Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Аминов, С. Б. Артамонов, Вырождение эллиптической системы Шлезингера, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 08:19:34

© 2013 г.

Г. А. Аминов^{*†}, С. Б. Артамонов^{*†}

ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА

Изучаются различные способы вырождения системы Шлезингера на эллиптической кривой с R отмеченными точками. Построена предельная процедура, основанная на бесконечном сдвиге параметра эллиптической кривой и сдвигах отмеченных точек. Показано, что с помощью данной процедуры можно получить неавтономную гамильтонову систему, которая описывает цепочку Тоды с дополнительными спинowymi $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы.

Ключевые слова: интегрируемые системы, изомонодромные деформации, система Шлезингера, цепочка Тоды, предел Иноземцева.

DOI: 10.4213/tmf8375

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению с помощью предельных процедур различных способов вырождения эллиптического обобщения [1]–[4] системы Шлезингера [5] и неавтономного эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка. Рассматриваемые в настоящей работе методы построения предельных процедур могут быть обобщены на связанные с эллиптической системой Шлезингера уравнения Пенлеве и интегрируемые системы, возникающие в разных областях теоретической физики. В частности, уравнения Пенлеве и Шлезингера имеют важные приложения в теории матричных моделей [6]–[8] и конформной теории поля [9], [10]. Некоторые из интегрируемых систем связаны с эффективным низкоэнергетическим действием в суперсимметричных калибровочных теориях [11]–[13].

Изучению соотношений между различными интегрируемыми системами посвящены работы [14]–[17] и другие. В работе Иноземцева [14] была предложена процедура, задающая предельную связь между цепочками Тоды и эллиптической моделью Калоджеро–Мозера. Позднее предел Иноземцева был обобщен и использован для установления связей между другими интегрируемыми системами [15]. В работе [16] построено сингулярное симплектическое преобразование системы Калоджеро–Мозера в эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок. Используя это преобразование,

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: aminov@itep.ru, artamonov@itep.ru

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

Смирнов [17] получил интегрируемые системы волчков на алгебре $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, эквивалентные N -частичным тригонометрической и рациональной моделям Калоджеро–Мозера.

Системой Шлезингера [5] называется следующая система дифференциальных уравнений первого порядка для R матриц $\mathbf{S}^i$, $i = 1, \dots, R$, зависящих от R отмеченных точек $x_j \in \mathbb{CP}^1$, $j = 1, \dots, R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}^i}{\partial x_j} &= \frac{[\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \mathbf{S}^i}{\partial x_i} &= - \sum_{j \neq i} \frac{[\mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j]}{x_i - x_j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) описывают условия сохранения монодромии линейной системы на $\mathbb{CP}^1$ вида

$$\frac{d\Psi}{dz} = \sum_{i=1}^R \frac{\mathbf{S}^i}{z - x_i} \Psi.$$

Как показано в работе [18], в случае матриц размера 2×2 и четырех отмеченных точек система Шлезингера эквивалентна уравнению Пенлеве VI [19].

Эллиптической системой Шлезингера называется построенное в работах [1]–[4] обобщение системы Шлезингера, описывающее изомонодромные деформации на эллиптической кривой. Эллиптическая система Шлезингера является неавтономной гамильтоновой системой, которая задается на пространстве R копий коалгебры Ли $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})^*$, а роль времен системы играют параметр τ эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ и положения отмеченных на Σ_τ точек x_i , $i = 1, \dots, R$. Фазовое пространство данной гамильтоновой системы представляет собой прямое произведение R копий орбит коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$, при этом каждая орбита связана с одной из отмеченных точек x_i . Таким образом, эллиптическую систему Шлезингера можно рассматривать как систему взаимодействующих неавтономных эллиптических $SL(N, \mathbb{C})$ -волчков. Автономной версией эллиптической системы Шлезингера является интегрируемая система Годена [20]–[22], которая представляет собой систему Хитчина на эллиптической кривой Σ_τ с R отмеченными точками.

Ранее из эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка мы получили цепочки Тоды в автономном случае для $N \geq 2$ [23], [24] и в неавтономном случае для $N = 2$ [25]. В настоящей работе мы построим обобщение предложенных в [23]–[25] предельных процедур на эллиптическую систему Шлезингера и получим неавтономную гамильтонову систему, которая описывает цепочку Тоды с дополнительными спинowymi $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы.

Рассматриваемая процедура основана на предложенных в [23]–[25] обобщениях предела Иноземцева [14], т. е. предельного перехода от эллиптической системы Калоджеро–Мозера к цепочке Тоды в автономном случае. Предел Иноземцева состоит из бесконечных сдвигов координат эллиптической системы Калоджеро–Мозера, перенормировки константы связи и тригонометрического предела, в котором мнимая часть параметра эллиптической кривой стремится к бесконечности. В случае неавтономной эллиптической системы Шлезингера параметр τ эллиптической кривой играет роль времени и не может быть просто устремлен к бесконечности, поэтому

мы вводим бесконечный сдвиг параметра τ с помощью замены переменной

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (1.2)$$

где первое слагаемое τ_1 играет роль времени предельной системы, а с помощью второго, постоянного, слагаемого реализуется тригонометрический предел $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$. С точки зрения эллиптической кривой в тригонометрическом пределе из комплексного тора $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ получается бесконечный комплексный цилиндр $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

В разделе 2 из системы эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка со спектральным параметром z при $N > 2$ получена неавтономная цепочка Тоды. Для этого мы наряду с заменой (1.2) осуществляем зависящий от времени сдвиг спектрального параметра $z = \tilde{z} + \tau/2$ и не зависящие от времени скейлинги координат, аналогичные предложенным ранее в работе [23].

В разделе 3 рассмотрено вырождение эллиптической системы Шлезингера, в которой оператор Лакса $L(z)$ представляет собой сумму R копий операторов Лакса эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка:

$$L(z) = \sum_{i=1}^R L^i(z - x_i).$$

Вводя различные сдвиги отмеченных точек x_i , можно для каждой копии эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка осуществить свой тип вырождения. Мы строим предельную процедуру, которая описывает два возможных варианта вырождения копий эллиптического волчка. В качестве первого варианта вырождения взята предельная процедура, описанная в разделе 2, а в качестве второго – тригонометрический предел. С целью упрощения выражений мы будем применять первый вариант вырождения к первым r копиям эллиптического волчка, а второй вариант – к остальным $p = R - r$ копиям. Для этого мы наряду с заменой (1.2) осуществим сдвиги отмеченных точек $x_i = \tilde{x}_i - \tau/2$, $i = 1, \dots, r$, и скейлинги координат соответствующих копий коалгебры Ли $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})^*$. В п. 3.1.2 показано, что получающиеся при фиксированном p предельные системы в случае $r > 1$ эквивалентны предельным системам в случае $r = 1$, в котором только одна копия эллиптического волчка переходит в цепочку Тоды. Таким образом, с помощью предложенной схемы вырождения эллиптической системы Шлезингера мы получаем неавтономную систему, которая описывает цепочку Тоды с дополнительными спиновыми $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы.

Приведем необходимые сведения о рассматриваемых системах.

1.1. Эллиптическая система Шлезингера. Эллиптическая система Шлезингера задана на пространстве R копий коалгебры Ли $\mathfrak{g}^* \sim \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})^*$:

$$\mathcal{P}_{R,N} = \bigoplus_{i=1}^R \mathfrak{g}_i^*, \quad \mathfrak{g}_i^* = \left\{ \mathbf{S}^i = \sum_{m,n} s_{mn}^i T_{mn} \right\},$$

где базис $\{T_{mn}\}$, $m, n = 0, \dots, N-1$, $m^2 + n^2 \neq 0$, определен в приложении А.

На пространстве $\mathcal{P}_{R,N}$ определена линейная пуассонова структура

$$\{s_{mn}^i, s_{kl}^j\} = 2i\delta_{ij} \sin\left(\frac{\pi(nk - ml)}{N}\right) s_{m+k, n+l}^i, \quad (1.3)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Данная пуассонова структура является вырожденной, и симплектические листы суть R копий орбит $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, R$, коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$.

Фазовое пространство эллиптической системы Шлезингера имеет вид

$$\mathcal{R}_{R,N} \sim \mathcal{P}_{R,N} / \{c^\mu(i) = c^\mu(i)_0\} \sim \prod_i \mathcal{O}_i,$$

где $c^\mu(i)$ – соответствующие орбитам $\mathcal{O}_i$ функции Казимира порядка $\mu = 2, \dots, N$.

Роль времен системы играют параметр τ эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ и положения отмеченных на Σ_τ точек x_i , $i = 1, \dots, R$. Чтобы придать положениям особых точек x_i и параметру эллиптической кривой τ смысл локальных координат в открытой клетке на пространстве модулей эллиптических кривых с R отмеченными точками, можно наложить на x_i условие $\sum_{i=1}^R x_i \in (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$.

Эллиптическая система Шлезингера является неавтономной гамильтоновой системой со следующими уравнениями движения:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{S}^i &= \{H_0, \mathbf{S}^i\}, \\ \partial_{x_k} \mathbf{S}^i &= \{H_k, \mathbf{S}^i\}, \quad i, k = 1, \dots, R, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{4\pi i} \left(\sum_{j \neq i} \sum_{m,n} s_{mn}^i s_{-m,-n}^j f \left[\frac{m}{n} \right] (x_j - x_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^R \sum_{m,n} s_{mn}^i s_{-m,-n}^i E_2 \left(\frac{m + n\tau}{N} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$H_k = - \sum_{i \neq k} \sum_{m,n} s_{mn}^k s_{-m,-n}^i \varphi \left[\frac{m}{n} \right] (x_i - x_k) \quad (1.6)$$

и

$$\varphi \left[\frac{m}{n} \right] (z) = e \left(-\frac{nz}{N} \right) \phi \left(-\frac{m + n\tau}{N}, z \right), \quad (1.7)$$

$$f \left[\frac{m}{n} \right] (z) = e \left(-\frac{nz}{N} \right) \partial_u \phi(u, z) \big|_{u=-(m+n\tau)/N}, \quad (1.8)$$

$e(z) \equiv e^{2\pi i z}$, а функции $\phi(u, z)$ и $E_k(z)$ определены в приложении Б (см. формулы (Б.3) и (Б.1) соответственно).

Гамильтоновы уравнения движения (1.4) могут быть представлены в форме уравнений нулевой кривизны

$$\begin{aligned} \partial_\tau L - \partial_z M^0 &= [L, M^0], \\ \partial_{x_k} L - \partial_z M^k &= [L, M^k], \quad k = 1, \dots, R, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$L(z) = \sum_{i=1}^R \sum_{m,n} s_{mn}^i \varphi \left[\frac{m}{n} \right] (z - x_i) T_{mn}, \quad (1.10)$$

$$M^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^R \sum_{m,n} s_{mn}^i f \left[\frac{m}{n} \right] (z - x_i) T_{mn}, \quad (1.11)$$

$$M^k(z) = - \sum_{m,n} s_{mn}^k \varphi \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right] (z - x_k) T_{mn}. \quad (1.12)$$

Гамильтонианы (1.5), (1.6) следующим образом связаны с разложением $\text{Tr } L^2(z)$ по базису эллиптических функций:

$$\frac{1}{2N} \text{Tr } L^2(z) = 2\pi i H_0 + \sum_{k=1}^R (H_{2,k} E_2(z - x_k) + H_k E_1(z - x_k)). \quad (1.13)$$

Здесь $H_{2,k}$ – квадратичные функции Казимира, соответствующие орбитам $\mathcal{O}_k$:

$$H_{2,k} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} s_{mn}^k s_{-m,-n}^k. \quad (1.14)$$

Скобки Пуассона (1.3) можно записать с помощью классической эллиптической r -матрицы $r(z)$ Белавина–Дринфельда [26]–[28]:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [r(z - w), L_1(z) + L_2(w)],$$

где

$$r(z) = - \sum_{m,n} \varphi \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right] (z) T_{mn} \otimes T_{-m,-n} \quad (1.15)$$

и $L_1(z) = L(z) \otimes \text{Id}$, $L_2(w) = \text{Id} \otimes L(w)$.

1.2. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является примером волчка Эйлера–Арнольда [29], фазовое пространство которого задается орбитой коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{R}^{\text{rot}} = \{\mathbf{S} \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C}), \mathbf{S} = g^{-1} \mathbf{S}^{(0)} g\},$$

где $g \in SL(N, \mathbb{C})$ определено по модулю левых сдвигов G_0 , коммутирующих с $\mathbf{S}^{(0)}$. На фазовом пространстве волчка $\mathcal{R}^{\text{rot}}$ существует невырожденная симплектическая форма Кириллова–Костанта $\omega^{\text{rot}} = \text{Tr} (\mathbf{S}^{(0)} (dg) g^{-1} \wedge (dg) g^{-1})$.

Динамика системы задается гамильтонианом

$$H^{\text{rot}} = -\frac{1}{2} \text{Tr } \mathbf{S} J(\mathbf{S}); \quad (1.16)$$

здесь $J(\mathbf{S}) = \sum_{m,n} J_{mn} s_{mn} T_{mn}$, где s_{mn} – координаты в базисе $\{T_{mn}\}$ алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, который образует синус-алгебру (см. приложение А),

$$J_{mn} = E_2 \left(\frac{m + n\tau}{N}, \tau \right), \quad m, n = 0, \dots, N-1, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

и $E_2(z, \tau)$ – вторая функция Эйзенштейна [30], определенная на комплексном торе $\mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$ с $\omega_1 = 1/2$, $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Уравнения движения можно записать в форме Лакса [31]:

$$\frac{dL^{\text{rot}}}{dt} = N[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}].$$

Множитель N связан с определением матриц Лакса в базисе синус-алгебры (см. приложение А):

$$L^{\text{rot}} = \sum_{m,n} s_{mn} \varphi \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right] (z) T_{mn}, \quad M^{\text{rot}} = \sum_{m,n} s_{mn} f \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right] (z) T_{mn}.$$

Гамильтониан (1.16) следующим образом связан с матрицей Лакса:

$$H^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(L^{\text{rot}})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} S^2 E_2(z, \tau). \quad (1.17)$$

Скобки Пуассона для переменных s_{mn} получаются из коммутатора $[T_{ab}, T_{cd}]$ базисных элементов T_{ab} и T_{cd} (см. формулу (A.1) приложения А),

$$\{s_{ab}, s_{cd}\} = 2i \sin \left(\frac{\pi(bc - ad)}{N} \right) s_{a+c, b+d}. \quad (1.18)$$

Переход к стандартному базису (A.2) дает $\{S_{ij}, S_{kl}\} = N(S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj})$.

1.3. Цепочки Тоды. Периодические и непериодические цепочки Тоды, состоящие из N взаимодействующих частиц, в системе центра масс заданы на фазовом пространстве

$$\mathcal{R}^T = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}): \sum_{i=1}^N u_i = 0, \sum_{i=1}^N v_i = 0 \right\}$$

с канонической симплектической формой $\omega^T = (d\mathbf{v} \wedge d\mathbf{u})$. Гамильтониан непериодической цепочки Тоды имеет вид

$$H^{\text{AT}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + 4\pi^2 M^2 \sum_{i=1}^{N-1} e(u_{i+1} - u_i),$$

для периодической цепочки необходимо добавить член, соответствующий взаимодействию между первой и последней частицами:

$$H^{\text{PT}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + 4\pi^2 M^2 \sum_{i=1}^N e(u_{i+1} - u_i), \quad u_{N+1} = u_1.$$

Уравнения движения как для периодической, так и для непериодической цепочек Тоды могут быть представлены в форме Лакса [32]–[34]

$$\frac{dL^{\text{AT}}}{dt} = [L^{\text{AT}}, M^{\text{AT}}], \quad \frac{dL^{\text{PT}}}{dt} = [L^{\text{PT}}, M^{\text{PT}}].$$

2. НЕАВТОНОМНЫЕ $SL(N, \mathbb{C})$ -ВОЛЧОК И ЦЕПЧКА ТОДЫ

Рассмотрим неавтономный эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок, в котором роль времени играет параметр эллиптической кривой τ . Пара Лакса волчка удовлетворяет уравнению изомонодромных деформаций

$$\partial_\tau L^{\text{rot}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{rot}} = N[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}], \quad (2.1)$$

которое эквивалентно гамильтоновым уравнениям движения

$$\frac{ds_{mn}}{d\tau} = \{H^{\text{rot}}, s_{mn}\}.$$

Ранее в работах [23]–[25] из эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка с помощью различных предельных процедур были получены цепочки Тоды в автономном случае для $N \geq 2$ и в неавтономном случае для $N = 2$. В данном разделе мы построим неавтономную цепочку Тоды из эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка при $N > 2$. Гамильтоновы уравнения движения такой неавтономной системы имеют вид

$$\partial_{\tau_1} u_j = N^2 v_j, \quad \partial_{\tau_1} v_j = 8\pi^3 i M^2 N^2 q_1^{1/N} (e(u_{j+1} - u_j) - e(u_j - u_{j-1})), \quad (2.2)$$

где множитель $q_1^{1/N}$ в правой части второго уравнения содержит явную зависимость от времени: $q_1 \equiv e(\tau_1)$.

Предельная процедура, как мы уже отмечали, основана на бесконечном сдвиге параметра эллиптической кривой τ , который мы вводим с помощью замены переменной $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где первое слагаемое τ_1 играет роль времени предельной системы, а с помощью второго, постоянного, слагаемого реализуется тригонометрический предел $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$. После такой замены гамильтониан неавтономного эллиптического волчка принимает вид $H^{\text{rot}} = H^{\text{rot}}(\mathbf{s}, \tau_1 + \tau_2)$. Теперь мы будем рассматривать динамику системы относительно переменной τ_1 , при этом постоянный параметр τ_2 играет роль начала отсчета времени. Гамильтоновы уравнения движения относительно τ_1

$$\frac{ds_{mn}}{d\tau_1} = \{H^{\text{rot}}, s_{mn}\}$$

имеют представление Лакса, эквивалентное (2.1):

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{rot}} - \frac{1}{2\pi i} \partial_z M^{\text{rot}} = N[L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}], \quad (2.3)$$

где $L^{\text{rot}} = L^{\text{rot}}(\mathbf{s}, z, \tau_1 + \tau_2)$ и $M^{\text{rot}} = M^{\text{rot}}(\mathbf{s}, z, \tau_1 + \tau_2)$. Далее необходимо произвести зависящий от времени τ_1 сдвиг спектрального параметра

$$z = \tilde{z} + \frac{\tau}{2} \quad (2.4)$$

и не зависящий от времени τ_1 скейлинг координат

$$s_{mn} = \tilde{s}_{mn} q_2^{-g(n)}, \quad g(n) = \frac{1 - \tilde{\delta}(n)}{2N}, \quad (2.5)$$

где мы ввели обозначения

$$q_2 \equiv e(\tau_2), \quad \tilde{\delta}(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Тогда тригонометрический предел $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$ соответствует $q_2 \rightarrow 0$.

После замены (2.5) скобки Пуассона (1.18) принимают следующий вид:

$$\{\tilde{s}_{ab}, \tilde{s}_{cd}\} = 2i \sin\left(\frac{\pi(bc - ad)}{N}\right) q_2^{g(b)+g(d)-g(b+d)} \tilde{s}_{a+c, b+d}.$$

Таким образом, координаты $\tilde{s}_{mn}$ образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона в пределе $q_2 \rightarrow 0$ при условии, что для всех k, n

$$g(k) + g(n) - g(k+n) \geq 0. \quad (2.6)$$

Определенная в (2.5) функция $g(n)$ удовлетворяет условию (2.6), и все ненулевые скобки Пуассона переменных предельной системы имеют вид

$$\{\tilde{s}_{a0}, \tilde{s}_{cd}\} = -2i \sin\left(\frac{\pi ad}{N}\right) \tilde{s}_{a+c,d}.$$

Отсюда следует, что предельная алгебра является разрешимой и получается контракцией из алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$.

В дальнейшем нам будет удобно использовать стандартный базис, в котором замена (2.5) переписывается следующим образом:

$$S_{ij} = \tilde{S}_{ij} q_2^{-\mathfrak{g}(i,j)}, \quad \mathfrak{g}(i,j) = \frac{1 - \delta_{ij}}{2N}.$$

Предельная алгебра в переменных $\tilde{S}_{ij}$ принимает вид

$$\{\tilde{S}_{ii}, \tilde{S}_{jk}\} = N \tilde{S}_{jk} (\delta_{ik} - \delta_{ij}). \quad (2.7)$$

Поскольку в рассматриваемой предельной процедуре сдвиг спектрального параметра (2.4) зависит от времени, уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\partial_{\tau_1} L^{\text{rot}} - \partial_{\tilde{z}} \left(\frac{M^{\text{rot}}}{2\pi i} + \frac{L^{\text{rot}}}{2} \right) = N [L^{\text{rot}}, M^{\text{rot}}],$$

где $L^{\text{rot}} = L^{\text{rot}}(\mathbf{s}, \tilde{z} + \tau/2, \tau)$ и $M^{\text{rot}} = M^{\text{rot}}(\mathbf{s}, \tilde{z} + \tau/2, \tau)$. Таким образом, в рассматриваемом пределе уравнение изомонодромных деформаций переходит в уравнение

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L}^{\text{rot}} - \partial_{\tilde{z}} \tilde{M}^{\text{rot}} = [\tilde{L}^{\text{rot}}, \tilde{M}^{\text{rot}}],$$

где

$$\tilde{L}^{\text{rot}} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} 2\pi i N L^{\text{rot}}, \quad \tilde{M}^{\text{rot}} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} (N M^{\text{rot}} + \pi i N L^{\text{rot}}).$$

Приведем вид предельных матриц Лакса в стандартном базисе:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{ij}^{\text{rot}} &= -4\pi^2 \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{S}_{mm} \frac{e(k(i-m)/N)}{e(-k/N) - 1} \delta_{ij} - \\ &\quad - 4\pi^2 N q_1^{1/2N} \tilde{S}_{i+1,i+2} e\left(-\frac{\tilde{z}}{N}\right) \delta_{i+1,j} + 4\pi^2 N q_1^{1/2N} \tilde{S}_{i,i-1} e\left(\frac{\tilde{z}}{N}\right) \delta_{i,j+1}, \\ \tilde{M}_{ij}^{\text{rot}} &= -\pi^2 \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \text{ctg}\left(\frac{\pi k}{N}\right) \sin^{-1}\left(\frac{\pi k}{N}\right) e\left(\frac{i-m+1/2}{N}\right) \tilde{S}_{mm} \delta_{ij} + \\ &\quad + 2\pi^2 N q_1^{1/2N} \left(\tilde{S}_{i+1,i+2} e\left(-\frac{\tilde{z}}{N}\right) \delta_{i+1,j} + \tilde{S}_{i,i-1} e\left(\frac{\tilde{z}}{N}\right) \delta_{i,j+1} \right), \end{aligned}$$

где, напомним, $q_1 \equiv e(\tau_1)$.

Как было показано в автономном случае в работе [23], алгебра (2.7) допускает следующую бозонизацию:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ii} &= \frac{N}{2\pi i}(v_{i-1} - v_i), & \tilde{S}_{i,i+1} &= MN e(u_i), & \tilde{S}_{i+1,i} &= MN e(-u_i), \\ \tilde{S}_{i,i+k} &= c_{i,i+k} e\left(\sum_{n=i}^{i+k-1} u_n\right), & k &= 2, \dots, N-2, & c_{i,i+k} &= \text{const},\end{aligned}\quad (2.8)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ являются каноническими координатами неавтономной периодической цепочки Тоды в системе центра масс:

$$\{v_i, u_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N v_i = 0. \quad (2.9)$$

После перехода к координатам $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ получаем пару Лакса для неавтономной цепочки Тоды:

$$\tilde{L}^{\text{rot}} = -4\pi^2 MN^2 \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & e_2^+ & 0 & \cdots & 0 & e_N^- \\ e_1^- & \bar{v}_2 & e_3^+ & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & e_2^- & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & e_N^+ \\ e_1^+ & 0 & \cdots & 0 & e_{N-1}^- & \bar{v}_N \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где для краткости были введены обозначения

$$\bar{v}_k = \frac{v_k}{2\pi i M}, \quad e_k^\pm = \pm e\left(\pm u_k \mp \frac{\tilde{z}}{N}\right) q^{1/2N}, \quad k = 1, \dots, N;$$

элементы матрицы M^{rot} суть

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{ij}^{\text{rot}} &= \pi N \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \text{ctg}\left(\frac{\pi k}{N}\right) e\left(\frac{k(i-m)}{N}\right) v_m \delta_{ij} + \\ &+ 2\pi^2 MN^2 q_1^{1/2N} \left(e\left(u_{i+1} - \frac{\tilde{z}}{N}\right) \delta_{i+1,j} + e\left(\frac{\tilde{z}}{N} - u_{i-1}\right) \delta_{i,j+1} \right).\end{aligned}$$

Гамильтониан записывается как

$$\tilde{H}^{\text{rot}} = N^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{2} + 4\pi^2 M^2 N^2 q_1^{1/N} \sum_{i=1}^N e(u_{i+1} - u_i).$$

Отметим, что явная зависимость от времени содержится в $q_1^{1/N} \equiv e(\tau_1/N)$.

Гамильтоновы уравнения движения в переменных $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ имеют вид (2.2).

3. ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА

Уравнения движения эллиптической системы Шлезингера могут быть представлены в форме Лакса (1.9), где матрицы Лакса L и M^0 представляют собой сумму R копий матриц Лакса (1.10), (1.11) эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка, матрицы M^k имеют вид (1.12), а параметр эллиптической кривой τ и отмеченные точки x_k , $k = 1, \dots, R$, играют роль времен системы.

Используя в качестве параметров предельной процедуры отмеченные точки x_k на эллиптической кривой, можно для каждой копии эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка осуществить свой тип вырождения. В настоящей работе мы построим предельную процедуру, которая описывает два возможных варианта вырождения копий эллиптического волчка. Первый вариант вырождения аналогичен предельной процедуре, описанной в разделе 2. Он позволяет получить из неавтономного эллиптического $SL(N, \mathbb{C})$ -волчка неавтономную цепочку Тоды. Второй вариант вырождения переводит матрицу Лакса эллиптического волчка в матрицу Лакса свободной системы с сохранением алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$. С целью упрощения выражений будем применять первый вариант вырождения к первым r копиям эллиптического волчка, а второй вариант – к остальным $R - r$ копиям. Для этого мы осуществим бесконечный сдвиг параметра эллиптической кривой τ с помощью замены переменной (1.2), а также следующие сдвиги отмеченных точек и скейлинги координат:

$$x_i = \tilde{x}_i - \frac{\tau}{2}, \quad s_{mn}^i = \tilde{s}_{mn}^i q_2^{-g(n)}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3.1)$$

3.1. Цепочка Тоды и спинные $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степени свободы при $N > 2$. Прежде чем описывать уравнения движения предельной системы и их представление Лакса, необходимо определить новый набор гамильтонианов в инволюции и соответствующие им времена. Здесь мы будем рассматривать только уравнения движения, которые задаются квадратичными гамильтонианами.

3.1.1. Квадратичные гамильтонианы предельной системы. Замена координат из (3.1) в пределе $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$ приводит к контракции первых r копий алгебры $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$. При этом алгебра последних $R - r$ копий эллиптического волчка сохраняется. Таким образом, все ненулевые скобки Пуассона в предельной системе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\tilde{s}_{m0}^i, \tilde{s}_{nk}^i\} &= -2i \sin\left(\frac{\pi mk}{N}\right) \tilde{s}_{m+n,k}^i, & i = 1, \dots, r, \\ \{s_{mn}^j, s_{kl}^j\} &= 2i \sin\left(\frac{\pi(nk - ml)}{N}\right) s_{m+k, n+l}^j, & j = r + 1, \dots, R, \end{aligned} \quad (3.2)$$

или, в стандартном базисе,

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_{mm}^i, \tilde{S}_{nk}^i\} &= N \tilde{S}_{nk}^i (\delta_{mk} - \tilde{\delta}_{nm}), & i = 1, \dots, r, \\ \{S_{mn}^j, S_{kl}^j\} &= N (S_{kn}^j \delta_{ml} - S_{ml}^j \delta_{kn}), & j = r + 1, \dots, R. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку в рассматриваемом пределе алгебра первых r копий эллиптического волчка не сохраняется, исходные гамильтонианы (1.5), (1.6) эллиптической системы Шлезингера не переходят напрямую в гамильтонианы предельной системы. Чтобы определить вид квадратичных гамильтонианов предельной системы, обратимся

к разложению (1.13) следа квадрата матрицы Лакса (1.10) системы Шлезингера по базису эллиптических функций. В рассматриваемой предельной процедуре матрица (1.10) переходит в матрицу Лакса предельной системы:

$$\tilde{L}(z) = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} L(z) = \sum_{i=1}^r \tilde{L}^i(z - \tilde{x}_i) + \sum_{j=r+1}^R \tilde{L}^j(z - x_j), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}^i(z - \tilde{x}_i) &= \sum_{m,n} \tilde{s}_{mn}^i \varphi_{mn}^T(z - \tilde{x}_i) T_{mn}, \quad i = 1, \dots, r, \\ \tilde{L}^j(z - x_j) &= \sum_{m,n} s_{mn}^j \varphi_{mn}^S(z - x_j) T_{mn}, \quad j = r+1, \dots, R, \end{aligned}$$

а функции $\varphi_{mn}^T(z)$ и $\varphi_{mn}^S(z)$ определены ниже в (3.6). Чтобы получить разложение следа квадрата матрицы Лакса предельной системы, возьмем предел разложения (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \text{Tr } \tilde{L}^2(z) &= 2\pi i \left(\tilde{H}_0 - \frac{\tilde{H}_r}{2} \right) + \\ &+ \pi \sum_{i=r+1}^R \left(\tilde{H}_i \text{ctg}(\pi(z - x_i)) + \pi H_{2,i} \sin^{-2}(\pi(z - x_i)) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} H_0 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^r \sum_{m,n} \left(\sum_{j=i+1}^r \tilde{s}_{mn}^i \tilde{s}_{-m,-n}^j f_{mn}^S(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i) + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=r+1}^R \tilde{s}_{mn}^i s_{-m,-n}^j f_{mn}^T(x_j - \tilde{x}_i) \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^r H^{\text{T},i} - \\ &- \frac{\pi}{4i} \sum_{i=r+1}^R \sum_{m=1}^{N-1} \sin^{-2}\left(\frac{\pi m}{N}\right) \left(s_{m0}^i s_{-m,0}^i + 2 \sum_{j=i+1}^R s_{m0}^i s_{-m,0}^j \right), \\ \tilde{H}_r &= \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^r H_i = - \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^R \sum_{m,n} \tilde{s}_{mn}^i s_{-m,-n}^j \varphi_{mn}^T(x_j - \tilde{x}_i), \\ \tilde{H}_i &= \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} H_i = \sum_{j=1}^r \sum_{m,n} \tilde{s}_{mn}^j s_{-m,-n}^i \varphi_{mn}^T(x_i - \tilde{x}_j) - \\ &- \sum_{\substack{r \leq j \leq R, \\ j \neq i}} \sum_{m,n} s_{mn}^i s_{-m,-n}^j \varphi_{mn}^S(x_j - x_i), \quad i = r+1, \dots, R. \end{aligned}$$

В формуле для $\tilde{H}_0$ мы обозначили через $H^{\text{T},i}$ слагаемые, эквивалентные гамильтонианам неавтономных цепочек Тоды, их явный вид мы приведем ниже в (3.11). В последних выражениях мы также ввели новые функции $f_{mn}^T(z)$, $f_{mn}^S(z)$, $\varphi_{mn}^T(z)$ и $\varphi_{mn}^S(z)$, которые получаются из разложений функций $f\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)$ и $\varphi\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)$ по параметру q_2 в нуле. При этом некоторые из этих функций имеют явную зависимость от

времени τ_1 , а именно $f_{mn}^T(z) = f_{mn}^T(z, \tau_1)$, $f_{mn}^S(z) = f_{mn}^S(z, \tau_1)$ и $\varphi_{mn}^T(z) = \varphi_{mn}^T(z, \tau_1)$. Используя формулы из приложения Б, в случае $N > 2$ получим

$$\begin{aligned}
 f_{mn}^T(z) &= \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi m}{N}\right), & n = 0, \\ 4\pi^2 q_1^{1/2N} e\left(\frac{m-z}{N}\right), & n = 1, \\ 0, & 1 < n < N, \end{cases} \\
 f_{mn}^S(z) &= \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi m}{N}\right), & n = 0, \\ 4\pi^2 q_1^{1/N} e\left(\frac{m-z}{N}\right), & n = 1, \\ 0, & 1 < n < N-1, \\ 4\pi^2 q_1^{1/N} e\left(\frac{z-m}{N}\right), & n = N-1, \end{cases} \\
 \varphi_{mn}^T(z) &= \begin{cases} -\pi e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin^{-1}\left(\frac{\pi m}{N}\right), & n = 0, \\ 2\pi i q_1^{1/2N} e\left(\frac{m-z}{N}\right), & n = 1, \\ 0, & 1 < n < N-1, \\ -2\pi i q_1^{1/2N} e\left(\frac{z}{N}\right), & n = N-1, \end{cases} \\
 \varphi_{mn}^S(z) &= \begin{cases} \pi \left(\operatorname{ctg}(\pi z) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi m}{N}\right) \right), & n = 0, \\ \pi e\left(\frac{z}{2} - \frac{zn}{N}\right) \sin^{-1}(\pi z), & 0 < n < N. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Полученные коэффициенты в разложении (3.5) определяют набор квадратичных гамильтонианов и функций Казимира предельной системы. Коэффициенты $H_{2,i}$, $i = r+1, \dots, R$, являются функциями Казимира предельной системы, поскольку алгебра координат соответствующих копий эллиптического волчка сохраняется. Набор квадратичных гамильтонианов состоит из функций $\tilde{H} = \tilde{H}_0 - \tilde{H}_r/2$ и $\tilde{H}_i$, $i = r+1, \dots, R$. Докажем, что данные функции действительно являются гамильтонианами предельной системы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Коэффициенты $\tilde{H}$ и $\tilde{H}_i$, $i = r+1, \dots, R$, разложения (3.5) находятся в инволюции:

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{H}, \tilde{H}_i\} &= 0, & i &= r+1, \dots, R, \\
 \{\tilde{H}_{i_1}, \tilde{H}_{i_2}\} &= 0, & i_1, i_2 &= r+1, \dots, R.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скобки Пуассона (3.2) и (3.3) можно записать с помощью r -матрицы:

$$\{\tilde{L}_1(z), \tilde{L}_2(w)\} = [\tilde{r}(z - w), \tilde{L}_1(z) + \tilde{L}_2(w)],$$

где $\tilde{L}_1(z) = \tilde{L}(z) \otimes \text{Id}$ и $\tilde{L}_2(w) = \text{Id} \otimes \tilde{L}(w)$, а матрица $\tilde{r}(z)$ является пределом классической эллиптической r -матрицы (1.15) при $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{r}(z) = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} r(z) = - \sum_{m,n} \varphi_{m,n}^s(z) T_{m,n} \otimes T_{-m,-n}.$$

Тогда для скобки Пуассона между $\text{Tr } \tilde{L}^2(z)$ и $\text{Tr } \tilde{L}^2(w)$ имеем

$$\{\text{Tr } \tilde{L}^2(z), \text{Tr } \tilde{L}^2(w)\} = \text{Tr } \{\tilde{L}^2(z), \tilde{L}^2(w)\} = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку гамильтонианы $\tilde{H}_i$, $i = r + 1, \dots, R$, суть вычеты функции $\text{Tr } \tilde{L}^2(z)/2N$ в точках $z = x_i$, из (3.7) следует, что они находятся в инволюции: $\{\tilde{H}_{i_1}, \tilde{H}_{i_2}\} = 0$ для всех $i_1, i_2 = r + 1, \dots, R$. Учитываем, что гамильтонианы $H_{2,i}$, $i = r + 1, \dots, R$, являются функциями Казимира предельной системы, для свободного члена $\tilde{H} = \tilde{H}_0 - \tilde{H}_r/2$ из разложения (3.5) получим $\{\tilde{H}, \text{Tr } \tilde{L}^2(z)\} = 0$, или $\{\tilde{H}, \tilde{H}_i\} = 0$ для всех $i = r + 1, \dots, R$.

3.1.2. Уравнения движения. Мы получили квадратичные гамильтонианы и теперь можем определить набор времен предельной системы. Как уже было сказано ранее, вместо времени τ в предельной системе мы имеем время τ_1 , которому соответствует динамика относительно гамильтониана $\tilde{H}$. Остальные гамильтонианы $\tilde{H}_i$ задают динамику по временам x_i , $i = r + 1, \dots, R$. Таким образом, предельная система является неавтономной гамильтоновой системой со следующими уравнениями движения:

$$\partial_{\tau_1} \tilde{\mathbf{s}}^i = \{\tilde{H}, \tilde{\mathbf{s}}^i\}, \quad \partial_{x_k} \tilde{\mathbf{s}}^i = \{\tilde{H}_k, \tilde{\mathbf{s}}^i\}, \quad i = 1, \dots, r, \quad k = r, \dots, R, \quad (3.8)$$

$$\partial_{\tau_1} \mathbf{s}^i = \{\tilde{H}, \mathbf{s}^i\}, \quad \partial_{x_k} \mathbf{s}^i = \{\tilde{H}_k, \mathbf{s}^i\}, \quad i = r, \dots, R, \quad k = r, \dots, R. \quad (3.9)$$

Здесь необходимо сделать важное замечание. В силу определения функции $\varphi_{mn}^T(z)$ (см. формулы (3.6)) зависимость матрицы Лакса (3.4) от переменных $\tilde{\mathbf{s}}^i$, $i = 1, \dots, r$, сводится к зависимости от сумм вида $\sum_{k=1}^r e(c_n \tilde{x}_k) \tilde{s}_{mn}^k$, где $c_n = 0, \pm 1/N$ в зависимости от n . То же верно и для зависимости от $\tilde{\mathbf{s}}^i$ гамильтонианов предельной системы, которые мы ранее определили в разложении (3.5). Это приводит к тому, что уравнения движения из (3.8) эквивалентны при различных $i = 1, \dots, r$. Можно сказать, что отмеченные точки x_i , $i = 1, \dots, r$, после сдвигов (3.1) сливаются на бесконечности. Следовательно, в предложенной предельной процедуре имеет смысл рассматривать только случай $r = 1$, т.е. случай, когда только одна копия эллиптического волчка переходит в цепочку Тоды. Тогда уравнения движения предельной системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_1} \tilde{\mathbf{S}}^1 &= \{\tilde{H}, \tilde{\mathbf{S}}^1\}, & \partial_{x_k} \tilde{\mathbf{S}}^1 &= \{\tilde{H}_k, \tilde{\mathbf{S}}^1\}, & k &= 2, \dots, R, \\ \partial_{\tau_1} \mathbf{s}^i &= \{\tilde{H}, \mathbf{s}^i\}, & \partial_{x_k} \mathbf{s}^i &= \{\tilde{H}_k, \mathbf{s}^i\}, & i, k &= 2, \dots, R. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Прежде чем выписывать уравнения движения в явной форме, осуществим переход от координат первой копии эллиптического волчка к координатам, которые

представляют собой обобщенные степени свободы цепочки Тоды. Как было показано в разделе 2, предельная алгебра переменных $\tilde{\mathbf{S}}^1$ допускает такой переход, и формулы бозонизации аналогичны (2.8):

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ii}^1 &= \frac{N}{2\pi i}(v_{i-1} - v_i), & \tilde{S}_{i,i+1}^1 &= MN e(u_i), & \tilde{S}_{i+1,i}^1 &= MN e(-u_i), \\ \tilde{S}_{i,i+k}^1 &= c_{i,i+k}^i e\left(\sum_{n=i}^{i+k-1} u_n\right), & k &= 2, \dots, N-2, & c_{j,j+k} &= \text{const},\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ являются каноническими координатами в системе центра масс и удовлетворяют соотношениям (2.9).

После перехода к координатам $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ в матрицу Лакса предельной системы (3.4) войдет в качестве слагаемого матрица Лакса неавтономной цепочки Тоды, аналогичная матрице (2.10),

$$\tilde{L}^{\text{rot}} = 2\pi i MN \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & e_2^+ & 0 & \dots & 0 & e_N^- \\ e_1^- & \bar{v}_2 & e_3^+ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^- & \bar{v}_3 & e_4^+ & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & e_{N-2}^- & \bar{v}_{N-1} & e_N^+ \\ e_1^+ & 0 & \dots & 0 & e_{N-1}^- & \bar{v}_N \end{pmatrix},$$

где теперь

$$\bar{v}_k = \frac{v_k}{2\pi i M}, \quad e_k^\pm = \pm e\left(\pm u_k \mp \frac{z}{N}\right) q^{1/2N}, \quad k = 1, \dots, N;$$

а в $\tilde{H}$ – гамильтониан неавтономной цепочки Тоды,

$$H^{\text{T},1} = N \sum_{j=1}^N \frac{v_j^2}{2} + 4\pi^2 M^2 N q_1^{1/N} \sum_{j=1}^N e(u_{j+1} - u_j). \quad (3.11)$$

Теперь мы можем представить явный вид гамильтоновых уравнений движения для обобщенных степеней свободы цепочки Тоды $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ и $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степеней свободы $\mathbf{s}^j$, $j = 2, \dots, R$. Сначала опишем динамику этих степеней свободы по времени τ_1 . Уравнения движения для переменных $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ задаются гамильтонианом неавтономной цепочки Тоды $H^{\text{T},1}$ и членами со взаимодействием между степенями свободы цепочки Тоды и $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы из $\tilde{H}_0, \tilde{H}_1$:

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_1} u_j &= \frac{N}{2\pi i} v_j - \frac{1}{2i} \sum_{k=2}^R \sum_{m=1}^{N-1} s_{m0}^k e\left(\frac{mj}{N}\right) \text{ctg}\left(\frac{\pi m}{N}\right), \\ \partial_{\tau_1} v_j &= 4\pi^2 M^2 N q_1^{1/N} (e(u_{j+1} - u_j) - e(u_j - u_{j-1})) - \\ &\quad - 2\pi^2 M q_1^{1/2N} \sum_{k=2}^R \left(e\left(u_j + \frac{\tilde{x}_1 - x_k}{N}\right) S_{j,j-1}^k - e\left(-u_j + \frac{x_k - \tilde{x}_1}{N}\right) S_{j,j+1}^k \right).\end{aligned}$$

Уравнения движения для $\mathbf{s}^j$, $j = 2, \dots, R$, задаются членами со взаимодействием различных копий $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степеней свободы из $\tilde{H}_0$ и членами со взаимодействием между степенями свободы цепочек Тоды и $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы из $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}_1$:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_1} s_{mn}^i &= 2\pi M q_1^{1/2N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{N-1} e\left(\frac{l}{2N} - \frac{jl}{N}\right) \times \\ &\quad \times \left(\sin\left(\frac{\pi(nl-m)}{N}\right) e\left(u_j + \frac{\tilde{x}_1 - x_i}{N}\right) s_{m-l, n-1}^i + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\pi(nl+m)}{N}\right) e\left(-u_{j-1} + \frac{x_i - \tilde{x}_1}{N}\right) s_{m-l, n+1}^i \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} v_j s_{m+l, n}^i e\left(\frac{jl}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi nl}{N}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi l}{N}\right) - \\ &\quad - \pi \sum_{k=2}^R \sum_{l=1}^{N-1} s_{l0}^k s_{m-l, n}^i \sin\left(\frac{\pi nl}{N}\right) \sin^{-2}\left(\frac{\pi l}{N}\right). \end{aligned}$$

Чтобы описать динамику по временам x_k , $k = 2, \dots, R$, приведем явный вид соответствующих гамильтонианов $\tilde{H}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k &= \sum_{j=1}^N v_j S_{jj}^k + 2\pi i M q_1^{1/2N} \sum_{j=1}^N \left(e\left(u_j + \frac{\tilde{x}_1 - x_k}{N}\right) S_{j, j-1}^k - \right. \\ &\quad \left. - e\left(-u_j + \frac{x_k - \tilde{x}_1}{N}\right) S_{j, j+1}^k \right) - \sum_{\substack{2 \leq i \leq R, \\ i \neq k}} \sum_{m, n} s_{mn}^k s_{-m, -n}^i \varphi_{mn}^s(x_i - x_k). \end{aligned}$$

Эти гамильтонианы содержат два типа слагаемых. Слагаемые первого типа описывают взаимодействие между степенями свободы цепочки Тоды и $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы и определяют уравнения движения для переменных $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} u_j &= S_{jj}^k, \\ \partial_{x_k} v_j &= 4\pi^2 M q_1^{1/2N} \left(e\left(u_j + \frac{\tilde{x}_1 - x_k}{N}\right) S_{j, j-1}^k + e\left(-u_j + \frac{x_k - \tilde{x}_1}{N}\right) S_{j, j+1}^k \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, слагаемые второго типа описывают взаимодействие между различными копиями $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степеней свободы и определяют уравнения движения для переменных $\mathbf{s}^i$, $i = 1, \dots, R$ при $i \neq k$:

$$\partial_{x_k} s_{mn}^i = 2i \sum_{l, j} s_{lj}^k s_{m-l, n-j}^i \sin\left(\frac{\pi(mj-nl)}{N}\right) \varphi_{lj}^s(x_i - x_k).$$

Уравнения движения для переменных $\mathbf{s}^k$ определяются слагаемыми обоих типов и имеют вид

$$\partial_{x_k} s_{mn}^k = 4\pi M q_1^{1/2N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{N-1} e\left(\frac{l}{2N} - \frac{jl}{N}\right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sin \left(\frac{\pi(nl+m)}{N} \right) e \left(-u_{j-1} + \frac{x_k - \tilde{x}_1}{N} \right) s_{m-l, n+1}^k - \right. \\
& - \sin \left(\frac{\pi(nl-m)}{N} \right) e \left(u_j + \frac{\tilde{x}_1 - x_k}{N} \right) s_{m-l, n-1}^k \Big) - \\
& - 2i \sum_{\substack{2 \leq i \leq R, \\ i \neq k}} \sum_{l, j} s_{m+l, n+j}^k s_{-l, -j}^i \sin \left(\frac{\pi(mj-nl)}{N} \right) \varphi_{lj}^s(x_i - x_k) - \\
& - 2i \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} v_j s_{m+l, n}^k e \left(\frac{jl}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi nl}{N} \right).
\end{aligned}$$

3.1.3. *Представление Лакса предельных уравнений движения.* Уравнения движения (3.10) могут быть представлены в форме Лакса

$$\partial_{\tau_1} \tilde{L} - \partial_z \tilde{M}^0 = [\tilde{L}, \tilde{M}^0], \quad (3.12)$$

$$\partial_{x_k} \tilde{L} - \partial_z \tilde{M}^k = [\tilde{L}, \tilde{M}^k], \quad k = 2, \dots, R, \quad (3.13)$$

где матрица Лакса $\tilde{L}$ определена в (3.4), а матрицы $\tilde{M}^k$, $k = 2, \dots, R$, являются пределами матриц M^k при $\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{M}^k(z) = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} M^k(z) = - \sum_{m, n} s_{mn}^k \varphi_{mn}^s(z - x_k) T_{mn}, \quad k = 2, \dots, R.$$

Чтобы определить вид матрицы Лакса $\tilde{M}^0$, рассмотрим уравнения движения предельной системы относительно времени τ_1 :

$$\partial_{\tau_1} \tilde{\mathbf{S}}^1 = \{\tilde{H}, \tilde{\mathbf{S}}^1\}, \quad \partial_{\tau_1} \mathbf{s}^j = \{\tilde{H}, \mathbf{s}^j\}, \quad j = 2, \dots, R.$$

Гамильтониан $\tilde{H}$ следующим образом связан с гамильтонианами эллиптической системы Шлезингера:

$$\tilde{H} = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} \left(H_0 - \frac{H_1}{2} \right).$$

Теперь построим представление Лакса для гамильтоновых уравнений движения эллиптической системы Шлезингера относительно гамильтониана $H_0 - H_1/2$. Эти уравнения движения можно представить следующим образом:

$$\partial_{\tau_1} \mathbf{s}^i = \left\{ H_0 - \frac{H_1}{2}, \mathbf{s}^i \right\} = \partial_{\tau} \mathbf{s}^i - \frac{1}{2} \partial_{x_1} \mathbf{s}^i, \quad i = 1, \dots, R.$$

Переписывая уравнения (1.9) в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^R \sum_{m, n} \varphi \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] (z - x_i) T_{mn} \partial_{\tau} s_{mn}^i = [L, M^0], \\
& \sum_{i=1}^R \sum_{m, n} \varphi \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] (z - x_i) T_{mn} \partial_{x_k} s_{mn}^i = [L, M^k], \quad k = 1, \dots, R,
\end{aligned}$$

получаем для $\partial_{\tau_1} s^i$ следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^R \sum_{m,n} \varphi \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] (z - x_i) T_{mn} \partial_{\tau_1} s_{mn}^i = \left[L, M^0 - \frac{M^1}{2} \right].$$

После замены $x_1 = \tilde{x}_1 - \tau/2$ полученное выражение может быть преобразовано в искомое уравнение Лакса

$$\partial_{\tau_1} L - \partial_z \left(M^0 - \frac{M^1}{2} \right) = \left[L, M^0 - \frac{M^1}{2} \right]. \quad (3.14)$$

В рассматриваемой предельной процедуре уравнение (3.14) переходит в (3.12). Тогда для матрицы Лакса $\widetilde{M}^0$ предельной системы имеем

$$\widetilde{M}^0 = \lim_{\text{Im } \tau_2 \rightarrow +\infty} \left(M^0 - \frac{M^1}{2} \right).$$

Используя функции $f_{mn}^T(z)$, $f_{mn}^S(z)$ и $\varphi_{mn}^T(z)$, приведем матрицу $\widetilde{M}^0$ к виду

$$\begin{aligned} \widetilde{M}^0(z) = & \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n} \tilde{s}_{mn}^1 (f_{mn}^T(z - \tilde{x}_1) + \pi i \varphi_{mn}^T(z - \tilde{x}_1)) T_{mn} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=2}^R \sum_{m=1}^{N-1} s_{m0}^i f_{m0}^S(z - x_i) T_{m0}. \end{aligned}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали некоторые способы вырождения эллиптической системы Шлезингера с помощью предельной процедуры, основанной на бесконечных сдвигах параметра эллиптической кривой τ и r отмеченных точек x_i . Мы показали, что при фиксированном $p = R - r$ случай $r > 1$ эквивалентен случаю $r = 1$, поскольку сдвигаемые отмеченные точки сливаются на бесконечности. В результате мы получили неавтономную гамильтонову систему, которая описывает цепочку Тоды с дополнительными спинowymi $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ -степенями свободы, и представили уравнения движения полученной системы в форме уравнений нулевой кривизны (3.12), (3.13).

Описанную предельную процедуру можно перенести на эллиптическую систему Годена, которая является интегрируемой версией эллиптической системы Шлезингера. При этом в пределе получится автономная версия построенной в разделе 3 системы. Можно ожидать, что эта автономная система окажется интегрируемой, так как ее оператор Лакса аналогичен (3.4), за исключением явной зависимости от времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Синус-алгебра

Элементы T_{mn} базиса синус-алгебры в $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ определяются следующим образом:

$$(T_{mn})_{ij} = e \left(\frac{mn}{2N} \right) e \left(\frac{im}{N} \right) \tilde{\delta}(j - i - n), \quad m, n = 0, \dots, N-1, \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

Для элементов с индексами $m, n \in \mathbb{Z}$ таких, что $m \not\equiv 0 \pmod{N}$ или $n \not\equiv 0 \pmod{N}$, можно ввести условие квазипериодичности:

$$\begin{aligned} T_{mn} &= e\left(\frac{mn - (m \bmod N)(n \bmod N)}{2N}\right) T_{m \bmod N, n \bmod N}, \\ s_{mn} &= e\left(\frac{(m \bmod N)(n \bmod N) - mn}{2N}\right) s_{m \bmod N, n \bmod N}, \end{aligned}$$

где

$$e\left(\frac{mn - (m \bmod N)(n \bmod N)}{2N}\right) = \pm 1.$$

Тогда коммутационные соотношения в базисе синус-алгебры приобретают вид

$$[T_{mn}, T_{kl}] = 2i \sin\left(\frac{\pi(kn - ml)}{N}\right) T_{m+k, n+l}. \quad (\text{A.1})$$

С координатами $\{S_{ij}\}$ в разложении по стандартному базису в $SL(N, \mathbb{C})$ координаты $\{s_{mn}\}$ в базисе синус-алгебры связаны следующим образом:

$$S_{ij} = \sum_{m,n} s_{mn} (T_{mn})_{ij}, \quad s_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} S_{ij} (T_{-m,n})_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Эллиптические функции

Определения и свойства эллиптических функций в основном заимствованы из монографий [30] и [35]. Основным объектом является тета-функция с характеристиками:

$$\theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{(j+a)^2/2} e((j+a)(z+b)),$$

где $q = e(\tau) \equiv e^{2\pi i \tau}$.

Нам также понадобятся функции Эйзенштейна

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(z) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M (z+n)^{-k}, \\ E_k(z) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M \varepsilon_k(z+n\tau), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Для взятия пределов от матриц Лакса используется следующее разложение в ряд:

$$\vartheta(z) = \theta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right] (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{(j+1/2)^2/2} e((j+1/2)(z+1/2)). \quad (\text{B.2})$$

Положим

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}. \quad (\text{B.3})$$

Эта функция удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned}\phi(u, z)\phi(-u, z) &= E_2(z) - E_2(u), \\ \partial_u \phi(u, z) &= \phi(u, z)(E_1(u+z) - E_1(u)).\end{aligned}\tag{Б.4}$$

Также имеют место свойства четности

$$E_k(-z) = (-1)^k E_k(z), \quad \vartheta(-z) = -\vartheta(z), \quad \phi(u, z) = \phi(z, u) = -\phi(-u, -z)$$

и квазипериодичности

$$\begin{aligned}E_1(z+1) &= E_1(z), & E_1(z+\tau) &= E_1(z) - 2\pi i, \\ E_2(z+1) &= E_2(z), & E_2(z+\tau) &= E_2(z), \\ \vartheta(z+1) &= -\vartheta(z), & \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1/2} e(-z)\vartheta(z), \\ \phi(u+1, z) &= \phi(u, z), & \phi(u+\tau, z) &= e(-z)\phi(u, z).\end{aligned}\tag{Б.5}$$

Положим $z = \tilde{z} + \tau/2$ и исследуем вырождения эллиптических функций $\varphi \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]$ (1.7) и $f \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]$ (1.8) в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$. С учетом (Б.3) разложение в ряд функции $\varphi \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right](z)$ сводится к разложению в ряд тета-функции. Рассматривая главный ненулевой член в разложениях, получим

$$\begin{aligned}\vartheta\left(-\frac{m}{N} - \frac{n\tau}{N}\right) &= \begin{cases} 2q^{1/8} \sin\left(\frac{\pi m}{N}\right) + o(q^{1/8}), & n = 0, \\ iq^{1/8-n/2N} e\left(-\frac{m}{2N}\right) + o(q^{1/8-n/2N}), & 0 < n < N, \end{cases} \\ \vartheta\left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} - \frac{m}{N} - \frac{n}{N}\tau\right) &= \begin{cases} -iq^{n/2N-1/8} e\left(\frac{m/N - \tilde{z}}{2}\right) + o(q^{n/2N-1/8}), & 0 \leq n < \frac{N}{2}, \\ -2q^{1/8} \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) + o(q^{1/8}), & n = \frac{N}{2}, \\ iq^{3/8-n/2N} e\left(\frac{\tilde{z} - m/N}{2}\right) + o(q^{3/8-n/2N}), & \frac{N}{2} < n < N, \end{cases}\end{aligned}$$

что дает

$$\phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}; \tilde{z} + \frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} -\pi e\left(\frac{m}{2N}\right) \sin^{-1}\left(\frac{\pi m}{N}\right) + o(1), & n = 0, \\ 2\pi iq^{n/N} e\left(\frac{m}{N}\right) + o(q^{n/N}), & 0 < n < \frac{N}{2}, \\ 4\pi q^{1/2} \sin\left(\pi\left(\tilde{z} - \frac{m}{N}\right)\right) e\left(\frac{m/N + \tilde{z}}{2}\right) + o(q^{1/2}), & n = \frac{N}{2}, \\ -2\pi iq^{1/2} e(\tilde{z}) + o(q^{1/2}), & \frac{N}{2} < n < N, \end{cases}$$

и

$$\varphi \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] \left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} \right) = \begin{cases} -\pi e \left(\frac{m}{2N} \right) \sin^{-1} \left(\frac{\pi m}{N} \right) + o(1), & n = 0, \\ 2\pi i q^{n/2N} e \left(\frac{m - n\tilde{z}}{N} \right) + o(q^{n/2N}), & 0 < n < \frac{N}{2}, \\ 4\pi q^{1/4} e \left(\frac{m}{2N} \right) \sin \left(\pi \left(\tilde{z} - \frac{m}{N} \right) \right) + o(q^{1/4}), & n = \frac{N}{2}, \\ -2\pi i q^{(N-n)/2N} e \left(\frac{N-n}{N} \tilde{z} \right) + o(q^{(N-n)/2N}), & \frac{N}{2} < n < N. \end{cases}$$

Чтобы найти предел функции $f \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right]$, разложим функцию $E_1(\tilde{x} - \sigma\tau)$ в ряд по переменной $q = e(\tau)$. Учитывая (Б.1), получим

$$\begin{aligned} E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^M \varepsilon_1(\tilde{x} + (n - \sigma)\tau) = \\ &= \varepsilon_1(\tilde{x} - \sigma\tau) + \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^M (\varepsilon_1(\tilde{x} + (n - \sigma)\tau) + \varepsilon_1(\tilde{x} - (n + \sigma)\tau)). \end{aligned}$$

Используя явное выражение для функции $\varepsilon_1(x)$ [30],

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \pi i \frac{e(x) + 1}{e(x) - 1} = \\ &= \pi i \begin{cases} -1 - 2e(x) + o(e(x)), & \operatorname{Im} x \rightarrow +\infty, \\ 1 + 2e(x) + o(e(x)), & \operatorname{Im} x \rightarrow -\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

можно получить следующий результат для главного члена в разложении функции $E_1(\tilde{x} - \sigma\tau)$:

$$E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) = \begin{cases} \pi \operatorname{ctg}(\pi \tilde{x}) + o(1), & \sigma = 0, \\ \pi i + 2\pi i q^\sigma e(-\tilde{x}) + o(q^\sigma), & 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \\ \pi i + 2\pi i q^{1/2} (e(-\tilde{x}) - e(\tilde{x})) + o(q^{1/2}), & \sigma = \frac{1}{2}, \\ \pi i - 2\pi i q^{1-\sigma} e(\tilde{x}) + o(q^{1-\sigma}), & \frac{1}{2} < \sigma < 1, \end{cases}$$

а с помощью (Б.5) – и обобщение последней формулы на случай $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$E_1(\tilde{x} - \sigma\tau) = \begin{cases} 2\pi i [\sigma] + \pi \operatorname{ctg}(\pi \tilde{x}) + o(1), & \{\sigma\} = 0, \\ 2\pi i [\sigma] + \pi i + 2\pi i q^{\{\sigma\}} e(-\tilde{x}) + o(q^{\{\sigma\}}), & 0 < \{\sigma\} < \frac{1}{2}, \\ 2\pi i [\sigma] + \pi i + 2\pi i q^{\{\sigma\}} e(-\tilde{x}) + o(q^{\{\sigma\}}), & \{\sigma\} = \frac{1}{2}, \\ 2\pi i [\sigma] + \pi i - 2\pi i q^{1-\{\sigma\}} (e(-\tilde{x}) - e(\tilde{x})) + o(q^{1/2}), & \frac{1}{2} < \{\sigma\} < 1, \end{cases}$$

где $\{\sigma\}$ – дробная часть числа σ .

Рассмотрим разложение функции $\partial_u \phi(u, z)|_{u=\tilde{u}-\sigma\tau}$ в пределе $\text{Im } \tau \rightarrow +\infty$, используя формулу (Б.4). Положив $z = \tilde{z} + \tau/2$ и рассмотрев все возможные значения σ , найдем

$$\partial_u \phi(u, z)|_{u=\tilde{u}-\sigma\tau} = \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2} \pi \tilde{u} + o(1), & \sigma = 0, \\ 4\pi^2 q e(-\tilde{u}) + o(q), & 0 < \sigma < \frac{3}{4}, \\ 4\pi^2 q^{3/4} (e(-\tilde{u}) - e(\tilde{u} + \tilde{z})) + o(q^{3/4}), & \sigma = \frac{3}{4}, \\ -4\pi^2 q^{3/2-\sigma} e(\tilde{u} + \tilde{z}) + o(q^{3/2-\sigma}), & \frac{3}{4} < \sigma < 1. \end{cases}$$

Учитывая определение (1.8), окончательно получаем

$$f \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] \left(\tilde{z} + \frac{\tau}{2} \right) = \begin{cases} -\pi^2 \sin^{-2} \left(\frac{\pi m}{N} \right) + o(1), & n = 0, \\ 4\pi^2 e \left(\frac{m}{N} \right) e \left(-\frac{n\tilde{z}}{N} \right) q^{n/2N} + o(q^{n/2N}), & 0 < n < \frac{3N}{4}, \\ 4\pi^2 \left(e \left(\frac{m}{N} \right) - e \left(-\frac{n}{N} + \tilde{z} \right) \right) e \left(-\frac{3\tilde{z}}{4} \right) q^{3/8} + o(q^{3/8}), & n = \frac{3N}{4}, \\ -4\pi^2 e \left(-\frac{m}{N} + \tilde{z} \right) e \left(-\frac{n\tilde{z}}{N} \right) q^{3(1-n/N)/2} + o(q^{3(1-n/N)/2}), & \frac{3N}{4} < n < N. \end{cases}$$

Благодарности. Особую благодарность авторы выражают М. А. Олшанецкому и А. В. Зотову за постановку задачи и ценные обсуждения. Авторы благодарны организационному комитету Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” (CQIS – 2012) за предоставленную возможность доложить результаты настоящей работы. Работа была частично поддержана Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 14.740.11.0347), Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-1646.2011.1), РФФИ (гранты № 12-01-00482 (С. Б. Артамонов) и № 12-02-00594 (Г. А. Аминов), а также совместный грант № 12-02-91000-ANF).

Список литературы

- [1] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **191** (1999), 223–262.
- [2] K. Takasaki, *Lett. Math. Phys.*, **44**:2 (1998), 143–156.
- [3] D. A. Korotkin, “Isomonodromic deformations in genus zero and one: algebro-geometric solutions and Schlesinger transformations”, *Integrable Systems: From Classical to Quantum* (Montréal, Canada, July 26–August 6, 1999), CRM Proceedings and Lecture Notes, **26**, eds. J. Harnad, G. Sabidussi, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 2000, 87–104.
- [4] Yu. Chernyakov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A*, **39**:39 (2006), 12083–12101.
- [5] L. Schlesinger, *J. für Math.*, **141** (1912), 96–145.
- [6] R. Conte, *The Painlevé Property. One Century Later*, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, New York, 1999.

- [7] A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1191**, Springer, Berlin, 1986.
- [8] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [9] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103.
- [10] D. Korotkin, H. Samtleben, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:11 (1997), 2013–2029.
- [11] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv: hep-th/9407087.
- [12] A. Gorsky, S. Gukov, A. Mironov, *Nucl. Phys. B*, **517**:1–3 (1998), 409–461, arXiv: hep-th/9707120.
- [13] A. Gorsky, S. Gukov, A. Mironov, *Nucl. Phys. B*, **518**:3 (1998), 689–713, arXiv: hep-th/9710239.
- [14] V. I. Inozemtsev, *Commun. Math. Phys.*, **121**:4 (1989), 629–638.
- [15] А. В. Зотов, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 258–277.
- [16] А. М. Левин, М. А. Olshanetsky, А. В. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133.
- [17] А. В. Смирнов, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 355–369.
- [18] К. Okamoto, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **33**:3 (1986), 575–618.
- [19] R. Fuchs, *C. R. Acad. Sci.*, **141** (1905), 555–558.
- [20] E. K. Sklyanin, T. Takebe, *Phys. Lett. A*, **219**:3–4 (1996), 217–225.
- [21] B. Enriquez, V. Rubtsov, *Math. Res. Lett.*, **3** (1996), 343–357.
- [22] N. Nekrasov, *Commun. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 587–603, arXiv: hep-th/9503157.
- [23] G. Aminov, S. Arthamonov, *J. Phys. A*, **44**:7 (2011), 075201, 34 pp.
- [24] С. Б. Артамонов, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 196–207.
- [25] Г. А. Аминов, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 179–195.
- [26] А. А. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200.
- [27] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [28] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **95** (1980), 129–160.
- [29] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [30] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.
- [31] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 104–118.
- [32] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555.
- [33] H. Flashka, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1924–1925.
- [34] H. Flashka, *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.
- [35] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.