0}^{m-1} b_{2i+1}\lambda^{2m-2i-1} \\ \sum_{i=0}^{m-1} c_{2i+1}\lambda^{2m-2i-1} & -\sum_{i=0}^m a_{2i}\lambda^{2m-2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{2m+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие совместности уравнений (3.1) и (3.2) сводится к представлению нулевой кривизны для иерархии Каца-ван Мербеке:

$$U_{t_m} = V_{2m}^{(1)}U - UV_{2m}.$$

При $m = 1$ получаем уравнение Каца-ван Мербеке $v_t = v(v^{(-1)} - v^{(1)})$.

Введем гамильтоновы операторы для иерархии Каца-ван Мербеке:

$$\begin{aligned} J^{(\text{KvM})} &= v(E^{-1} - E)v, \\ K^{(\text{KvM})} &= v(vE^{-1} + v^{(-1)}E^{-1} + v^{(-1)}E^{-2} - vE - v^{(1)}E^2 - v^{(1)}E)v. \end{aligned}$$

Теперь иерархию Каца-ван Мербеке можно представить в бигамильтоновой форме

$$v_{t_m} = J^{(\text{KvM})} \frac{\delta H_{2m}}{\delta v} = K^{(\text{KvM})} \frac{H_{2m-2}}{\delta v},$$

где $H_{2m} = -b_{2m+1}/2m$ есть гамильтонова функция. Нетрудно найти, что

$$\frac{\delta \lambda_j}{\delta v} = \psi_j^{(-1)} \phi_j.$$

Новая обобщенная иерархия Каца–ван Мербеке строится следующим образом:

$$v_{t_m} = J^{(\text{KvM})} \frac{\delta H_{2m}}{\delta v} + J^{(\text{KvM})} \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j^{(-1)} \bar{\phi}_j, \quad (3.3a)$$

$$(K^{(\text{KvM})} - \lambda_j^2 J^{(\text{KvM})})(\bar{\psi}_j^{(-1)} \bar{\phi}_j) = 0. \quad (3.3b)$$

Предположим, что

$$(E + vE^{-1})\bar{\psi}_j = \lambda_j \bar{\psi}_j + f_j, \quad (E^{-1} + Ev)\bar{\phi}_j = \lambda_j \bar{\phi}_j + g_j. \quad (3.4)$$

Упрощая (3.3b), получим

$$\begin{aligned} & (vv^{(-1)}\bar{\psi}_j^{(-2)} - v^{(1)}\bar{\psi}_j)g_j + (v^{(-1)}\bar{\phi}_j^{(-1)} - vv^{(1)}\bar{\phi}_j^{(1)})f_j^{(-1)} + \\ & + v^{(-1)}(\lambda_j \bar{\psi}_j^{(-2)} - \bar{\psi}_j^{(-1)})g_j^{(-1)} + v^{(-1)}(\lambda_j \bar{\phi}_j^{(-1)} - v\bar{\phi}_j)f_j^{(-2)} - \\ & - v^{(1)}(\lambda_j \bar{\psi}_j - v\bar{\psi}_j^{(-1)})g_j^{(1)} - v^{(1)}(\lambda_j \bar{\phi}_j^{(1)} - \bar{\phi}_j)f_j + \\ & + v^{(-1)}g_j^{(-1)}f_j^{(-2)} - v^{(1)}g_j^{(1)}f_j + (v^{(1)} - v^{(-1)})(\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j^{(-1)} - v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Умножим первое из уравнений (3.4) на $\bar{\phi}_j$, а второе – на $\bar{\psi}_j$ и найдем разность полученных выражений. Но сначала заметим, что

$$\bar{\phi}_j f_j - \bar{\psi}_j g_j = (E - 1)(\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j^{(-1)} - v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j).$$

Теперь, предположив, что

$$v\bar{\phi}_j^{(-1)}f_j^{(-1)} = v\bar{\psi}_j g_j, \quad (3.6)$$

получим

$$\bar{\psi}_j g_j = \bar{\psi}_j \bar{\phi}_j^{(-1)} - v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j. \quad (3.7)$$

Подставляя равенство (3.7) в уравнение (3.5) и полагая

$$v^{(1)}\bar{\phi}_j^{(1)}f_j = v\bar{\psi}_j^{(-1)}g_j, \quad (3.8)$$

мы видим, что уравнение (3.5) выполнено. С учетом предположений (3.6) и (3.8) запишем решения f_j и g_j в виде

$$f_j = \frac{\mu_j}{v^{(1)}\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j \bar{\phi}_j^{(1)}}, \quad g_j = \frac{\mu_j}{v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j},$$

где μ_j – некоторые произвольные постоянные. Таким образом, ОДК иерархии Каца–ван Мербеке можно представить как

$$\begin{aligned} v_{t_m} &= J^{(\text{KvM})} \frac{\delta H_{2m}}{\delta v} + J^{(\text{KvM})} \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j^{(-1)} \bar{\phi}_j, \\ \bar{\psi}_j^{(1)} + v\bar{\psi}_j^{(-1)} &= \lambda_j \bar{\psi}_j + \frac{\mu_j}{v^{(1)}\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j \bar{\phi}_j^{(1)}}, \\ \bar{\phi}_j^{(-1)} + v^{(1)}\bar{\phi}_j^{(1)} &= \lambda_j \bar{\phi}_j + \frac{\mu_j}{v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\psi}_j \bar{\phi}_j}. \end{aligned}$$

Если $m = 1$, то ОДК иерархии Каца–ван Мербеке принимает вид

$$v_t = v(v^{(-1)} - v^{(1)}) + \sum_{j=1}^N (vv^{(-1)}\bar{\psi}_j^{(-2)}\bar{\phi}_j^{(-1)} - vv^{(1)}\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j^{(1)}), \quad (3.9a)$$

$$\bar{\psi}_j^{(1)} + v\bar{\psi}_j^{(-1)} = \lambda_j\bar{\psi}_j + \frac{\mu_j}{v^{(1)}\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j\bar{\phi}_j^{(1)}}, \quad (3.9б)$$

$$\bar{\phi}_j^{(-1)} + v^{(1)}\bar{\phi}_j^{(1)} = \lambda_j\bar{\phi}_j + \frac{\mu_j}{v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j} \quad (3.9в)$$

и имеет пару Лакса

$$\psi^{(1)} + v\psi^{(-1)} = \lambda\psi,$$

$$\psi_t = \lambda v\psi^{(-1)} - \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + v\right)\psi + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2} v\bar{\psi}_j^{(-1)}\bar{\phi}_j\psi - \frac{\lambda\lambda_j}{\lambda^2 - \lambda_j^2} v\bar{\psi}_j\bar{\phi}_j\psi^{(-1)}.$$

Условие совместности данной системы при выполнении уравнений (3.9б) и (3.9в) порождает уравнение (3.9а). Интересно также найти пару Лакса с параметрами μ_j , приводящую к системе (3.9). Этот вопрос будет изучен в последующих работах.

Если положить $\lambda_j = 0$, то ОДК уравнения Каца–ван Мербеке (3.9) сводится к частному случаю деформации Купершмидта. Если положить $\mu_j = 0$, то уравнения (3.9) приводят к уравнению Каца–ван Мербеке с самосогласованными источниками.

4. ОБОБЩЕННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КУПЕРШМИДТА ИЕРАХИИ АБЛОВИЦА–ЛАДИКА

Рассмотрим дискретную изоспектральную задачу Абловица–Ладика [22]:

$$E\psi = U\psi, \quad U = \begin{pmatrix} z & Q \\ R & 1/z \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $Q = Q(n, t)$, $R = R(n, t)$ и z – спектральный параметр. Сопряженная ей задача имеет вид

$$E^{(-1)}\phi = \phi U, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2).$$

Для вывода иерархии Абловица–Ладика нам нужно сначала решить дискретное уравнение нулевой кривизны $(E\Gamma)U - U\Gamma = 0$. Полагая

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

получим

$$\begin{aligned} A^{(1)}z + B^{(1)}R - Az - CQ &= 0, & A^{(1)}Q + B^{(1)}\frac{1}{z} - Bz + AQ &= 0, \\ C^{(1)}z - A^{(1)}R - AR - C\frac{1}{z} &= 0, & C^{(1)}Q - A^{(1)}\frac{1}{z} - BR + A\frac{1}{z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Данные выражения можно разложить в ряды по степеням z и $1/z$ [23].

4.1. Разложение матрицы Γ в ряд по степеням $1/z$. Предположим, что

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_{2i}z^{-2i} & B_{2i+1}z^{-2i-1} \\ C_{2i+1}z^{-2i-1} & -A_{2i}z^{-2i} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Тогда из рекуррентных соотношений (4.3) следуют равенства

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} - A_0 &= 0, & B_1 &= Q(A_0^{(1)} + A_0), & C_1^{(1)} &= R(A_0^{(1)} + A_0), \\ A_{2i}^{(1)} - A_{2i} &= QC_{2i-1} - RB_{2i-1} = QC_{2i+1}^{(1)} - RB_{2i+1}, \\ B_{2i+1} &= Q(A_{2i}^{(1)} + A_{2i}) + B_{2i-1}^{(1)}, & C_{2i+1}^{(1)} &= R(A_{2i}^{(1)} + A_{2i}) + C_{2i-1}, & i &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где в качестве начального можно взять значение $A_0 = 1/2$.

Запишем иерархию Абловица–Ладика в гамильтоновой форме [23]

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(\text{AL})} \frac{\delta H_m}{\delta u} = K^{(\text{AL})} \frac{\delta H_{m-1}}{\delta u}; \quad (4.5)$$

здесь $H_m = -A_{2m}/m$, а гамильтоновы операторы имеют вид

$$J^{(\text{AL})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - RQ \\ RQ - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{(\text{AL})} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= QD^{-1}Q^{(1)}(1 - RQ) + (1 - RQ)Q^{(1)}D^{-1}EQ, \\ K_{12} &= E(1 - RQ) - QD^{-1}R^{(1)}E^{(2)}(1 - RQ) - (1 - RQ)Q^{(1)}D^{-1}ER, \\ K_{21} &= -E^{(-1)}(1 - RQ) - RD^{(-1)}QE^{(-1)}(1 - RQ) + (RQ - 1)R^{(-1)}D^{-1}Q, \\ K_{22} &= RD^{-1}RE(1 - RQ) + (1 - RQ)R^{(-1)}D^{-1}R. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\delta z}{\delta Q} = \psi_2 \phi_1, \quad \frac{\delta z}{\delta R} = \psi_1 \phi_2.$$

При этом ОДК иерархии Абловица–Ладика имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(\text{AL})} \begin{pmatrix} \frac{\delta H_m}{\delta Q} - \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}_{2,j} \tilde{\phi}_{1,j} \\ \frac{\delta H_m}{\delta R} - \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}_{1,i} \tilde{\phi}_{2,i} \end{pmatrix}, \quad (4.7a)$$

$$(K^{(\text{AL})} - z_j^2 J^{(\text{AL})}) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{2,j} \tilde{\phi}_{1,j} \\ \tilde{\psi}_{1,j} \tilde{\phi}_{2,j} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.7b)$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} E\tilde{\psi}_{1,j} &= z_j \tilde{\psi}_{1,j} + Q\tilde{\psi}_{2,j} + f_{1,j}, & E\tilde{\psi}_{2,j} &= R\tilde{\psi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \tilde{\psi}_{2,j} + f_{2,j}, \\ E^{(-1)}\tilde{\phi}_{1,j} &= z_j \tilde{\phi}_{1,j} + R\tilde{\phi}_{2,j} + g_{1,j}, & E^{(-1)}\tilde{\phi}_{2,j} &= Q\tilde{\phi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \tilde{\phi}_{2,j} + g_{2,j}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Упрощая уравнение (4.76), получим

$$\begin{aligned}
 & QD^{-1}Q^{(1)}(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} + (1-RQ)Q^{(1)}D^{-1}EQ\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} + \\
 & + E(1-RQ)\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} - QD^{-1}R^{(1)}E^{(2)}(1-RQ)\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} - \\
 & - (1-RQ)Q^{(1)}D^{-1}ER\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} - z_j^2(1-RQ)\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} = 0, \\
 & E^{(-1)}(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} + RD^{-1}QE^{(-1)}(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} + \\
 & + (1-RQ)R^{(-1)}D^{-1}Q\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} - RD^{-1}RE(1-RQ)\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} - \\
 & - (1-RQ)R^{(-1)}D^{-1}R\tilde{\psi}_{1,j}\tilde{\phi}_{2,j} - z_j^2(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} = 0.
 \end{aligned}$$

Подставив соотношения (4.8) в данные уравнения, имеем

$$\begin{aligned}
 & z_j(1-RQ)(\tilde{\phi}_{2,j}f_{1,j} - \tilde{\psi}_{1,j}^{(1)}g_{2,j}^{(1)}) + \\
 & + (1-RQ)Q^{(1)}[\tilde{\psi}_{1,j}^{(1)}g_{1,j}^{(1)} + D^{-1}E(\tilde{\psi}_{1,j}g_{1,j} - \tilde{\phi}_{1,j}f_{1,j})] + \\
 & + QD^{-1}[(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}(Q^{(1)}g_{1,j}^{(1)} - zg_{2,j}^{(1)}) - (1-RQ)^{(1)}\tilde{\phi}_{2,j}^{(1)}(Rf_{1,j} - z_jf_{2,j})] = 0, \\
 & z_j(1-RQ)(\tilde{\psi}_{2,j}g_{1,j} - \tilde{\phi}_{1,j}^{(-1)}f_{2,j}^{(-1)}) + \\
 & + (1-RQ)R^{(-1)}[\tilde{\phi}_{1,j}^{(-1)}f_{1,j}^{(-1)} + D^{-1}(\tilde{\psi}_{1,j}g_{1,j} - \tilde{\phi}_{1,j}f_{1,j})] + \\
 & + RD^{-1}[(1-RQ)\tilde{\psi}_{2,j}(Q^{(1)}g_{1,j}^{(1)} - zg_{2,j}^{(1)}) - (1-RQ)^{(1)}\tilde{\phi}_{2,j}^{(1)}(Rf_{1,j} - z_jf_{2,j})] = 0.
 \end{aligned}$$

Сначала предположим, что

$$f_{2,j} = \frac{R}{z_j}f_{1,j}, \quad g_{2,j} = \frac{Q}{z_j}g_{1,j},$$

тогда приведенные выше выражения упрощаются, и мы находим, что

$$f_{1,j} = \frac{\mu_j}{\tilde{\phi}_{1,j} - z_j\tilde{\phi}_{2,j}/Q^{(-1)}}, \quad g_{1,j} = \frac{\mu_j}{\tilde{\psi}_{1,j} - z_j\tilde{\psi}_{2,j}/R^{(-1)}},$$

где μ_j – некоторые произвольные постоянные. Таким образом, ОДК иерархии Абловица–Ладика можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right)_{t_m} &= J^{(\text{AL})} \left(\begin{matrix} \frac{\delta H_m}{\delta Q} - \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}_{2,j}\tilde{\phi}_{1,j} \\ \frac{\delta H_m}{\delta R} - \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}_{1,i}\tilde{\phi}_{2,i} \end{matrix} \right), \\
 E\tilde{\psi}_{1,j} &= z_j\tilde{\psi}_{1,j} + Q\tilde{\psi}_{2,j} + \frac{\mu_j}{\tilde{\phi}_{1,j} - z_j\tilde{\phi}_{2,j}/Q^{(-1)}}, \\
 E\tilde{\psi}_{2,j} &= R\tilde{\psi}_{1,j} + \frac{1}{z_j}\tilde{\psi}_{2,j} + \frac{\mu_j R}{z_j(\tilde{\phi}_{1,j} - z_j\tilde{\phi}_{2,j}/Q^{(-1)})}, \\
 E^{(-1)}\tilde{\phi}_{1,j} &= z_j\tilde{\phi}_{1,j} + R\tilde{\phi}_{2,j} + \frac{\mu_j}{\tilde{\psi}_{1,j} - z_j\tilde{\psi}_{2,j}/R^{(-1)}}, \\
 E^{(-1)}\tilde{\phi}_{2,j} &= Q\tilde{\phi}_{1,j} + \frac{1}{z_j}\tilde{\phi}_{2,j} + \frac{\mu_j Q}{z_j(\tilde{\psi}_{1,j} - z_j\tilde{\psi}_{2,j}/R^{(-1)})}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ее представление Лакса имеет вид

$$E\psi = U\psi, \quad \psi_t = \left(V_m + \sum_{j=1}^N X_j \right) \psi,$$

где

$$V_m = (\Gamma z^{2m})_+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{2m} \end{pmatrix},$$

$$X_j = \frac{1}{z^2 - z_j^2} \left[\begin{pmatrix} z_j^2 \tilde{\psi}_{1,j} \tilde{\phi}_{1,j}^{(-1)} & z z_j \tilde{\psi}_{1,j} \tilde{\phi}_{2,j}^{(-1)} \\ z z_j \tilde{\psi}_{2,j} \tilde{\phi}_{1,j}^{(-1)} & z^2 \tilde{\psi}_{2,j} \tilde{\phi}_{2,j}^{(-1)} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + (\tilde{\psi}_{1,j} \tilde{\phi}_{1,j}^{(-1)} + \tilde{\psi}_{2,j} \tilde{\phi}_{2,j}^{(-1)}) \begin{pmatrix} (z^2 - 3z_j^2)/4 & 0 \\ 0 & (z_j^2 - 3z^2)/4 \end{pmatrix} \right].$$

Если положить $\mu_j = 0$, то обобщенная система (4.9) сводится к иерархии Абловица–Ладика с самосогласованными источниками (которая соответствует производящей матрице Γ , разложенной в ряд по степеням $1/z$).

4.2. Разложение матрицы Γ в ряд по степеням z . Аналогично, представляя матрицу Γ (4.2) в виде ряда

$$\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & -\bar{A} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{A}_{2i} z^{2i} & \bar{B}_{2i+1} z^{2i+1} \\ \bar{C}_{2i+1} z^{2i+1} & -\bar{A}_{2i} z^{2i} \end{pmatrix},$$

получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0^{(1)} - \bar{A}_0 &= 0, \quad \bar{B}_1^{(1)} = -Q(\bar{A}_0^{(1)} + \bar{A}_0), \quad \bar{C}_1 = -R(\bar{A}_0^{(1)} + \bar{A}_0), \\ \bar{A}_{2i}^{(1)} - \bar{A}_{2i} &= Q\bar{C}_{2i-1}^{(1)} - R\bar{B}_{2i-1} = Q\bar{C}_{2i+1}^{(1)} - R\bar{B}_{2i+1}^{(1)}, \\ \bar{B}_{2i+1}^{(1)} &= -Q(\bar{A}_{2i}^{(1)} + \bar{A}_{2i}) + \bar{B}_{2i-1}, \quad \bar{C}_{2i+1}^{(1)} = -R(\bar{A}_{2i}^{(1)} + \bar{A}_{2i}) + \bar{C}_{2i-1}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где в качестве начального выбрано значение $\bar{A}_0 = 1/2$.

Представим иерархию Абловица–Ладика в гамильтоновой форме [21]

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(\text{AL})} \frac{\delta \bar{H}_m}{\delta u} = \bar{K}^{(\text{AL})} \frac{\delta \bar{H}_{m-1}}{\delta u};$$

здесь $\bar{H}_m = -\bar{A}_{2m}/m$, оператор $J^{(\text{AL})}$ определен в (4.6) и

$$\bar{K}^{(\text{AL})} = \begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}_{11} &= -QD^{-1}QE(1 - RQ) - (1 - RQ)Q^{(1)}D^{-1}Q, \\ \bar{K}_{12} &= E^{(-1)}(1 - RQ) + QD^{-1}RE^{(-1)}(1 - RQ) + (1 - RQ)Q^{(-1)}D^{-1}R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_{21} &= -E(1 - RQ) + RD^{-1}Q^{(1)}E^{(2)}(1 - RQ) + (1 - RQ)R^{(1)}D^{-1}EQ, \\ \bar{K}_{22} &= -RD^{-1}R^{(1)}(1 - RQ) - (1 - RQ)R^{(1)}D^{-1}ER.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили ОДК иерархии Абловица–Ладика другого типа:

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}_{t_m} = J^{(\text{AL})} \begin{pmatrix} \frac{\delta H_m}{\delta Q} - \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{1,j} \\ \frac{\delta H_m}{\delta R} - \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_{1,i} \bar{\phi}_{2,i} \end{pmatrix}, \quad \left(\bar{K}^{(\text{AL})} - \frac{1}{z_j^2} J^{(\text{AL})} \right) \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{1,j} \\ \bar{\psi}_{1,j} \bar{\phi}_{2,j} \end{pmatrix} = 0.$$

Предположим, что

$$\begin{aligned}E\bar{\psi}_{1,j} &= z_j \bar{\psi}_{1,j} + Q\bar{\psi}_{2,j} + \bar{f}_{1,j}, & E\bar{\psi}_{2,j} &= R\bar{\psi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \bar{\psi}_{2,j} + \bar{f}_{2,j}, \\ E^{(-1)}\bar{\phi}_{1,j} &= z_j \bar{\phi}_{1,j} + R\bar{\phi}_{2,j} + \bar{g}_{1,j}, & E^{(-1)}\bar{\phi}_{2,j} &= Q\bar{\phi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \bar{\phi}_{2,j} + \bar{g}_{2,j}.\end{aligned}$$

Как и в случае разложения матрицы Γ в ряд по степеням $1/z$, предположим с некоторым упрощением, что $\bar{f}_{1,j} = zQ\bar{f}_j^2$ и $\bar{g}_{1,j} = zR\bar{g}_j^2$, при этом

$$\bar{f}_{2,j} = \frac{\mu_j}{\bar{\phi}_{2,j} + \bar{\phi}_{1,j}/z_j R^{(1)}}, \quad \bar{g}_{2,j} = \frac{\mu_j}{\bar{\psi}_{2,j} + \bar{\psi}_{1,j}/z_j Q^{(1)}},$$

где μ_j – некоторые произвольные постоянные. Таким образом, мы получили еще один тип ОДК иерархии Абловица–Ладика:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}_{t_m} &= J^{(\text{AL})} \begin{pmatrix} \frac{\delta H_m}{\delta Q} - \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{1,j} \\ \frac{\delta H_m}{\delta R} - \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_{1,i} \bar{\phi}_{2,i} \end{pmatrix}, \\ E\bar{\psi}_{1,j} &= z_j \bar{\psi}_{1,j} + Q\bar{\psi}_{2,j} + \frac{\mu_j z_j Q}{\bar{\phi}_{2,j} + \bar{\phi}_{1,j}/z_j R^{(1)}}, \\ E\bar{\psi}_{2,j} &= R\bar{\psi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \bar{\psi}_{2,j} + \frac{\mu_j}{\bar{\phi}_{2,j} + \bar{\phi}_{1,j}/z_j R^{(1)}}, \\ E^{(-1)}\bar{\phi}_{1,j} &= z_j \bar{\phi}_{1,j} + R\bar{\phi}_{2,j} + \frac{\mu_j z_j R}{\bar{\psi}_{2,j} + \bar{\psi}_{1,j}/z_j Q^{(1)}}, \\ E^{(-1)}\bar{\phi}_{2,j} &= Q\bar{\phi}_{1,j} + \frac{1}{z_j} \bar{\phi}_{2,j} + \frac{\mu_j}{\bar{\psi}_{2,j} + \bar{\psi}_{1,j}/z_j Q^{(1)}}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ее представление Лакса есть

$$E\psi = U\psi, \quad \psi_t = \left(\bar{V}_m + \sum_{j=1}^N X_j \right) \psi,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V}_m &= (\bar{\Gamma} z^{-2m})_- + \begin{pmatrix} -\bar{A}_{2m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_j &= \frac{1}{z^2 - z_j^2} \left[\begin{pmatrix} z_j^2 \bar{\psi}_{1,j} \bar{\phi}_{1,j}^{(-1)} & z z_j \bar{\psi}_{1,j} \bar{\phi}_{2,j}^{(-1)} \\ z z_j \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{1,j}^{(-1)} & z^2 \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{2,j}^{(-1)} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\psi}_{1,j} \bar{\phi}_{1,j}^{(-1)} + \bar{\psi}_{2,j} \bar{\phi}_{2,j}^{(-1)}) \begin{pmatrix} (z^2 - 3z_j^2)/4 & 0 \\ 0 & (z_j^2 - 3z^2)/4 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Если положить $\mu_j = 0$, то обобщенная система (4.11) сводится к иерархии Абловица–Ладика с самосогласованными источниками (которая соответствует производящей матрице Γ , разложенной в ряд по степеням z). Таким образом, мы получили два типа обобщенных преобразований Купершмидта иерархии Абловица–Ладика, соответствующие гамильтоновым операторам (4.6) и (4.10).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили некоторые новые интегрируемые дискретные системы и их представления Лакса с помощью ОДК для бигамильтоновых систем. Изучены ОДК иерархий Тоды, Каца–ван Мербеке и Абловица–Ладика. Мы нашли некоторую связь между указанными новыми дискретными системами и уравнениями с самосогласованными источниками [4], [5], [7], [20]. Мы показали, что предложенный метод можно использовать для построения новых дискретных (1+1)-мерных интегрируемых систем. Деформация Купершмидта для случая более высокой размерности будет рассмотрена в будущем.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие повышению качества статьи. Работа поддержана National Science Foundation of China (гранты № 10901090, 11171175, 11201477) и Chinese Universities Scientific Fund (грант № 2011JS041). Е.-Х. Хуан также поддержан Special Funds for Co-construction Project of Beijing.

Список литературы

- [1] B. A. Kupershmidt, *Phys. Lett. A*, **372**:15 (2008), 2634–2639, arXiv: 0709.3848.
- [2] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas, *Physica D*, **4**:1 (1981), 47–66.
- [3] P. J. Olver, P. Rosenau, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1900–1906.
- [4] V. K. Mel’nikov, *Lett. Math. Phys.*, **7**:2 (1983), 129–136.
- [5] V. K. Mel’nikov, *Commun. Math. Phys.*, **112**:4 (1987), 639–652.
- [6] Y. B. Zeng, W.-X. Ma, R. L. Lin, *J. Math. Phys.*, **41**:8 (2000), 5453–5489.
- [7] R. L. Lin, Y. B. Zeng, W.-X. Ma, *Physica A*, **291**:1–4 (2001), 287–298.
- [8] R. L. Lin, Y. Q. Yao, Y. B. Zeng, *SIGMA*, **2** (2006), 096, 8 pp.
- [9] R. L. Lin, H. Peng, M. Mañas, *J. Phys. A*, **43**:43 (2010), 434022, 15 pp., arXiv: 1005.3878.
- [10] A. Karasu-Kalkanli, A. Karasu, A. Sakovich, S. Sakovich, R. Turhan, *J. Math. Phys.*, **49**:7 (2008), 073516, 10 pp.
- [11] A. Kundu, R. Sahadevan, L. Nalinidevi, *J. Phys. A*, **42**:11 (2009), 115213, 13 pp., arXiv: 0811.0924.

- [12] R. Sahadevan, L. Nalinidevi, *J. Math. Phys.*, **50**:5 (2009), 053505, 10 pp.
- [13] P. Guha, *J. Phys. A*, **42**:34 (2009), 345201, 17 pp.
- [14] R. Zhou, *J. Math. Phys.*, **50**:12 (2009), 123502, 12 pp.
- [15] Y. Q. Yao, Y. B. Zeng, *Lett. Math. Phys.*, **86**:2–3 (2008), 193–208, arXiv: 0810.1986.
- [16] Y. Q. Yao, Y. B. Zeng, *J. Math. Phys.*, **51**:6 (2010), 063503, 14 pp., arXiv: 1005.0281.
- [17] Y. Q. Yao, Y. H. Huang, Y. Wei, Y. B. Zeng, *Appl. Math. Comput.*, **218**:2 (2011), 583–591.
- [18] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, М., 1989.
- [19] R. L. Lin, W.-X. Ma, Y. B. Zeng, *J. Phys. A*, **35**:23 (2002), 4915–4928.
- [20] X. J. Liu, Y. B. Zeng, *J. Phys. A*, **38**:41 (2005), 8951–8965.
- [21] Y. B. Zeng, S. Rauch-Wojciechowski, *J. Phys. A*, **28**:13 (1995), 3825–3840.
- [22] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *J. Math. Phys.*, **16**:3 (1975), 598–603.
- [23] Y. B. Zeng, S. Rauch-Wojciechowski, *J. Phys. A*, **28**:1 (1995), 113–134.

Поступила в редакцию 3.06.2012,
после доработки 6.12.2012