Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Спектральные свойства тонкого слоя
с двоякопериодическим семейством истончений, *ТМФ*,
2013, том 174, номер 3, 398–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:11:28

© 2013 г.

С. А. Назаров*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКОГО СЛОЯ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИМ СЕМЕЙСТВОМ ИСТОНЧЕНИЙ

Установлено существование лакун и найдены характеристики их положения в спектре задачи Дирихле для оператора Лапласа в слое с двоякопериодической структурой. Результат получен на основе асимптотического анализа модельной спектральной задачи на ячейке периодичности.

Ключевые слова: задача Дирихле в двоякопериодическом слое, асимптотика, локализация собственных чисел, спектральные лакуны.

DOI: 10.4213/tmf8376

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω – открытый параллелограмм со сторонами a_1 , a_2 и острым углом θ при одной из вершин, совпадающей с началом декартовой системы координат $y = (y_1, y_2)$ (см. рис. 1а). Пусть ω – область с липшицевой границей $\partial\omega$ и $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega \subset \Omega$ – ее замыкание, а H – положительная липшицева функция в $\bar{\Omega}$, причем

$$H(y) = 1 \quad \text{при} \quad y \in \bar{\omega}, \quad 1 - H(y) \geq c_H \rho(y)^\beta > 0 \quad \text{при} \quad y \in \Omega \setminus \omega, \quad (1.1)$$

где c_H и β – положительные постоянные, а $\rho(y) = \text{dist}(y, \partial\omega)$ – расстояние от точки y до границы $\partial\omega$. Считая функцию H периодической по переменным $Y_1 = y_1$ и $Y_2 = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta$ с периодами a_1 и a_2 соответственно, введем ячейку периодичности (см. рис. 1б)

$$\varpi^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : y \in \Omega, 0 < z < \varepsilon H(y)\} \quad (1.2)$$

и открытый двоякопериодический слой Π^ε , образованный сдвигами $\varpi^\varepsilon(\alpha)$ этой ячейки; здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$ – мультииндекс, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,

$$\bar{\Pi}^\varepsilon = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \overline{\varpi^\varepsilon(\alpha)}, \quad \varpi^\varepsilon(\alpha) = \{y : (y_1 - a_1 \alpha_1, y_2 - a_2 \alpha_2) \in \varpi^\varepsilon\} \quad (1.3)$$

и $\varepsilon > 0$ – малый параметр, т. е. множества (1.3) тонкие. Принимая длину одной из сторон параллелограмма равной единице, делаем после масштабирования параметр $\varepsilon \in (0, 1]$ и координаты $y_j = x_j$, $z = x_3$ безразмерными.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Рис. 1. Области Ω и ϖ_ε .

В области Π^ε (по предположению, связном множестве) рассмотрим спектральную задачу Дирихле для оператора Лапласа. Этой задаче отвечает положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор A^ε в пространстве Лебега $L_2(\Pi^\varepsilon)$ со спектром $\sigma^\varepsilon \subset \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ (см., например, книгу [1]). Согласно теории Флоке–Блоха (см., например, обзор [2], книги [3], [4]) спектр σ^ε имеет чересполосную структуру: он является объединением спектральных сегментов

$$\Upsilon_n^\varepsilon = \{\lambda = \lambda_n^\varepsilon(\eta) : \eta \in \mathbb{Y}\}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}; \quad (1.4)$$

при этом η – двойственная переменная преобразования Гельфанда [5],

$$\mathbb{Y} = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_j \in [0, 2\pi/a_j], j = 1, 2\},$$

а $\lambda_n^\varepsilon(\eta)$ – члены последовательности

$$0 < \lambda_1^\varepsilon(\eta) \leq \lambda_2^\varepsilon(\eta) \leq \dots \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta) \leq \dots, \quad \lambda_n^\varepsilon(\eta) \rightarrow +\infty, \quad (1.5)$$

собственных чисел (указаны с учетом кратностей) модельной задачи на ячейке (1.2)

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), & x \in \varpi^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \Sigma_1^\varepsilon \cup \Sigma_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$u^\varepsilon|_{\Gamma_{1j}^\varepsilon} = e^{i\eta_j a_j} u^\varepsilon|_{\Gamma_{0j}^\varepsilon}, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial Y_j} \Big|_{\Gamma_{1j}^\varepsilon} = e^{i\eta_j a_j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial Y_j} \Big|_{\Gamma_{0j}^\varepsilon}, \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

Здесь Δ_x – оператор Лапласа и λ^ε – спектральный параметр. Кроме того, в условиях квазипериодичности (1.7) функция u^ε записана в неортогональной системе координат $Y = (Y_1, Y_2)$, а Σ_p^ε и Γ_{pj}^ε – основания и боковые грани ячейки, $p = 0, 1$,

$$\begin{aligned} \Sigma_0^\varepsilon &= \{x : y \in \Omega, z = 0\}, & \Sigma_1^\varepsilon &= \{x : y \in \Omega, z = \varepsilon H(y)\}, \\ \Gamma_{p1}^\varepsilon &= \{x : y_2 \in (0, a_2 \sin \theta), y_1 = pa_1 + y_2 \operatorname{ctg} \theta, 0 < z < \varepsilon H(y)\}, \\ \Gamma_{p2}^\varepsilon &= \{x : y_1 \in (pa_2 \cos \theta, pa_2 \cos \theta + a_1), y_2 = pa_2 \sin \theta, 0 < z < \varepsilon H(y)\}. \end{aligned}$$

Вариационная формулировка задачи (1.6), (1.7) сводится к интегральному тождеству [6]

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta), \quad (1.8)$$

где $\nabla_x = \operatorname{grad}$, $(\cdot, \cdot)_{\varpi^\varepsilon}$ – естественное скалярное произведение в пространстве $L_2(\varpi^\varepsilon)$ и $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ – подпространство функций из класса Соболева $H^1(\varpi^\varepsilon)$, обращающихся

в нуль на $\Sigma_1^\varepsilon \cup \Sigma_0^\varepsilon$ и подчиненных первому (устойчивому) условию квазипериодичности (1.7). Поскольку полуторалинейная эрмитова форма в левой части тождества (1.8) замкнута и положительно определена на $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$, задаче (1.8) (или (1.6), (1.7) в дифференциальной форме) отвечает положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор $A^\varepsilon(\eta)$ в $L_2(\varpi^\varepsilon)$ с дискретным (благодаря компактности вложения $H^1(\varpi^\varepsilon) \subset L_2(\varpi^\varepsilon)$) спектром (1.5) (см., например, [1]). По понятным причинам функции $\mathbb{Y} \ni \eta \mapsto \lambda_n^\varepsilon(\eta)$ непрерывны и периодичны с периодами $2\pi/a_j$ относительно переменных η_j , т. е. множества (1.4) в самом деле связные и замкнутые. Собственные функции $u_1^\varepsilon(\eta; \cdot), u_2^\varepsilon(\eta; \cdot), \dots \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ задачи (1.8) можно подчинить условиям ортогональности и нормировки:

$$(u_j^\varepsilon(\eta; \cdot), u_k^\varepsilon(\eta; \cdot))_{\varpi^\varepsilon} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Равенство

$$\sigma^\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Upsilon_n^\varepsilon \quad (1.10)$$

подразумевает возможность появления лакун – интервалов на полуоси $\mathbb{R}_+$, свободных от спектра, но имеющих концевые точки в нем. Основная цель настоящей работы состоит в доказательстве того, что при малом ε в спектре (1.10) действительно раскрыты лакуны, причем их количество неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$. Кроме того, мы выводим асимптотические формулы для характеристик лакун. Так, в разделе 3 на основе полученных в разделе 2 априорных весовых оценок собственных функций задачи (1.8) получена следующая оценка длины $|\Upsilon^\varepsilon|$ сегмента (1.4):

$$|\Upsilon_j^\varepsilon| \leq 2C_j e^{-\delta_j/\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_j], \quad (1.11)$$

где C_j и δ_j, ε_j – положительные величины. Помимо этого, мы показываем, что

$$\Upsilon_j^\varepsilon \subset [\pi^2 \varepsilon^{-2} + \Lambda_j - c_j(\tau) \varepsilon^\tau, \pi^2 \varepsilon^{-2} + \Lambda_j + c_j(\tau) \varepsilon^\tau], \quad \tau < B := \frac{2}{2 + \beta}, \quad (1.12)$$

где

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_n \leq \dots, \quad \Lambda_n \rightarrow +\infty, \quad (1.13)$$

– собственные числа задачи Дирихле для двумерного оператора Лапласа Δ_y в области ω :

$$(\nabla_y U, \nabla_y V)_\omega = \Lambda(U, V)_\omega, \quad V \in H_0^1(\omega). \quad (1.14)$$

Здесь обозначения аналогичны использованным в интегральном тождестве (1.8), а $H_0^1(\omega)$ – пространство таких функций $V \in H^1(\omega)$, что $V = 0$ на контуре $\partial\omega$.

В силу формул (1.11) и (1.12) спектральный сегмент Υ_j^ε , отвечающий простому собственному числу Λ_j в последовательности (1.13), окаймлен двумя лакунами (см. теорему 2 настоящей работы), однако в случае собственного числа с кратностью $\kappa_j > 1$, т. е. при условии

$$\Lambda_{j-1} < \Lambda_j = \dots = \Lambda_{j+\kappa_j-1} < \Lambda_{j+\kappa_j}, \quad (1.15)$$

возникают лакуны с шириной $\Lambda_j - \Lambda_{j-1} + O(e^{-\delta_j/\varepsilon})$ и $\Lambda_{j+\kappa_j} - \Lambda_j + O(e^{-\delta_{j+\kappa_j}/\varepsilon})$ между парами сегментов $\Upsilon_{j-1}^\varepsilon$, Υ_j^ε и $\Upsilon_{j+\kappa_j-1}^\varepsilon$, $\Upsilon_{j+\kappa_j}^\varepsilon$ соответственно, но для того

чтобы найти лакуны между сегментами $\Upsilon_j^\varepsilon, \dots, \Upsilon_{j+\kappa_j-1}^\varepsilon$, нужны дополнительные соображения. А именно, для изучения упомянутых сегментов в разделе 4 при дополнительных предположениях о C^2 -гладкости границы $\partial\omega$ и при условиях

$$H(y) = 1 - \nu^\beta (h(s) + \tilde{H}(y)), \quad y \in \mathcal{V}_d \setminus \omega, \quad \beta > \frac{1}{2} \quad (1.16)$$

на основе явления пограничного слоя выводятся уточненные асимптотические формулы

$$\lambda_p^\varepsilon(\eta) = \pi^2 \varepsilon^{-2} + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p + O(\varepsilon^{B(1+\min\{1, 2\beta-1\})/2}), \quad p = j, \dots, j + \kappa_j - 1. \quad (1.17)$$

Здесь (ν, s) – система локальных криволинейных координат в d -окрестности $\mathcal{V}_d$ контура $\partial\omega$ при некотором $d > 0$, ν – ориентированное расстояние до $\partial\omega$ ($\nu < 0$ внутри области ω), s – длина дуги, $h \in C^2(\partial\omega)$ – положительная функция и $\tilde{H} \in C^\infty(\mathcal{V}_d \setminus \omega)$, $\tilde{H} = 0$ на $\partial\omega$. Поправочные слагаемые μ_p в асимптотике (1.17) суть собственные числа некоторой $(\kappa_j \times \kappa_j)$ -матрицы M , которая строится по функции h и собственным функциям $U_j, \dots, U_{j+\kappa_j-1}$ задачи (1.14) (см. формулы (4.1) для элементов M_{pq}). Таким образом, если $\mu_p \neq \mu_q$ при всех $p \neq q$, то в силу соотношений (1.17) между сегментами $\Upsilon_j^\varepsilon, \dots, \Upsilon_{j+\kappa_j-1}^\varepsilon$ имеются лакуны шириной $O(\varepsilon^B)$.

В заключительном разделе 5 обсуждаются формы ячеек периодичности, отличающиеся от (1.2), но также обеспечивающие раскрытие лакун в спектре задачи Дирихле. Кроме того, мы объясняем причину ухудшения оценки остатка в разложении (1.17) при $\beta \in (1/2, 1)$ или искажение всей асимптотической формулы (1.17) в случае $\beta \in (0, 1/2]$: в $c\varepsilon^{1/(1-\beta)}$ -окрестности дуги $\partial\omega \times \{\varepsilon\}$ возникает явление мелкого пограничного слоя.

Раскрытие лакун в спектре (1.10) задачи (1.8) обусловлено эффектом локализации собственных функций около “ребер” и “складок” тонких ограниченных областей и сопутствующей концентрацией собственных чисел в узких частотных диапазонах. Несмотря на то что, по-видимому, впервые такой эффект был математически строго описан в работе [7] (см. также [8], [9]), раскрытие лакун в спектре задачи Дирихле в тонкой двумерной полосе с периодически изменяющейся шириной было установлено в работах [10], [11]. Упомянем статью [12], где лакуны найдены в случае периодически изгибающейся тонкой полосы постоянной ширины. Представленные ниже результаты получены при помощи иной техники, основанной на весовых априорных оценках решений краевых задач в тонких областях.

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введем весовую функцию

$$E_\delta(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in \omega, \\ \exp\left(\frac{\delta \rho(y)^{1+\beta/2}}{\varepsilon}\right) & \text{при } y \in \Omega \setminus \omega, \quad \rho(y) < d, \\ \exp\left(\frac{\delta d^{1+\beta/2}}{\varepsilon}\right) & \text{при } y \in \Omega \setminus \omega, \quad \rho(y) > d. \end{cases} \quad (2.1)$$

Поскольку в окрестности дуги $\partial\omega$ функция ρ удовлетворяет условию Липшица и потому имеет ограниченную обобщенную производную, параметр $d > 0$ можно выбрать так, чтобы $E_\delta(y) = \text{const}$ вблизи внешнего контура $\partial\Omega$ и

$$|\nabla_y E_\delta(y)| \leq c_\rho \frac{\delta}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \rho(y)^{\beta/2} E_\delta(y). \quad (2.2)$$

Пусть собственное число $\lambda^\varepsilon(\eta)$ задачи (1.8) удовлетворяет соотношению

$$\lambda^\varepsilon(\eta) \leq \pi^2 \varepsilon^{-2} + \ell_\lambda \quad (2.3)$$

с некоторой постоянной ℓ_λ . Мы считаем, что соответствующая собственная функция u^ε нормирована условием (1.9). Возьмем произведение $v_\delta^\varepsilon = E_\delta u_\delta^\varepsilon$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве (1.8) – функции v_δ^ε и $u_\delta^\varepsilon = E_\delta u^\varepsilon$ принадлежат пространству $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$, так как E_δ постоянна вблизи боковой поверхности ячейки, на которой наложены условия квазипериодичности. Несложные преобразования показывают, что

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon(\eta)(u_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} &= \lambda^\varepsilon(\eta)(u^\varepsilon, v_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} = \text{Re}(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} = \\ &= \text{Re}((E_\delta \nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x u_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} + (E_\delta \nabla_y u^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta)_{\varpi^\varepsilon}) = \\ &= (\nabla_x u_\delta^\varepsilon, \nabla_x u_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} - \text{Re}((u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta, \nabla_y u_\delta^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon} - (\nabla_y u_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta)_{\varpi^\varepsilon}) - \\ &\quad - (u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta, u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta)_{\varpi^\varepsilon} = \\ &= \|\nabla_x u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \|u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2. \end{aligned}$$

Преобразуем данное соотношение. Введем обозначения

$$\omega(D) = \{y: \text{dist}(y, \omega) < D\}, \quad \varpi^\varepsilon(D) = \{x \in \varpi^\varepsilon: y \in \omega(D)\}.$$

При $D_\varepsilon = D_0 \varepsilon^{1+\beta/2}$ согласно (2.2) имеем $E_\delta(y) \leq c_\delta(D_0) = e^{\delta D_0^{1+\beta/2}}$ при $y \in \omega(D_\varepsilon)$, следовательно, в силу условия нормировки (1.9)

$$\begin{aligned} \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2 &= \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2 \leq \\ &\leq c_\delta^2(D_0) \|u^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2 \leq c_\delta^2(D_0) \|u^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 = c_\delta(D_0). \end{aligned}$$

Интегрируя по $y \in \Omega$ одномерное неравенство Фридрихса

$$\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)} \int_0^{\varepsilon H(y)} |u_\delta^\varepsilon(y, z)|^2 dz \leq \int_0^{\varepsilon H(y)} |\partial_z u_\delta^\varepsilon(y, z)|^2 dz,$$

находим, что

$$\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \|H^{-1} u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 \leq \|\partial_z u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2. \quad (2.4)$$

Кроме того, согласно требованию (1.1) при $d \leq 3/2$ верна формула

$$H(y)^{-2} \geq 1 + 2c_H \rho(y)^\beta, \quad y \in \omega(d) \setminus \omega. \quad (2.5)$$

Собирая приведенные выше соотношения, а также принимая во внимание предположение (2.3), приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \ell_\lambda c_\delta^2(D_0) &\geq \ell_\lambda (\|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2) \geq \\ &\geq (\lambda^\varepsilon(\eta) - \pi^2 \varepsilon^{-2}) \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \ell_\lambda \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\nabla_y u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 + \|\partial_z u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \pi^2 \varepsilon^{-2} \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \\
&\quad - \|u_\delta^\varepsilon E_\delta^{-1} \nabla_y E_\delta; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 - \ell_\lambda \|u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(D_\varepsilon))\|^2 \geq \\
&\geq \|\nabla_y u_\delta^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 + \int_{\varpi^\varepsilon} K_\varepsilon(y) |u_\delta^\varepsilon(x)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь

$$K_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \in \omega, \\ \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} H(y)^{-2} - c_\lambda & \text{при } y \in \Omega \setminus \omega(d), \\ \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} H(y)^{-2} - c_\rho^2 \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^2 \rho(y)^\beta & \text{при } y \in \omega(D_\varepsilon) \setminus \omega, \\ \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} H(y)^{-2} - c_\rho^2 \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^2 \rho(y)^\beta - \ell_\lambda & \text{при } y \in \omega(d) \setminus \omega(D_\varepsilon). \end{cases} \tag{2.7}$$

Заметим, что $\beta B < 2$ и $\varepsilon^{-2} \rho(y)^\beta \geq D_0^\beta \varepsilon^{-2+\beta B}$ при $y \in \omega(d) \setminus \omega(D_\varepsilon)$. В итоге, взяв параметр ε достаточно малым и приняв во внимание соотношения (2.5), зафиксируем показатель $\delta > 0$ так, чтобы $K_\varepsilon(x) \geq c_K \varepsilon^{-2} \rho(y)^\beta$ при $y \in \Omega \setminus \omega$ с некоторым множителем $c_K > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Если собственное число $\lambda^\varepsilon(\eta)$ задачи (1.8) удовлетворяет неравенству ограничению (2.3), а соответствующая собственная функция $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ нормирована в соответствии с (1.9), то найдутся такие положительные величины $\delta = \delta_\lambda$, ε_λ и C_λ , что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]$ верна следующая оценка с весовым множителем (2.1):

$$\|E_\delta \nabla_y u^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\rho^{\beta/2} E_\delta u^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(0))\|^2 \leq C_\lambda. \tag{2.8}$$

Указанные величины зависят от мажоранты ℓ_λ в ограничении (2.3), а также от областей Ω , ω и функции H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство независимости оценки от ε и сама оценка (2.8) получаются при помощи простого анализа формул (2.6) и (2.7). Отметим лишь, что в правой части (2.6) фигурирует норма градиента произведения $u_\delta^\varepsilon = E_\delta u^\varepsilon$, но замена ее нормой $\|E_\delta \nabla_y u^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|$ производится в соответствии с неравенством (2.2) и полученной оценкой второго слагаемого из левой части (2.8).

3. ПАРАМЕТРЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ

Пусть $U_1, \dots, U_n \in H_0^1(\omega)$ – собственные функции задачи Дирихле (1.14), подчиненные обычным условиям ортогональности и нормировки

$$(U_j, U_k)_\omega = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Продолжим произведения $U_j(y) \sin(\pi \varepsilon^{-1} z)$ нулем с цилиндра $\varpi^\varepsilon(0) = \omega \times (0, \varepsilon)$ на всю область ϖ^ε , эти продолжения v_j^ε принадлежат пространству $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ при любом $\eta \in \mathbb{Y}$, так как $v_j^\varepsilon = 0$ всюду на поверхности $\partial \varpi^\varepsilon$. Применим принцип максимина (см., например, [1])

$$\lambda_n^\varepsilon(\eta) = \max_{\mathcal{E}_n^\varepsilon(\eta)} \inf_{V \in \mathcal{E}_n^\varepsilon(\eta) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x V; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2}{\|V; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2}; \tag{3.2}$$

здесь $\mathcal{E}_n^\varepsilon(\eta)$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ с коразмерностью $n - 1$. В частности, ввиду линейной независимости функций $v_1^\varepsilon, \dots, v_n^\varepsilon$ каждое такое подпространство содержит какую-то их линейную комбинацию

$$V^\varepsilon = \sum_{j=1}^n a_j^\varepsilon(\eta) v_j^\varepsilon, \quad \sum_{j=1}^n |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 = 1. \quad (3.3)$$

Следовательно, с учетом формул (3.1) и (1.14) получаем, что

$$\lambda_n^\varepsilon(\eta) \leq \max_{\mathcal{E}_n^\varepsilon(\eta)} \frac{\|\nabla_x V^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2}{\|v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \Lambda_j \right) |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 \leq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \Lambda_n, \quad (3.4)$$

т.е. для собственных чисел (1.5) задачи (1.8) действительно выполнено соотношение (2.3).

Пусть теперь $u_1^\varepsilon(\eta'; \cdot), \dots, u_n^\varepsilon(\eta'; \cdot) \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta')$ – собственные функции задачи (1.8) с каким-либо параметром $\eta' \in \mathbb{Y}$. Умножим их на гладкую срезающую функцию χ , равную единице на $\omega(d/2)$ и нулю вне $\omega(d)$. Поскольку $1 - \chi = 0$ и $\nabla_y \chi = 0$ за пределами множества $\omega(d/2)$, в силу оценки (2.8) из теоремы 1 имеем

$$\|(1 - \chi)u_j^\varepsilon(\eta'; \cdot); L^2(\varpi^\varepsilon)\| + \|u_j^\varepsilon(\eta'; \cdot) \nabla_y \chi; L^2(\varpi^\varepsilon)\| \leq c_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon}, \quad (3.5)$$

и в силу условий ортогональности (1.9) функции $v_1^\varepsilon = \chi u_1^\varepsilon, \dots, v_n^\varepsilon = \chi u_n^\varepsilon$ остаются линейно независимыми и принадлежат пространству $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ при любом $\eta \in \mathbb{Y}$, так как обращаются в нуль вблизи боковых граней Γ_{pj}^ε ячейки ϖ^ε . Всякое подпространство $\mathcal{E}_n^\varepsilon(\eta)$ в принципе максимина (3.2) содержит их линейную комбинацию V^ε из формулы (3.3), т.е.

$$\lambda_n^\varepsilon(\eta) \leq \frac{\sum \lambda_j^\varepsilon(\eta') |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 + c_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon}}{\sum |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 - c_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon}} \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta') + C_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon}.$$

В результате приходим к неравенствам

$$\lambda_n^\varepsilon(\eta') - C_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon} \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta) \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta') + C_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n/\varepsilon} \quad (3.6)$$

(для вывода первого из них делаем замену $\eta' \leftrightarrow \eta$), откуда получаем формулу (1.11) для длины спектрального сегмента (1.4), причем множитель ε^2 , разумеется, можно опустить.

Соотношение (3.4) показывает, что при любом $K > 0$ на интервале $(0, \pi^2 \varepsilon^{-2} + K)$ расположено конечное число $N(K)$ собственных чисел задачи (1.8). Поскольку согласно оценкам (3.6) длина каждого из спектральных сегментов не превосходит $C(K) e^{-\delta(K)/\varepsilon}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon(K)]$ и некоторых (вообще говоря, малых) $\varepsilon(K), \delta(K) > 0$, на этом интервале обязательно открываются лакуны. Для вывода формулы (1.12), которая описывает положение сегментов и в соответствии с которой $N(K) \rightarrow \infty$ при $K \rightarrow \infty$ (вместе с тем $\varepsilon(K) \rightarrow +0$), применим еще раз принцип максимина, но теперь к задаче Дирихле в цилиндрической области $\Xi^\varepsilon = \omega(2\varepsilon^\tau) \times (0, \varepsilon)$ с показателем τ из (1.12). Благодаря возможности разделить переменные перейдем к двумерной задаче и воспользуемся результатом статьи [13], предоставляющим условия справедливости классической формулы Адамара [14] (см. также работу [15]) при возмущениях нерегулярных границ. В статье [13], в частности, показано, что в случае

липшицевой дуги $\partial\omega$ собственные числа μ_n^ε и $\varepsilon^{-2}\pi^2 + \Lambda_n$ задач Дирихле в областях Ξ^ε и $\omega \times (0, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$|\mu_n^\varepsilon - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \Lambda_n| \leq c_n(\tau)\varepsilon^\tau. \quad (3.7)$$

Умножим собственные функции u_j^ε исходной задачи (1.8) на гладкую срезающую функцию χ_τ , равную нулю вне $\omega(2\varepsilon^\tau)$ и единице на $\omega(\varepsilon^\tau)$; $0 \leq \chi_\tau \leq 1$. Заметим, что $|\nabla_y \chi_\tau(y)| \leq c\varepsilon^{-\tau}$ и $E_{\delta_n}(y) \geq e^{\delta_n \varepsilon^{-s}}$ при $y \in \omega(2\varepsilon^\tau) \setminus \omega(\varepsilon^\tau)$; здесь $s = 1 - B^{-1}\tau > 0$. Таким образом, $\|(1 - \chi_\tau)u_j^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\| \leq c_n e^{-\delta_n \varepsilon^{-s}}$, $j = 1, \dots, n$, по теореме 1, т. е. произведения $v_j^\varepsilon = \chi_\tau u_j^\varepsilon$, продолженные нулем из области $\{x \in \varpi^\varepsilon: y \in \omega(2\varepsilon^\tau)\}$ на Ξ^ε , сохраняют линейную независимость при малом значении ε . Любое подпространство $\mathcal{E}_n \subset H_0^1(\Xi^\varepsilon)$ с коразмерностью $n - 1$ в принципе максимина

$$\mu_n^\varepsilon = \max_{\mathcal{E}_n} \inf_{V \in \mathcal{E}_n} \frac{\|\nabla_x V; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2}{\|V; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2} \quad (3.8)$$

содержит линейную комбинацию V^ε из формулы (3.3). Кроме того, в силу оценки (2.8) для $V^\varepsilon = \chi_\tau U^\varepsilon = \sum a_j^\varepsilon(\eta) U_j^\varepsilon$ при учете интегрального тождества (1.8) и условий (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \|(1 - \chi_\tau)^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{2\tau} \|U^\varepsilon \nabla_y \chi_\tau; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 &\leq c_n \varepsilon^2 e^{-\delta_n \varepsilon^{-s}}, \\ \|\nabla_x V^\varepsilon; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 &= \|\chi_\tau \nabla_x U^\varepsilon + U^\varepsilon \nabla_x \chi_\tau; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 \leq \\ &\leq \|\chi_\tau \nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 + c_n \varepsilon^{1-\tau} e^{\delta_n \varepsilon^{-s}} (1 + \varepsilon^{1-\tau} e^{-\delta_n \varepsilon^{-s}}), \\ \|\chi_\tau \nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 &\leq \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 \lambda_j^\varepsilon(\eta) \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta), \\ \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 &\leq \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j^\varepsilon(\eta)|^2 \lambda_j^\varepsilon(\eta) \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta), \\ \|V^\varepsilon; L_2(\Xi^\varepsilon)\|^2 &\geq 1 - c_n \varepsilon e^{-\delta_n \varepsilon^{-s}}. \end{aligned}$$

Теперь принцип максимина (3.8) вместе с оценкой (3.7) приводят к неравенству

$$\varepsilon^{-2}\pi^2 + \Lambda_n \leq \mu_n^\varepsilon + c_n(\tau)\varepsilon^\tau \leq \lambda_n^\varepsilon(\eta) + C_n(\tau)\varepsilon^\tau.$$

Отсюда и из (3.4) вытекает включение (1.12), а значит, доказано очередное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\tau < B = 2/(2+\beta)$ найдутся такие положительные величины ε_n , C_n , δ_n и $c_n(\tau)$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n]$ длины сегментов $\Upsilon_1^\varepsilon, \dots, \Upsilon_n^\varepsilon$ в спектре (1.10) задачи (1.8) не превосходят $C_n e^{-\delta_n/\varepsilon}$ и при каждом $j = 1, \dots, n$ верны вложения (1.12), где Λ_j – собственные числа (1.13) задачи Дирихле в области ω .

4. ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Если Λ_j – собственное число задачи (1.8) с кратностью $\varkappa_j$, иными словами, выполнено соотношение (1.13), то теорема 2 устанавливает наличие лакун ширины $\Lambda_j - \Lambda_{j-1} + O(e^{-\delta_j + \varkappa_j})$ и $\Lambda_{j+\varkappa_j} - \Lambda_j + O(e^{-\delta_j + \varkappa_j})$ между парами спектральных сегментов $\Upsilon_{j-1}^\varepsilon$, Υ_j^ε и $\Upsilon_{j+\varkappa_j-1}^\varepsilon$, $\Upsilon_{j+\varkappa_j}^\varepsilon$ соответственно. Вместе с тем информации, полученной в разделе 3, не хватает для идентификации лакун между сегментами $\Upsilon_j^\varepsilon, \dots, \Upsilon_{j+\varkappa_j-1}^\varepsilon$. Приведем достаточное условие того, что между сегментами,

$\Upsilon_j^\varepsilon, \dots, \Upsilon_{j+\kappa_j-1}^\varepsilon$ появится $\kappa_j - 1$ лакуна с шириной $O(\varepsilon^B)$, предположив, что контур $\partial\omega$ гладкий (принадлежит классу C^2) и выполнены требования (1.16). Также при условии (1.15) будем считать, что эрмитова матрица M с элементами

$$M_{pq} = -m \int_{\partial\omega} h(s)^{1/(2+\gamma)} \partial_\nu U_p(y) \partial_\nu U_q(y) ds, \quad p, q = j, \dots, j + \kappa_j - 1, \quad (4.1)$$

имеет простые (различные) собственные числа $\mu_j, \dots, \mu_{j+\kappa_j-1}$; в правой части (4.1) фигурируют производные ∂_ν собственных функций задачи (1.8) вдоль внешней нормали на границе $\partial\omega$, а $m > 0$ – постоянный множитель, который мы вычислим ниже (см. (4.11)).

Наша ближайшая цель – проверить асимптотические разложения (1.17). Из этих разложений в случае $\mu_p \neq \mu_q$ при $p \neq q$ как раз и вытекает приведенное выше утверждение о лакунах. Сами асимптотические формулы, разумеется, верны без каких-либо ограничений на матрицу M , однако предположение о простоте ее спектра значительно укорачивает доказательство. Сначала проведем формальный асимптотический анализ.

Вблизи контура $\partial\omega$ возникает явление пограничного слоя, который описывается при помощи быстрой переменной

$$\zeta = \varepsilon^{-B} \nu, \quad (4.2)$$

где показатель $B \in (0, 1)$ задан во втором соотношении в (1.12). Формулу (1.17) для собственного числа дополним следующими асимптотическими анзацами для собственной функции:

$$u_p^\varepsilon(\eta; x) = \begin{cases} S_\varepsilon(y, z) (\mathbf{U}_p(y) + \varepsilon^B \mathbf{U}_p'(y)) + \dots & \text{при } y \in \varpi^\varepsilon(0), \\ \varepsilon^B S_\varepsilon(y, z) w_p(\zeta, s) + \dots & \text{при } y \in \varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(0). \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие члены, не существенные для проводимого на данном этапе формального анализа, функция $S_\varepsilon(y, z)$ задается равенством

$$S_\varepsilon(y, z) = \sin \frac{\pi z}{\varepsilon H(y)} \quad (4.4)$$

и $\mathbf{U}_p$ – линейная комбинация собственных функций с подлежащими определению коэффициентами $b_j^p, \dots, b_{j+\kappa_j-1}^p$,

$$\mathbf{U}_p = b_j^p U_j + \dots + b_{j+\kappa_j-1}^p U_{j+\kappa_j-1}. \quad (4.5)$$

Присутствие множителя (4.4) в правых частях (4.3) обеспечивает выполнение условия Дирихле на основаниях Σ_0^ε и Σ_1^ε . Подставив формулы (1.17) и первое из соотношений (4.3) в уравнение Гельмгольца из задачи (1.6), суженное на множество $\varpi^\varepsilon(0) = \omega \times (0, \varepsilon)$, и собрав коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, приходим к уравнению

$$-\Delta_y \mathbf{U}_p'(y) - \Lambda_j \mathbf{U}_p'(y) = \mu_p \mathbf{U}_p(y), \quad y \in \omega. \quad (4.6)$$

Теперь найдем уравнение для главного асимптотического члена w_p в анзаце (4.3). Заметим, что оператор Лапласа в криволинейных координатах (ν, s, z) приобретает вид

$$\Delta_x = \partial_z^2 + (1 + \mathbf{k}(s)\nu)^{-1} (\partial_\nu(1 + \mathbf{k}(s)\nu) \partial_\nu + \partial_s(1 + \mathbf{k}(s)\nu)^{-1} \partial_s), \quad (4.7)$$

где $\mathbf{k}(s)$ – кривизна (гладкой по предположению) дуги $\partial\omega$ в точке s . Таким образом,

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p \right) S_\varepsilon(y, z) w_p(\zeta, s) = \\ = S_\varepsilon(y, z) \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} (1 - H(y)^{-2}) w_p(\zeta, s) + \varepsilon^{-2B} \partial_\zeta^2 w_p(\zeta, s) \right) + \dots = \\ = \varepsilon^{-2B} S_\varepsilon(y, z) (\partial_\zeta^2 w_p(\zeta, s) - 2\pi^2 h(s) \zeta^\beta w_p(\zeta, s)) + \dots \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $H(y)^{-2} - 1 = 2h(s)\nu^\beta + \dots = \varepsilon^{\beta B} 2h(s)\zeta^\beta + \dots$, вытекающее из условия (1.16) для $H(y)$ и очевидное равенство $-2 + \beta B = -2B$. Итак, следует подчинить главный член w_p анзаца (4.3) обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\partial_\zeta^2 w_p(\zeta, s) + 2\pi^2 h(s) \zeta^\beta w_p(\zeta, s) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \quad (4.8)$$

с параметром $s \in \partial\omega$. В случае $\beta = 1$ мы имеем уравнение Эйри, а в случае $\beta = 2$ – уравнение гармонического осциллятора. Далее нам понадобится только решение уравнения (4.8) с краевым условием

$$\partial_\zeta w_p(0, s) = \partial_\nu \mathbf{U}_p(0, s), \quad (4.9)$$

где $\mathbf{U}_p(\zeta, s)$ – собственная функция (4.5), записанная в координатах (ν, s) на множестве $\mathcal{V}_d \cap \bar{\omega}$. Это решение представимо в виде

$$w_p(\zeta, s) = -h(s)^{B/2} \partial_\nu \mathbf{U}_p(0, s) W(h(s)^{-B/2} \zeta), \quad (4.10)$$

причем W – решение эталонной задачи

$$-\partial_\xi^2 W(\xi) + 2\pi^2 \xi^\beta W(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_+, \quad \partial_\xi W(0) = -1,$$

которое зависит только от показателя β и является положительным в $\overline{\mathbb{R}_+}$ по понятным причинам. Именно величина

$$m = W(0) > 0 \quad (4.11)$$

уже присутствовала в формуле (4.1) для матрицы M . Нетрудно убедиться в том, что $W(\xi)$ затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью $O(\xi^{\beta/4} e^{-\sqrt{2B}\pi\xi})$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\omega(d) \setminus \omega} \nu^{-2\alpha} (\nu + \varepsilon^B)^{2t} \left(\varepsilon^{4B} |\partial_\nu^2 w_p(\zeta, s)|^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon^{2B} \sum_{k=0}^1 |\partial_\nu \partial_s^k w_p(\zeta, s)|^2 + \sum_{k=0}^2 |\partial_s^k w_p(\zeta, s)|^2 \right) dy \leq c \varepsilon^{2B(t-\alpha)+B} \end{aligned} \quad (4.12)$$

при $\alpha < 1/2$, $t \in \mathbb{R}$.

На поверхности $\partial\omega \times (0, \varepsilon)$ главные члены асимптотических анзацев (4.3), а также их нормальные производные должны совпадать, так как u_p^ε – достаточно гладкая функция. В результате сначала получаем краевое условие (4.9), а затем, учитывая равенство $\mathbf{U}_p = 0$ на $\partial\omega$, – соотношение $\mathbf{U}'_p(0, s) = w_p(0, s)$, которое в силу (4.10), (4.11) превращается в следующее:

$$\mathbf{U}'_p(y) = -mh(s)^{B/2} \partial_\nu \mathbf{U}_p(y), \quad y \in \partial\omega. \quad (4.13)$$

Согласно альтернативе Фредгольма задача (4.6), (4.13) имеет решение в том и только в том случае, когда выполнены $\varkappa_j$ условий ортогональности, которые при помощи интегрирования по частям и формул (1.9), (4.5) преобразуются в систему из $\varkappa_j$ алгебраических уравнений для коэффициентов $b_j^p, \dots, b_{j+\varkappa_j-1}^p$:

$$\begin{aligned} \mu_p b_k^p &= \mu_p \int_{\omega} U_k(y) \mathbf{U}_p(y) dy = - \int_{\omega} U_k(y) (\Delta_y + \Lambda_j) \mathbf{U}_p'(y) dy = \\ &= \int_{\partial\omega} (\mathbf{U}_p'(y) \partial_{\nu} U_k(y) - U_k(y) \partial_{\nu} \mathbf{U}_p'(y)) ds = \\ &= -m \sum_{q=j}^{j+\varkappa_j-1} b_q^p \int_{\partial\omega} h(s)^{B/2} \partial_{\nu} U_q(y) \partial_{\nu} U_k(y) ds, \quad k = j, \dots, j + \varkappa_j - 1. \end{aligned}$$

Теперь понятно, что μ_p – собственное число матрицы M с элементами (4.1), а коэффициенты линейной комбинации (4.5) образуют ее собственный вектор.

Приступим к обоснованию асимптотики. Воспользуемся простым фактом, известным как лемма о “почти собственных числах”, его проверку можно найти, например, в статье [16] и книгах [1], [17]. Введем в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon}$ и компактный положительный самосопряженный оператор $T^{\varepsilon}(\eta)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} \langle u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon} &= (\nabla_x u^{\varepsilon}, \nabla_x v^{\varepsilon})_{\varpi^{\varepsilon}} + (1 - \varepsilon^{-2} \pi^2) (u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi^{\varepsilon}}, \\ \langle T^{\varepsilon}(\eta) u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon} &= (u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\varpi^{\varepsilon}}, \quad u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon} \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Неравенство (2.4) вместе с соотношением $H(y) \leq 1$ показывают, что билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon}$ обладает всеми свойствами скалярного произведения и, кроме того,

$$\begin{aligned} \|u^{\varepsilon}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^2 &\geq \|\nabla_y u^{\varepsilon}; L_2(\varpi^{\varepsilon})\|^2 + \|u^{\varepsilon}; L_2(\varpi^{\varepsilon})\|^2 + \\ &+ \varepsilon^{-2} \pi^2 \|(H^{-2} - 1)^{1/2} u^{\varepsilon}; L_2(\varpi^{\varepsilon})\|^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Сравнивая (1.8) и (4.14), мы видим, что собственными числами оператора $T^{\varepsilon}(\eta)$ служат величины

$$t_j^{\varepsilon}(\eta) = \frac{1}{\lambda_j^{\varepsilon}(\eta) - \varepsilon^{-2} \pi^2 + 1}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (4.16)$$

а $t = 0$ – единственная точка существенного спектра. Упомянутая лемма о “почти собственных” числах утверждает, что если $\hat{t}^{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$, $\hat{u}^{\varepsilon} \in \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)$ и

$$\|\hat{u}^{\varepsilon}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\| = 1, \quad \xi^{\varepsilon} := \|T^{\varepsilon}(\eta) \hat{u}^{\varepsilon} - \hat{t}^{\varepsilon} \hat{u}^{\varepsilon}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\| \in (0, \hat{t}^{\varepsilon}),$$

то при некотором $k \in \mathbb{N}$

$$t_k^{\varepsilon}(\eta) \in [\hat{t}^{\varepsilon} - \xi^{\varepsilon}, \hat{t}^{\varepsilon} + \xi^{\varepsilon}]. \quad (4.17)$$

Из членов анзацев (1.17) и (4.3) составим “почти собственные” пары

$$\hat{t}_p^{\varepsilon} = (1 + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p)^{-1}, \quad \hat{u}_p^{\varepsilon} = \|\mathcal{W}_p^{\varepsilon}; \mathcal{H}^{\varepsilon}(\eta)\|^{-1} \mathcal{W}_p^{\varepsilon}, \quad p = j, \dots, j + \varkappa_j - 1, \quad (4.18)$$

где χ – срезающая функция, введенная перед формулой (3.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p^{\varepsilon}(y) &= \begin{cases} \mathbf{U}_p(y) + \varepsilon^B \mathbf{U}_p'(y), & y \in \omega, \\ \chi(y) \varepsilon^B w_p(\zeta, s), & y \in \Omega \setminus \omega, \end{cases} \\ \mathcal{W}_p^{\varepsilon}(y, z) &= S_{\varepsilon}(y, z) \mathcal{U}_p^{\varepsilon}(y), \quad (y, z) \in \varpi^{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Согласно одному из определений нормы с учетом формул (4.14) имеем

$$\begin{aligned}\xi_p^\varepsilon &= \|T^\varepsilon(\eta)\hat{u}_p^\varepsilon - \hat{t}_p^\varepsilon\hat{u}_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\| = \sup |\langle T^\varepsilon(\eta)\hat{u}_p^\varepsilon - \hat{t}_p^\varepsilon\hat{u}_p^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_\varepsilon| = \\ &= \|\mathcal{W}_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|^{-1} \hat{t}_p^\varepsilon \sup |I_1^\varepsilon - I_2^\varepsilon - I_3^\varepsilon|,\end{aligned}\quad (4.20)$$

где точные верхние грани вычисляются по таким $v^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$, что $\|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\| = 1$, и введены обозначения

$$\begin{aligned}I_1^\varepsilon &= (\nabla_y \mathcal{W}_p^\varepsilon, \nabla_y v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}, \quad I_2^\varepsilon = (\partial_z^2 \mathcal{W}_p^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}, \\ I_3^\varepsilon &= (\varepsilon^{-2}\pi^2 + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p)(\mathcal{W}_p^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Преобразуем эти скалярные произведения, заметив, что множитель перед последним знаком $\sup$ в правой части равенства (4.20) не превосходит $c_p \varepsilon^{-1/2}$, так как $\|\mathcal{W}_p^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon(0))\|^2 \geq c\varepsilon$, $c > 0$ (см. формулы (4.15), (4.19) и (4.5), (3.1)).

Введем операцию $v^\varepsilon \mapsto \bar{v}^\varepsilon$ формулой

$$\bar{v}^\varepsilon(y) = \frac{2}{\varepsilon H(y)} \int_0^{\varepsilon H(y)} \sin\left(\frac{\pi z}{\varepsilon H(y)}\right) v^\varepsilon(y, z) dz. \quad (4.22)$$

ЛЕММА 1. Если $\|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\| = 1$, то для функции $\bar{v}^\varepsilon \in H_0^1(\omega)$ нормы

$$\varepsilon^{1/2} \|\bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega)\|, \quad \varepsilon^{-1/2} \|(\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} \bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega \setminus \omega)\|, \quad \varepsilon^{(1-B)/2} \|\bar{v}^\varepsilon; L_2(\partial\omega)\| \quad (4.23)$$

равномерно ограничены при $\varepsilon \in (0, 1]$. Кроме того, $\overline{\nabla_y v^\varepsilon}(y) = \nabla_y \bar{v}^\varepsilon(y)$ для $y \in \omega$ и

$$\|\rho^{1-\beta/2} (\overline{\nabla_y v^\varepsilon} - \nabla_y \bar{v}^\varepsilon); L_2(\Omega \setminus \omega)\| \leq c\varepsilon^{1/2}. \quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что

$$\|\bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega)\|^2 = \frac{4}{\varepsilon^2} \int_\omega \left| \int_0^{\varepsilon H(y)} S_\varepsilon(y, z) v^\varepsilon(y, z) dz \right|^2 dy \leq \frac{2}{\varepsilon} \|v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

откуда сразу вытекает ограниченность первой нормы в (4.23). Далее

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} \|\rho^{\beta/2} \bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega \setminus \omega)\|^2 &\leq c\varepsilon^{-1} \|(H^{-2} - 1)^{1/2} \bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega \setminus \omega)\|^2 \leq \\ &\leq c\varepsilon^{-2} \|(H^{-2} - 1)^{1/2} v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(0))\|^2 \leq c \|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(\eta)\|^2 = c.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Здесь использовано условие (1.1) или (1.16) для $H(y)$.

Продолжим функцию v^ε нулем на цилиндр $\Omega \times (0, \varepsilon)$ и при $y \in \mathcal{V}_d$ запишем продолжение в криволинейных координатах (ν, s, z) как $v^\varepsilon(\nu, s, z)$. Покроем контур $\partial\omega$ дугами q_i^ε с длинами ε^B и введем ячейки с диаметрами $O(\varepsilon^B)$:

$$Q_i^\varepsilon = \{(\nu, s): s \in q_i^\varepsilon, \nu \in (\varepsilon^B, 2\varepsilon^B)\}, \quad Q_i^{\varepsilon'} = \{(\nu, s): s \in q_i^\varepsilon, \nu \in (-\varepsilon^B, \varepsilon^B)\}.$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2} \varepsilon^{\beta B} \|v^\varepsilon; L_2(Q_i^{\varepsilon'})\|^2 + \varepsilon^{-B} \|v^\varepsilon; L_2(Q_i^\varepsilon)\|^2 &\leq \\ &\leq c(\|\nabla_{(\nu, s)} v^\varepsilon; L_2(Q_i^{\varepsilon'} \cup Q_i^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} \varepsilon^{\beta B} \|v^\varepsilon; L_2(Q_i^\varepsilon)\|^2),\end{aligned}\quad (4.26)$$

которое получается путем растяжения координат с коэффициентом ε^{-B} на основе известных неравенства Пуанкаре и следового неравенства для ячеек конечных размеров (согласно равенству $-2 + \beta B = -2B$ это растяжение устраняет множители при всех нормах). Просуммируем формулы (4.26) по всем ячейкам и проинтегрируем результат по $z \in (0, \varepsilon)$. В итоге, учитывая конечную кратность покрытий, а также неравенства $|\nabla_{(\nu, s)} v^\varepsilon(y)| \leq c |\nabla_y v^\varepsilon(y)|$ для $y \in \mathcal{V}_d$ и $\varepsilon^{\beta B} \leq \rho(y)^\beta$ для $y \in \omega(2\varepsilon^B) \setminus \omega(\varepsilon^B)$, находим, что

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \varepsilon^{\beta B} \|v^\varepsilon; L_2(\mathcal{V}_{\varepsilon B} \times (0, \varepsilon))\|^2 + \varepsilon^{-B} \|v^\varepsilon; L_2(\partial\omega \times (0, \varepsilon))\|^2 \leq \\ & \leq c (\|\nabla_{(\nu, s)} v^\varepsilon; L_2(\mathcal{V}_{2\varepsilon B} \times (0, \varepsilon))\|^2 + \varepsilon^{-2} \varepsilon^{\beta B} \|v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon(2\varepsilon^B) \setminus \varpi^\varepsilon(\varepsilon^B))\|^2) \leq \\ & \leq C (\|\nabla_y v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\rho^\beta v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(0))\|^2). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.25), (4.15) вытекает равномерная ограниченность второй и третьей норм в (4.23).

Выполнив дифференцирование функции (4.22), находим, что

$$\nabla_y \bar{v}^\varepsilon(y) = \overline{\nabla_y v^\varepsilon}(y) - \frac{\nabla_y H(y)}{H(y)} \left(\bar{v}^\varepsilon(y) + \frac{2\pi z}{\varepsilon^2 H(y)^2} \int_0^{\varepsilon H(y)} \cos\left(\frac{\pi z}{\varepsilon H(y)}\right) v^\varepsilon(y, z) dz \right).$$

Поскольку в силу определения (4.4) верны формулы

$$\nabla_y S_\varepsilon(y, z) = 0 \quad \text{при} \quad y \in \omega, \quad |\nabla_y S_\varepsilon(y, z)| \leq c \rho(y)^{\beta-1} \quad \text{при} \quad y \in \Omega \setminus \omega, \quad (4.27)$$

приходим к основанной на неравенствах (4.15) и (4.24), (4.25) оценке

$$\begin{aligned} & \|\rho^{1-\beta}(\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} (\overline{\nabla_y v^\varepsilon} - \nabla_y \bar{v}^\varepsilon); L_2(\Omega \setminus \omega)\|^2 \leq \\ & \leq c (\|(\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} \bar{v}^\varepsilon; L_2(\Omega \setminus \omega)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|(\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon \setminus \varpi^\varepsilon(0))\|^2) \leq c\varepsilon, \end{aligned}$$

которая доказывает неравенство (4.24) и тем самым завершает доказательство леммы.

Соотношения (4.19) и (4.22) обеспечивают следующее равенство для скалярных произведений из (4.21):

$$I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega H(y) \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2} - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \Lambda_j - \varepsilon^B \mu_p \right) \mathcal{U}_p^\varepsilon(y) \bar{v}^\varepsilon(y) dy = I_4^\varepsilon + I_5^\varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} I_4^\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} (\Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p) \int_\omega (\mathbf{U}_p(y) + \varepsilon^B \mathbf{U}'_p(y)) \bar{v}^\varepsilon(y) dy, \\ I_5^\varepsilon &= -\frac{\varepsilon^{1+B}}{2} \int_{\Omega \setminus \omega} \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)} - H(y) \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p \right) \right) w_p(\zeta, s) \chi(y) \bar{v}^\varepsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Теперь при помощи (4.23) и (4.12) выводим оценки

$$\begin{aligned} & \left| I_4^\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \Lambda_j (\mathbf{U}_p, \bar{v}^\varepsilon)_\omega - \frac{\varepsilon^{1+B}}{2} (\Lambda_j (\mathbf{U}'_p, \bar{v}^\varepsilon)_\omega + \mu_p (\mathbf{U}_p, \bar{v}^\varepsilon)_\omega) \right| \leq \\ & \leq c \varepsilon^{1+2B} |(\mathbf{U}_p, \bar{v}^\varepsilon)_\omega| \leq c \varepsilon^{2B+1/2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & \left| I_5^\varepsilon + \varepsilon^{B-1} \pi^2 \int_{\partial\omega} \int_0^d \nu^\beta h(s) w_p(\zeta, s) \chi(y) \overline{v^\varepsilon}(y) d\nu ds \right| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{1+B} \int_{\omega(d)\setminus\omega} \left(\frac{\nu^{\beta+1}}{\varepsilon^2} + 1 \right) |w_p(\zeta, s)| |\overline{v^\varepsilon}(y)| dy \leq c\varepsilon^{(1+3B)/2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Следующий шаг – преобразование скалярного произведения I_1^ε в произведение $I_6^\varepsilon = (\nabla_y \mathcal{U}_p^\varepsilon, \nabla_y (\chi v^\varepsilon))_{\varpi^\varepsilon}$. На носителе $\text{supp} |\nabla_y \chi|$ член $w_p(\zeta, s)$ типа пограничного слоя экспоненциально мал, т. е. мажоранта для величины $|I_1^\varepsilon - I_6^\varepsilon|$ обусловлена исключительно следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{U}_p^\varepsilon \nabla_y S_\varepsilon, \chi \nabla_y v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}| \leq \\ & \leq c\varepsilon^B \|\nabla_y v^\varepsilon; L_2(\varpi^\varepsilon)\| \left(\int_{\Omega \setminus \omega} \int_0^{\varepsilon H(y)} |\nabla_y S_\varepsilon(y, z)|^2 |w_p(\zeta, s)|^2 dz dy \right)^{1/2} \leq \\ & \leq c\varepsilon^{B+1/2} \|\nu^{B-1} w_p; L_2(\omega(d) \setminus \omega)\| \leq c\varepsilon^{(1+B(2\beta+1))/2}. \end{aligned}$$

Здесь учтены соотношения (4.12) для составляющей w_p , а также формула (4.27).

Теперь, обращаясь к лемме 1, обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} & \left| I_6^\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla_y (\mathbf{U}_p + \varepsilon^B \mathbf{U}_p'), \nabla_y \overline{v^\varepsilon})_\omega - \frac{1}{2} \varepsilon^{B+1} (H \nabla_y w_p, \nabla_y (\chi \overline{v^\varepsilon}))_{\Omega \setminus \omega} \right| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{B+1} |(H \nabla_y w_p, \nabla_y (\chi \overline{v^\varepsilon}) - \overline{\nabla_y (\chi v^\varepsilon)})_{\Omega \setminus \omega}| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{B+3/2} \|\rho^{\beta-1} (\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} \nabla_y w_p; L_2(\Omega \setminus \omega)\| \leq \varepsilon^{(1+B(2\beta+1))/2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Рассмотрим два вычитаемых

$$I_7^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla_y (\mathbf{U}_p + \varepsilon^B \mathbf{U}_p'), \nabla_y \overline{v^\varepsilon})_\omega, \quad I_8^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^{B+1} (H \nabla_y w_p, \nabla_y (\chi \overline{v^\varepsilon}))_{\Omega \setminus \omega}$$

под знаком модуля в левой части (4.30). Поскольку $\mathbf{U}_p$ и $\mathbf{U}_p'$ – решения задач (1.14) и (4.6), (4.13), имеем

$$\begin{aligned} & (\nabla_y \mathbf{U}_p, \nabla_y \overline{v^\varepsilon})_\omega - \Lambda_j(\mathbf{U}_p, \overline{v^\varepsilon})_\omega = (\partial_\nu \mathbf{U}_p, \overline{v^\varepsilon})_{\partial\omega}, \\ & (\nabla_y \mathbf{U}_p', \nabla_y \overline{v^\varepsilon})_\omega - \Lambda_j(\mathbf{U}_p' \overline{v^\varepsilon})_\omega - \mu_p(\mathbf{U}_p, \overline{v^\varepsilon})_\omega = (\partial_\nu \mathbf{U}_p', \overline{v^\varepsilon})_{\partial\omega}. \end{aligned}$$

Лемма 1 дает оценку $|(\partial_\nu \mathbf{U}_p', \overline{v^\varepsilon})_{\partial\omega}| \leq c\varepsilon^{(B-1)/2}$, а значит, согласно (4.28) получаем

$$\left| I_7^\varepsilon + I_4^\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon (\partial_\nu \mathbf{U}_p, \overline{v^\varepsilon})_{\partial\omega} \right| \leq c\varepsilon^{(1+3B)/2}.$$

Наконец, принимая во внимание формулы (4.8), (4.9) и (4.12) для члена w_p типа пограничного слоя и интегрируя по частям, в силу оценки (4.29) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| I_8^\varepsilon + I_5^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\nu \mathbf{U}_p, \overline{v^\varepsilon})_{\partial\omega} \right| \leq c \left\{ \varepsilon^{(1+3B)/2} + \varepsilon^{1+B} \|(\rho + \varepsilon^B)^{\beta/2} \overline{v^\varepsilon}; L_2(\Omega \setminus \omega)\| \times \right. \\ & \quad \times \left(\int_{\omega(d)\setminus\omega} (\nu + \varepsilon^B)^{-\beta} \left(\nu^{2\min\{1,\beta\}} |\partial_\nu^2 w_p(\zeta, s)|^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{k=0}^1 (|\partial_\nu \partial_s^k w_p(\zeta, s)|^2 + |\partial_s^{k+1} w_p(\zeta, s)|^2) dy \right)^{1/2} \right\} \leq \\ & \leq c(\varepsilon^{(1+3B)/2} + \varepsilon^{(1+B(2\beta+1))/2}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Данная оценка получена путем перехода от двойного интеграла к повторному по переменным $(\nu, s) \in (0, d) \times \partial\omega$ и выделением компоненты $\partial_\nu^2 w_p(\zeta, s) = \varepsilon^{2B} \partial_\zeta^2 w_p(\zeta, s)$ из выражения $\Delta_y w_p(\zeta, s)$ согласно представлению лапласиана (4.7), причем использовано равенство

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} \int_0^d (\partial_\zeta^2 w_p(\zeta, s) + 2\pi^2 h(s) \zeta^\beta w_p(\zeta, s)) \overline{v^\varepsilon}(\nu, s) d\nu ds = \\ = - \int_{\partial\omega} \partial_\zeta w_p(0, s) \overline{v^\varepsilon}(0, s) ds = - \int_{\partial\omega} \partial_\nu \mathbf{U}_p(0, s) \overline{v^\varepsilon}(0, s) ds. \end{aligned}$$

Кроме того, из якобиана $J(\nu, s) = 1 + \mathbf{k}(s)\nu$ с учетом предположения (1.16) о функции H в последнем интеграле (4.31) возник множитель при $\partial_\nu^2 w_p$, не превосходящий $c(\nu + \nu^\beta)$.

Собирая приведенные соотношения, видим, что величины (4.20) допускают оценки $\xi_p^\varepsilon \leq c_p \varepsilon^B \varepsilon^{B \min\{1, 2\beta-1\}/2}$. Таким образом, согласно (4.17) находим собственные числа $t_{K(p)}^\varepsilon(\eta)$ оператора $T^\varepsilon(\eta)$, для которых верны соотношения

$$|t_{K(p)}^\varepsilon(\eta) - \hat{t}_p^\varepsilon| \leq c_p \varepsilon^B \varepsilon^{B \min\{1, 2\beta-1\}/2}, \quad p = j, \dots, j + \varkappa_j - 1.$$

Отсюда и из (4.16), (4.18), (2.3) вытекает, что при малом ε верны неравенства

$$|\lambda_{K(p)}^\varepsilon(\eta) - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \Lambda_j - \varepsilon^B \mu_p| \leq C_p \varepsilon^B \varepsilon^{B \min\{1, 2\beta-1\}/2}, \quad p = j, \dots, j + \varkappa_j - 1. \quad (4.32)$$

Поскольку согласно теореме 1 в $c_j \varepsilon^{B/2}$ -окрестности точки $\varepsilon^{-2}\pi^2 + \Lambda_j$ расположены в точности $\varkappa_j$ собственных чисел задачи (1.6), (1.7), в случае матрицы M с простыми собственными числами $\mu_j, \dots, \mu_{j+\varkappa_j-1}$ индексы $K(j), \dots, K(j + \varkappa_j - 1)$ попарно различны и принимают значения $j, \dots, j + \varkappa_j - 1$. Сформулируем утверждение, доказательство которого в общем случае (в случае кратного спектра матрицы M) требует дополнительных, но стандартных (см., например, книгу [17]) рассуждений.

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнены ограничения (1.16) и соотношение (1.15), то собственные числа $\lambda_j^\varepsilon(\eta), \dots, \lambda_{j+\varkappa_j-1}^\varepsilon(\eta)$ задачи (1.8) удовлетворяют асимптотическим формулам (1.17) (или (4.32) при $K(p) = p$), в которых $\mu_j, \dots, \mu_{j+\varkappa_j-1}$ – собственные числа матрицы M с элементами (4.1).*

Подведем итог: если

$$\mu_j \leq \dots \leq \mu_{k-1} < \mu_k = \dots = \mu_{k+l-1} < \mu_{k+l} \leq \dots \leq \mu_{j+\varkappa_j-1},$$

то между парами сегментов $\Upsilon_{k-1}^\varepsilon$, Υ_k^ε и $\Upsilon_{k+l-1}^\varepsilon$, $\Upsilon_{k+l}^\varepsilon$ имеются лакуны шириной $O(\varepsilon^B)$. Если все собственные числа простые, то такие лакуны появляются между любыми двумя соседними сегментами из $\Upsilon_j^\varepsilon, \dots, \Upsilon_{j+\varkappa_j-1}^\varepsilon$. В случае $\varkappa_j = 1$ (когда Λ_j – простое собственное число задачи (1.14)) матрица M превращается в скаляр, а формула (1.4) для $\lambda_j^\varepsilon(\eta)$ просто уточняет положение сегмента (1.12).

5. СМЕЖНЫЕ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

5.1. Мелкий пограничный слой. Согласно результатам главы 5 монографии [18] при $\beta \in (0, 1)$ возникает явление двумерного (степенного) пограничного слоя, который описывается в растянутых координатах

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\varepsilon^{-1/(1-\beta)} \nu, \varepsilon^{-1/(1-\beta)} (z - \varepsilon)). \quad (5.1)$$

Рис. 2. Области на плоскости, возникающие в задачах о пограничном слое.

При этом $(1-\beta)^{-1} > 1 > B = 2(2+\beta)^{-1}$, т. е. масштаб координат (5.1) более мелкий, чем масштаб переменных (4.2). В силу формул (1.16) и (5.1) уравнение $z = \varepsilon H(y)$ верхнего основания Σ_1^ε после формального перехода к $\varepsilon = 0$ приобретает вид

$$z = \begin{cases} h(s)y^\beta & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Иными словами, задача о мелком пограничном слое ставится в полуплоскости с параболическим вырезом (см. рис. 2а).

При $\beta \in (0, 1/2]$ асимптотический анзац (4.3) нуждается в корректировке хотя бы потому, что дифференцирование множителя (4.4) (см. формулу (4.27)) порождает особенность типа $O(\rho(y)^{\beta-1})$, которая не является квадратично-суммируемой, в результате чего главный асимптотический член в первом из разложений (4.3) выходит из класса Соболева $H^1(\varpi^\varepsilon)$. Если $\beta \in (1/2, 1)$, то этот член остается в $H^1(\varpi^\varepsilon)$, и, таким образом, игнорирование мелкого пограничного слоя приводит только к снижению точности приближения $\varepsilon^{-2}\pi^2 + \Lambda_j + \varepsilon^B \mu_p$ к собственному числу $\lambda_p^\varepsilon(\eta)$ (см. оценку остатка (4.32)).

Проблемы с гладкостью асимптотического анзаца возникают и для кусочно-гладкой функции толщины H . Например, в случае тонкой пластины с кусочно-постоянной толщиной (см. рис. 3а)

$$\varpi^\varepsilon = \{x: z \in (0, \varepsilon) \text{ при } y \in \omega, z \in (0, \varepsilon(1 - H_0\varepsilon^\beta)) \text{ при } y \in \Omega \setminus \omega\}, \quad H_0 \in (0, 1),$$

результат о локализации собственных функций сохраняется при всех $\beta \geq 0$, однако осуществить построение асимптотики собственного числа без анализа пограничного слоя около уступа (см. работы [19], [20] и рис. 2б) не удастся.

5.2. Другие формы пластины. Если у пластины

$$\varpi^\varepsilon = \{x: y \in \Omega, -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}$$

искривлены оба основания, но функция $H = H_+ + H_-$ обладает свойствами, указанными в разделе 1, то теоремы 1–3, разумеется, остаются в силе.

Предположим, что периодическая функция H в определении (1.2) ячейки ϖ^ε имеет глобальный максимум в единственной точке $y^0 \in \varpi^\varepsilon$, причем

$$H(y) = 1 - r^\beta(h(\varphi) + \tilde{H}(y)), \quad \tilde{H} \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \tilde{H}(y^0) = 0, \quad (5.2)$$

где $\beta > 0$, (r, φ) – система полярных координат с центром y^0 , а h – гладкая положительная функция угловой переменной φ . Применяя в усложненном варианте

Рис. 3. Другие формы ячеек периодичности.

приемы из работ [7], [8], можно и в многомерной ситуации получить аналогичную выведенной в [10], [11] асимптотическую формулу

$$\lambda_j^\varepsilon(\eta) = \varepsilon^{-2}\pi^2 + \varepsilon^{-2B}\Lambda_j + O(\varepsilon^{-3B/2}) \quad (5.3)$$

для собственных чисел задачи (1.6), (1.7); здесь B – показатель из (1.12), а Λ_j – элементы последовательности (1.15) собственных чисел предельной задачи

$$-\Delta_\xi w(\xi) + 2\pi^2 \rho^\beta h(\varphi)w(\xi) = \Lambda w(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где (ρ, φ) – система полярных координат в $\mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \varepsilon^{-\beta}(y - y^0)$. Из разложений (5.3) выводятся такие же, как и в статьях [10], [11], результаты о лакунах в спектре задачи Дирихле в периодическом слое Π^ε с ячейкой (1.2), (5.2).

Открытым остается вопрос о структуре спектра в случае функции толщины H , достигающей глобального максимума на интервале или замкнутом контуре внутри параллелограмма Ω (см. рис. 36).

5.3. Круговые желобки. Пусть периодическая (с периодами $a_j > 2$ по переменным y_i , $i = 1, 2$) область Π_R получена удалением из слоя $\Pi = \mathbb{R}^2 \times (0, 1)$ единичной толщины двух семейств круговых полуцилиндров

$$Q_R^i(\alpha) = \{(y, z): |y_i - \alpha a_i|^2 + |z - 1|^2 \leq R, z < 0\}, \quad i = 1, 2.$$

При помощи подхода статьи [21] можно убедиться в том, что для значений радиуса $R \in (0, 1)$, близких единице, между первыми двумя сегментами $\Upsilon_R^1, \Upsilon_R^2$ в спектре задачи Дирихле в области Π_R лакуна раскрыта, но для малого $R > 0$ сегменты Υ_R^1 и Υ_R^2 налагаются один на другой. Поскольку концевые точки сегментов непрерывно зависят от параметра $R \in (0, 1)$, существуют такие два числа R_* и R^* , что при $R \in (R^*, 1)$ лакуна раскрыта, а при $R \in (0, R_*]$ закрыта. Помимо вычисления самих значений R_* и R^* , остается неясным, справедливо ли равенство $R_* = R^*$, а также, сколько лакун существует в спектре при различных значениях радиуса R .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00348).

Список литературы

- [1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Учеб. пособие, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
- [2] П. А. Кучмент, *УМН*, **37:4**(226) (1982), 3–52.

- [3] М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, т. 171, Труды МИАН, Наука, Л., 1985.
- [4] P. Kuchment, *Floquet Theory for Partial Differential Equations*, Operator Theory: Advances and Applications, **60**, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [5] И. М. Гельфанд, *Докл. АН СССР*, **73** (1950), 1117–1120.
- [6] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [7] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области”, *Проблемы матем. анализа*, вып. 19, Научн. книга, Новосибирск, 1999, 105–148.
- [8] S. A. Nazarov, *Math. Bohem.*, **127**:2 (2002), 283–292.
- [9] G. Cardone, T. Durante, S. A. Nazarov, *SIAM J. Math. Anal.*, **42**:6 (2010), 2581–2609.
- [10] L. Friedlander, M. Solomyak, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 238–242.
- [11] L. Friedlander, M. Solomyak, *Israel J. Math.*, **170**:1 (2009), 337–354.
- [12] K. Yoshitomi, *J. Differ. Equations*, **142**:1 (1998), 123–166.
- [13] V. Kozlov, *J. Differ. Equations*, **230**:2 (2006), 532–555.
- [14] J. Hadamard, “Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrés”, *Œuvres*, v. 2, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968, 515–631.
- [15] Л. А. Иванов, Л. А. Котко, С. Г. Крейн, *Краевые задачи в переменных областях*, Дифференциальные уравнения и их применение, **19**, Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, Вильнюс, 1977.
- [16] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122.
- [17] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научн. книга, Новосибирск, 2002.
- [18] W. G. Mazja, S. A. Nazarov, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten*, v. 1, Mathematische Lehrbücher und Monographien, **82**, Akademie, Berlin, 1991.
- [19] С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *Алгебра и анализ*, **5**:2 (1993), 169–188.
- [20] С. А. Назаров, “Об оптимизации заплат”, *Проблемы матем. анализа*, вып. 42, Научн. книга, Новосибирск, 2009, 65–82.
- [21] С. А. Назаров, К. Руотсалайнен, Я. Таскинен, “Спектральные лакуны в задачах Дирихле и Неймана на плоскости, перфорированной двоякопериодическим семейством круговых отверстий”, *Проблемы матем. анализа*, вып. 62, Научн. книга, Новосибирск, 2011, 51–100.

Поступила в редакцию 4.06.2012