Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Баталин, И. В. Тютин, Общее решение квантового мастер-уравнения в конечномерном случае, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 2, 250–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:30:03

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КВАНТОВОГО МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Для случая конечного числа переменных явно построено общее решение квантового мастер-уравнения (и его $Sp(2)$ -симметричного аналога). Показано, что конечномерное решение физически тривиально и поэтому не может быть непосредственно обобщено на случай локальной теории поля. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что условие локальности играет важную роль, позволяя получать физически нетривиальные результаты при квантовании калибровочных теорий поля с помощью формализма полей-антиполей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантование калибровочных теорий непосредственно в рамках лагранжева формализма [1–5] обычно основано на решении квантового мастер-уравнения

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar}S} = 0 \quad (1.1)$$

или его $Sp(2)$ -аналога [6–9]

$$\bar{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar}S} = 0, \quad a = 1, 2, \quad (1.2)$$

где Δ и $\bar{\Delta}^a$ – нечетные нильпотентные операторы:

$$\Delta^2 = 0, \quad \bar{\Delta}^a \bar{\Delta}^b + \bar{\Delta}^b \bar{\Delta}^a = 0. \quad (1.3)$$

Операторы Δ и $\bar{\Delta}^a$ являются локальными дифференциальными операторами второго порядка со следующей типичной структурой:

$$\Delta = \int dx (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \Phi^A(x)} \frac{\delta}{\delta \Phi_A^*(x)}. \quad (1.4)$$

Часто при изучении различных свойств решений квантового мастер-уравнения (произвол в решении, независимость физических величин от выбора калибровки и параметризации, структура перенормировки) рассуждения проводятся так, как если бы мы имели дело с теорией конечного числа переменных, в которых оператор Δ имеет вид

$$\Delta = \sum_{A=1}^N (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\partial}{\partial \Phi^A} \frac{\partial}{\partial \Phi_A^*}. \quad (1.5)$$

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Однако при распространении результатов, полученных в конечномерном случае, на локальную теорию поля следует соблюдать определенную осторожность (обзор ряда результатов, полученных в локальной калибровочной теории поля, см. [10, 11] и цитированные там ссылки). Это связано с тем, что различные преобразования типа замен переменных или обращения матриц (операторов), имеющие смысл в конечномерном случае, могут оказаться недопустимыми при попытке обобщения их на случай локальной теории поля.

Например, для систем конечного числа четных переменных действия

$$S = \frac{1}{2} \Phi^A \Lambda_{AB} \Phi^B \quad (1.6)$$

с положительно-определенной матрицей Λ_{AB} эквивалентны (с точностью до неособенной замены переменных) действию в канонической форме:

$$S = \frac{1}{2} \sum_A \Phi^A \Phi^A. \quad (1.7)$$

В то же время в рамках локальной теории поля действия

$$S_i = \frac{1}{2} \int dx (\partial_\mu \Phi^A \partial_\mu \Phi^A - m_i^2 \Phi^A \Phi^A), \quad i = 1, 2, \quad (1.8)$$

не эквивалентны при $m_1 \neq m_2$.

Другой пример. Часто приходится рассматривать классы функций по модулю слагаемых, исчезающих на экстремальных. В теории с конечным числом переменных и действием (1.6) представителями таких классов будут только константы. В локальной теории поля с действием (1.8) имеются нетривиальные классы с представителями $\int dx F(\Phi, \partial_\mu \Phi)$.

В настоящей работе мы находим общее решение уравнений вида

$$\Delta X = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\Delta}^a X = 0, \quad (1.9)$$

а также

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0 \quad (1.10)$$

для некоторых операторов Δ и $\bar{\Delta}^a$ в случае конечного числа переменных. С точки зрения теории поля во всех рассмотренных случаях решения уравнений (1.9) и (1.10) оказываются физически тривиальными. Таким образом, полученные результаты, представляющие, по-видимому, и самостоятельный интерес, указывают на важную роль требования локальности в теории поля, которое только и позволяет получать физически нетривиальные результаты в формализме, основанном на квантовом мастер-уравнении.

Все уравнения решаются в терминах формальных рядов по переменным для X , а для S , кроме того, и по переменным $\hbar$.

2. УРАВНЕНИЕ $\Delta X = 0$

Положим $\Phi^A = (u^i, \xi^\alpha)$, где u^i , $i = 1, \dots, n_+$, – четные переменные и ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$, – нечетные переменные. В этих обозначениях оператор Δ имеет вид

$$\Delta = (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\partial}{\partial \Phi^A} \frac{\partial}{\partial \Phi_A^*} = \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u_i^*} - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*}, \quad \Delta^2 = 0, \quad (2.1)$$

переменные u_i^* (ξ_α^*) – нечетные (четные).

Для построения общего решения уравнения

$$\Delta X = 0 \quad (2.2)$$

введем оператор Γ :

$$\Gamma = (-1)^{\varepsilon_A} \Phi^A \Phi_A^* = u^i u_i^* - \xi^\alpha \xi_\alpha^*. \quad (2.3)$$

Он обладает свойствами

$$\Gamma \Delta + \Delta \Gamma = N, \quad \Gamma^2 = 0, \quad [\Delta, N] = [\Gamma, N] = 0, \quad (2.4)$$

$$N = u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \xi_\alpha^* \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^*} + \left(n - u_i^* \frac{\partial}{\partial u_i^*} - \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right), \quad n = n_+ + n_-. \quad (2.5)$$

Поддействуем оператором N на X и учтем уравнение (2.2):

$$NX = \Delta \Gamma X. \quad (2.6)$$

Если оператор N можно обратить, то X представим в виде

$$X = \Delta Y, \quad Y = \Gamma N^{-1} X. \quad (2.7)$$

Поскольку каждая нечетная координата может входить в X в степени не выше первой, из выражения (2.5) для N следует, что NX может равняться нулю только в случае, если X не содержит четных переменных и содержит произведение всех нечетных переменных. Таким образом, общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$X = \Delta Y + c \prod_i u_i^* \prod_\alpha \xi^\alpha, \quad (2.8)$$

где Y – произвольная функция переменных, c – произвольная константа. Важно, что второе слагаемое в правой части равенства (2.8) не может быть представлено в виде ΔZ , поскольку в этом случае Z должен был бы содержать $n+1$ нечетных сомножителей, что невозможно. По-другому можно сказать, что выражение (2.8) описывает группу когомологий оператора Δ в пространстве формальных рядов по переменным. Представление (2.8) было независимо получено К. Берингом [12].

Предположим по аналогии с теорией поля, что переменные Φ разбиты на группы: $\Phi = (\varphi, c)$ (или $u = (\varphi_u, c_\xi)$, $\xi = (\varphi_\xi, c_u)$) и всем переменным приписаны гостовские числа:

$$\text{gh}(\varphi_u) = \text{gh}(\varphi_\xi) = 0, \quad \text{gh}(c_\xi) = \text{gh}(c_u) = 1, \quad \text{gh}(\Phi^*) = -\text{gh}(\Phi) - 1, \quad (2.9)$$

тогда

$$\text{gh}\left(\prod_i u_i^* \prod_\alpha \xi^\alpha\right) = n_{c_u} - n_{\varphi_u^*} - 2n_{c_\xi^*}. \quad (2.10)$$

В “физической” ситуации $n_{c_u} < n_{\varphi_u^*} = n_{\varphi_u^*}$, так что $\text{gh}\left(\prod_i u_i^* \prod_\alpha \xi^\alpha\right) < 0$, и в пространстве функций X с нулевым гостовским числом общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$X = \Delta Y, \quad \text{gh}(X) = 0 \quad (2.11)$$

и является физически тривиальным.

Аналогичное рассмотрение показывает, что общее решение уравнения

$$\Delta_1 X = 0, \quad \Delta_1 \equiv \Gamma, \quad (2.12)$$

имеет вид

$$X = \Delta_1 Y + c \prod_i u_i^* \prod_\alpha \xi^\alpha. \quad (2.13)$$

3. УРАВНЕНИЕ $\bar{\Delta}^a X = 0$

Предположим, что полное число переменных равно $6n$ и они разбиты на группы:

$$\begin{aligned} \Phi^A &= (u^i, \xi^\alpha), \quad i = 1, \dots, n_+, \quad \alpha = 1, \dots, n_-, \quad n_+ + n_- = n, \\ \bar{\Phi}_A &= (\bar{u}_i, \bar{\xi}_\alpha), \\ \Phi_{Aa}^* &= (u_{ia}^*, \xi_{\alpha a}^*), \quad a = 1, 2, \\ \varepsilon(\Phi^A) &= \varepsilon(\bar{\Phi}_A) = \varepsilon_A, \quad \varepsilon(\Phi_{Aa}^*) = \varepsilon_A + 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Операторы $\bar{\Delta}^a$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^a &= (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\partial}{\partial \Phi^A} \frac{\partial}{\partial \Phi_{Aa}^*} + \varepsilon^{ac} \Phi_{Ac}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}_A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u_{ia}^*} - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha a}^*} + \varepsilon^{ac} u_{ic}^* \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + \varepsilon^{ac} \xi_{\alpha c}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_\alpha}, \\ \varepsilon^{ba} &= -\varepsilon^{ab}, \quad \varepsilon^{12} = -1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Операторы $\bar{\Delta}^a$ нильпотентны:

$$\bar{\Delta}^a \bar{\Delta}^b + \bar{\Delta}^b \bar{\Delta}^a = 0, \quad \varepsilon(\bar{\Delta}^a) = 1. \quad (3.3)$$

Операторы такой структуры определяют $Sp(2)$ -квантовое мастер-уравнение ($Sp(2)$ -КМУ) в $Sp(2)$ -симметричной формулировке калибровочных теорий.

Для решения уравнения

$$\bar{\Delta}^a X = 0 \quad (3.4)$$

введем семейство операторов $\Gamma_a(\theta)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\theta) &= \theta^A \Gamma_{Aa}, \quad \Gamma_{Aa} = (-1)^{\varepsilon_A} \left(\Phi_{Aa}^* \Phi^A + \varepsilon_{ac} \bar{\Phi}_A \frac{\partial}{\partial \Phi_{Ac}^*} \right), \\ \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bc} &= \delta_a^c, \quad \varepsilon(\theta^A) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

(в выражении для Γ_{Aa} нет суммирования по A). Операторы $\Gamma_a(\theta)$ нильпотентны:

$$\Gamma_a(\theta_1) \Gamma_b(\theta_2) + \Gamma_b(\theta_2) \Gamma_a(\theta_1) = 0, \quad (3.6)$$

и выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^a \Gamma_b(\theta) + \Gamma_b(\theta) \bar{\Delta}^a &= \delta_b^a N(\theta), \\ [N(\theta), \bar{\Delta}^a] &= [N(\theta), \Gamma_a(\theta_1)] = [N(\theta), N(\theta_1)] = 0, \\ N(\theta) &= \theta^A N_A, \quad N_i = 1 + \hat{n}_{u^i} - \hat{n}_{u_{i1}^*} - \hat{n}_{u_{i2}^*} - \hat{n}_{\bar{u}_i}, \\ N_\alpha &= 1 + \hat{n}_{\xi_{\alpha 1}^*} + \hat{n}_{\xi_{\alpha 2}^*} + \hat{n}_{\bar{\xi}_\alpha} - \hat{n}_{\xi^\alpha}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\hat{n}_{u^i} = u^i \partial / \partial u^i$ и т. п. Применим оператор $N^2(\theta)$ к функции X и учтем уравнение (3.4):

$$N^2(\theta) X = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 \Gamma_1(\theta) \Gamma_2(\theta) X. \quad (3.8)$$

Если оператор $N^2(\theta)$ можно обратить при каком-либо выборе параметров θ^A , то X представится в виде

$$X = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Y = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \bar{\Delta}^b \bar{\Delta}^a Y, \quad Y = \Gamma_1(\theta) \Gamma_2(\theta) N^{-2}(\theta) X. \quad (3.9)$$

Операторы $N^2(\theta)$ необратимы, если X удовлетворяет уравнениям

$$N_A X = 0 \quad \forall A. \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (3.4) может быть представлено в виде

$$X = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Y + X_B Q, \quad Q \equiv \prod_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.11)$$

где X_B зависит только от переменных u^i , u_{ia}^* , $\bar{u}_i$ и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_B^a X_B &= 0, \quad (1 + \hat{n}_{u^i}) X_B = (\hat{n}_{u_{i1}^*} + \hat{n}_{u_{i2}^*} + \hat{n}_{\bar{u}_i}) X_B, \\ \bar{\Delta}_B^a &= \Delta_B^a + d^a, \quad \Delta_B^a = \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u_{ia}^*}, \quad d^a = \varepsilon^{ac} u_{ic}^* \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} \end{aligned} \quad (3.12)$$

(напомним, что $u^i, \bar{u}_i$ – четные, а u_{ia}^* – нечетные переменные). Разложим X_B в ряд по степеням u_{ia}^* :

$$X_B = \sum_{k=0}^{2n_+} X^{(k)}, \quad \left(\sum_{i,a} \hat{n}_{u_{ia}^*} \right) X^{(k)} = k X^{(k)}. \quad (3.13)$$

Для $X^{(0)}$ получаем

$$\Delta_B^a X^{(0)} = 0. \quad (3.14)$$

В дополнении показано, что общее решение уравнения

$$\Delta_B^a Z = 0 \quad (3.15)$$

может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} Z &= \Delta_B^2 \Delta_B^1 Z' + \\ &+ \sum_{n_1+n_2 \leq n_+} C_{i_1 \dots i_{n_1} j_1 \dots j_{n_2}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{n_1} 1}^*} Q_1 \frac{\partial}{\partial u_{j_1 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{j_{n_2} 2}^*} Q_2, \\ \frac{\partial}{\partial u_{ia}^*} C_{i_1 \dots j_{n_2}} &= \frac{\partial}{\partial u^i} C_{i_1 \dots j_{n_2}} = 0, \quad Q_1 \equiv \prod_i u_{i1}^*, \quad Q_2 \equiv \prod_i u_{i2}^*, \end{aligned} \quad (3.16)$$

коэффициенты $C_{i_1 \dots j_{n_2}}$ антисимметричны при перестановке любых двух соседних индексов, таким образом,

$$X^{(0)} = \Delta_B^2 \Delta_B^1 Y^{(2)}, \quad (3.17)$$

а X_B представляется в виде

$$\begin{aligned} X_B &= \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 Y^{(2)} + \sum_{k=1}^{2n_+} X_1^{(k)}, \\ \Delta_B^a X_1^{(1)} &= 0, \quad X_1^{(1)} = \Delta_B^2 \Delta_B^1 Y^{(3)}, \\ X_B &= \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 (Y^{(2)} + Y^{(3)}) + \sum_{k=2}^{2n_+} X_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\begin{aligned} X_B &= \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 \left(\sum_{k=2}^{n_++1} Y^{(k)} \right) + \sum_{k=n_+}^{2n_+} X_{n_+}^{(k)}, \\ \Delta_B^a X_{n_+}^{(n_+)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Общее решение уравнения (3.19) имеет вид

$$\begin{aligned} X_{n_+}^{(n_+)} &= \Delta_B^2 \Delta_B^1 Y^{(n_++2)} + \sum_{m=0}^{n_+} a_m(\bar{u}) \varepsilon_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{n_+}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_m 1}^*} Q_1 \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial u_{i_{m+1} 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{n_+} 2}^*} Q_2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

здесь $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n_+}}$ — полностью антисимметричный постоянный тензор, $\varepsilon_{12 \dots n_+} = 1$. Второе из уравнений (3.12) дает

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} a_m(\bar{u}) = 0, \quad a_m = \text{const}, \quad (3.21)$$

и, таким образом, получаем

$$\begin{aligned} X_B &= \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 \left(\sum_{k=2}^{n_++2} Y^{(k)} \right) + \sum_{m=0}^{n_+} a_m \varepsilon_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{n_+}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_m 1}^*} Q_1 \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial u_{i_{m+1} 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{n_+} 2}^*} Q_2 + \sum_{k=n_++1}^{2n_+} X_{n_++1}^{(k)}, \\ \Delta_B^a X_{n_++1}^{(n_++1)} &= 0, \\ X_{n_++1}^{(n_++1)} &= \Delta_B^2 \bar{\Delta}_B^1 Y^{(n_++2)} + \sum_{m=0}^{n_+-1} C_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{n_+-1}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_m 1}^*} Q_1 \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial u_{i_{m+1} 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{n_+-1} 2}^*} Q_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Используя опять второе из уравнений (3.12), найдем

$$C_{i_1 \dots i_{n_+-1}} = 0. \quad (3.23)$$

Продолжая далее этот процесс, получаем окончательно

$$\begin{aligned} X_B &= \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 \tilde{Y} + \sum_{m=0}^{n_+} a_m F_m, \\ F_m &= \varepsilon_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{n_+}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_m 1}^*} Q_1 \frac{\partial}{\partial u_{i_{m+1} 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{n_+} 2}^*} Q_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для X находим

$$X = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Y + \sum_{m=0}^{n_+} a_m F_m Q. \quad (3.25)$$

Покажем, что второе слагаемое в выражении (3.25) для X представляет собой нетривиальные “когомологии” операторов $\bar{\Delta}^a$ в том смысле, что никакую комбинацию функций $F_m Q$ невозможно представить¹⁾ в виде $\bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Z$. Нетрудно видеть, что соотношение

$$\sum_{m=0}^{n_+} a_m F_m Q = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Z \quad (3.26)$$

¹⁾ Конечно, функции $F_m Q$ можно представить в виде $F_m Q = \bar{\Delta}^1 Z_m^{(1)} = \bar{\Delta}^2 Z^{(2)}$, $0 < m < n$, $F_0 Q = \bar{\Delta}^1 Z_0^{(1)}$, $F_n Q = \bar{\Delta}^2 Z_n^{(2)}$.

влечет за собой

$$\sum_{m=0}^{n_+} a_m F_m = \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 Z_B. \quad (3.27)$$

Прежде всего покажем, что соотношение

$$cQ_1 = \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 Z_B, \quad c = \text{const}, \quad (3.28)$$

влечет за собой $c = 0$. Для этого распишем явно оператор $\bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1$ при $u_{i2}^* = 0$:

$$\bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 Z_B|_{u_{i2}^*=0} = \frac{\partial}{\partial u_{i1}^*} \left(u_{i1}^* \frac{\partial}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial}{\partial u^j} - \frac{\partial}{\partial u_{j2}^*} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) Z_B \Big|_{u_{i2}^*=0}. \quad (3.29)$$

Таким образом, правая часть соотношения (3.28) при $u_{i2}^* = 0$ не может содержать произведение максимального числа переменных u_{i1}^* , откуда и следует $c = 0$.

Введем оператор

$$L = u_{i1}^* \frac{\partial}{\partial u_{i2}^*}. \quad (3.30)$$

Нам понадобятся следующие его свойства:

$$\begin{aligned} [L, \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1] &= 0, \\ L^m F_m &= (-1)^{m(n_+-1)} m! Q_1, \\ L^m F_k &= 0, \quad k < m. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Действуя оператором L^{n_+} на соотношение (3.27), получаем

$$n_+! a_{n_+} Q_1 = \bar{\Delta}_B^2 \bar{\Delta}_B^1 (L^{n_+} Z_B), \quad (3.32)$$

что дает $a_{n_+} = 0$. Действуя снова оператором L^{n_+-1} на соотношение (3.27), находим $a_{n_+-1} = 0$ и т. д. Окончательно получаем, что соотношение (3.27) может выполняться только в случае

$$a_m = 0 \quad \forall m. \quad (3.33)$$

Итак, общее решение уравнений (3.4) определяется выражением (3.25), где второе слагаемое в правой части (3.25) представляет собой “нетривиальные совместные когомологии” операторов $\bar{\Delta}^a$.

В физических приложениях переменные Φ разбиты на группы $\Phi = (\varphi, c^a, B)$, так что

$$\begin{aligned} u &= (\varphi_u, c_\xi^a, B_u), & \xi &= (\varphi_\xi, c_u^a, B_\xi), \\ \bar{u} &= (\bar{\varphi}_u, \bar{c}_\xi^a, \bar{B}_u), & \bar{\xi} &= (\bar{\varphi}_\xi, \bar{c}_u^a, \bar{B}_\xi), \\ u_a^* &= (\varphi_{ua}^*, c_{\xi b|a}^*, B_{ua}^*), & \xi_a^* &= (\varphi_{\xi a}^*, c_{ub|a}^*, B_{\xi a}^*), \\ Q &= \prod \varphi_\xi \prod c_u^a \prod B_\xi, \\ Q_1 &= \prod \varphi_{u1}^* \prod c_{\xi b|1}^* \prod B_{u1}^*, & Q_2 &= \prod \varphi_{u2}^* \prod c_{\xi b|2}^* \prod B_{u2}^*. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Всем переменным присваивается новое гостовское число ngh :

$$\begin{aligned} \text{ngh}(\varphi) &= 0, & \text{ngh}(c^a) &= 1, & \text{ngh}(B) &= 2, \\ \text{ngh}(\Phi^*) &= -\text{ngh}(\Phi) - 1, & \text{ngh}(\bar{\Phi}) &= -\text{ngh}(\Phi) - 2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

тогда

$$\begin{aligned} \text{ngh}(F_m Q) &= \text{ngh}(Q_1 Q) = -n_{\varphi_u} - 4n_{c_\xi^1} - 3n_{B_u} + \\ &+ 2n_{c_u^1} + 2n_{B_\xi} = -n_{\varphi_u} - n_{B_u} - 2n_{B_\xi} < 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где учтено, что $n_{c_u^1} = n_{B_u}$, $n_{c_\xi^1} = n_{B_\xi}$. Таким образом, в секторе функций с нулевым новым гостовским числом уравнения (3.4) имеют только тривиальные решения:

$$X = \bar{\Delta}^2 \bar{\Delta}^1 Y, \quad \text{ngh}(X) = 0. \quad (3.37)$$

4. УРАВНЕНИЕ $\Delta e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0$

В этом разделе рассматривается квантовое мастер-уравнение

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0, \quad \varepsilon(S) = 0, \quad (4.1)$$

оператор Δ определен формулой (2.1). Конечно, если решать это уравнение в терминах формальных рядов для экспоненты, тогда общее решение дается формулой (2.5), $X = \exp(iS/\hbar)$. Если, однако, потребовать, чтобы функция S разлагалась в ряд и по переменным, и по $\hbar$ (причем предел $\hbar \rightarrow 0$ отличен от нуля), структура общего решения оказывается другой. Перепишем уравнение (4.1) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{2}(S, S) = i\hbar \Delta S, \quad (4.2)$$

где (F, G) – антискобка

$$(F, G) \equiv F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Phi^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Phi_A^*} G - F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Phi_A^*} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Phi^A} G. \quad (4.3)$$

Разложим S в ряд по $\hbar$:

$$S = \sum_{k=0} \hbar^k S^{(k)}. \quad (4.4)$$

Для $S^{(0)}$ возникает мастер-уравнение

$$(S^{(0)}, S^{(0)}) = 0. \quad (4.5)$$

Это уравнение будем решать в терминах рядов по переменным. Без ограничения общности можно считать, что разложение $S^{(0)}$ начинается с членов, квадратичных по переменным:

$$S^{(0)} = \sum_{k=2}^{\infty} S_k^{(0)}, \quad S_k^{(0)} \sim \sum_{l+m=k} O(\Phi^l (\Phi^*)^m). \quad (4.6)$$

$S_2^{(0)}$ удовлетворяет мастер-уравнению

$$(S_2^{(0)}, S_2^{(0)}) = 0. \quad (4.7)$$

Обозначим $\eta = (\omega^A; \omega_A^*)$, $\omega^A = (u^i; -\xi_\alpha^*)$, $\omega_A^* = (u_i^*; \xi^\alpha)$, $\varepsilon(\omega^A) = 0$, $\varepsilon(\omega_A^*) = 1$, $A = 1, \dots, n$. Уравнение (4.7) записывается в виде

$$\frac{\partial S_2^{(0)}}{\partial \omega^A} \frac{\partial S_2^{(0)}}{\partial \omega_A^*} = 0. \quad (4.8)$$

Функция $S_2^{(0)}$ имеет следующую общую структуру:

$$S_2^{(0)} = \frac{1}{2} \omega^A L_{AB} \omega^B + \frac{1}{2} \omega_A^* M^{AB} \omega_B^*, \quad (4.9)$$

где L_{AB} и M^{AB} – симметричная и антисимметричная матрицы. Пусть O_A^B – ортогональная матрица, диагонализующая матрицу L_{AB} :

$$O_A^C O_B^D L_{CD} = \delta_{AB} l_B = \delta_{AB} \zeta_B \lambda_B^2, \quad (4.10)$$

где $\zeta_B = \pm 1, 0$. Выполним антиканоническое преобразование (АКП) переменных (т.е. преобразование, сохраняющее вид антискобки (4.3))

$$\omega^A = O_B^A \Lambda^{-1B}_C \omega'^C, \quad \omega_A^* = O_A^B \Lambda^C_B \omega'^*_C, \quad \Lambda_B^A = \delta_B^A \lambda_B. \quad (4.11)$$

В новых переменных (штрихи опускаем) действие $S_2^{(0)}$ имеет вид

$$S_2^{(0)} = \frac{1}{2} x^i \zeta_i x^i + \frac{1}{2} x_i^* B^{ij} x_j^* + x_i^* C^{i\alpha} y_\alpha^* + \frac{1}{2} y_\alpha^* D^{\alpha\beta} y_\beta^*, \quad (4.12)$$

где $\omega^A = (x^i, y^\alpha)$, переменные x^i отвечают $\zeta = \pm 1$, а переменные y^α – значению $\zeta_\alpha = 0$. С помощью перенумерации переменных (что является АКП) значения ζ_i можно расположить в стандартном порядке

$$\zeta_i = 1, \quad i = 1, \dots, m_+, \quad \zeta_i = -1, \quad i = m_+ + 1, \dots, m_+ + m_-. \quad (4.13)$$

Подставим выражение (4.12) для $S_2^{(0)}$ в мастер-уравнение (4.8):

$$x^i \zeta_i B^{ij} x_j^* + x_i^* \zeta_i C^{i\alpha} y_\alpha^* = 0, \quad (4.14)$$

что дает

$$B^{ij} = 0, \quad C^{i\alpha} = 0. \quad (4.15)$$

Ограничимся рассмотрением (физически интересного) случая собственных решений (это означает, что гессиан функции $S_2^{(0)}$ имеет ранг, равный n). Для таких решений (антисимметричная) матрица $D^{\alpha\beta}$ неособенная, путем ортогонального преобразования она может быть приведена к стандартной жордановой форме. Тогда с помощью АКП переменных, нетривиального только в секторе переменных y^α , y_α^* , действие $S_2^{(0)}$ приводится к каноническому виду

$$S_{2,c}^{(0)} = \frac{1}{2} x^i \zeta_i x^i + \frac{1}{2} y_\alpha^* \varepsilon^{\alpha\beta} y_\beta^*, \quad (4.16)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ – матрица, имеющая жорданову форму, каждая жорданова клетка которой имеет размер 2×2 и равна $i\sigma^2$.

Будем называть две функции $F(\eta)$ и $G(\eta)$ переменных η антиканонически-эквивалентными, если они связаны с помощью АКП: $G(\eta) = F(\eta'(\eta))$, $\eta \rightarrow \eta'$ есть АКП. Тогда можно сказать, что общее решение мастер-уравнения (4.8) антиканонически-эквивалентно каноническому решению вида (4.16), характеризуемому парой неотрицательных целых чисел m_+ , m_- , $m_+ + m_- \leq n$.

Перейдем к решению мастер-уравнения (4.5) в высших приближениях. Мы будем считать, что АКП, приводящее $S_2^{(0)}$ к каноническому виду (4.16), выполнено. Для $S_3^{(0)}$ получаем

$$\begin{aligned} \gamma S_3^{(0)} &= 0, \\ \gamma &= x^i \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} - y_\alpha^* \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\beta^*}, \quad \gamma^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Введем оператор d :

$$d = x_i^* \zeta_i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\beta^*}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \quad (4.18)$$

обладающий свойствами

$$\begin{aligned} d^2 &= 0, \quad d\gamma + \gamma d = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha^*} + x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + y_\alpha^* \frac{\partial}{\partial y_\alpha^*} \equiv N, \\ [N, d] &= [N, \gamma] = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

С помощью стандартных рассуждений, аналогичных проведенным в разделе 2, находим, что общее решение уравнения

$$\gamma X = 0 \quad (4.20)$$

имеет вид

$$X = \gamma Y + c, \quad c = \text{const}. \quad (4.21)$$

Возвращаясь к уравнению (4.17), получаем, что $S_3^{(0)}$ можно представить в виде

$$S_3^{(0)} = \gamma Y_3 = -(Y_3, S_{2,c}^{(0)}), \quad \varepsilon(Y_3) = 1. \quad (4.22)$$

Введем функцию $S'^{(0)}$, антиканонически-эквивалентную функции $S^{(0)}$:

$$S'^{(0)} = e^{\hat{Y}_3} S^{(0)}, \quad \hat{Y} F \equiv (Y, F). \quad (4.23)$$

Тогда разложение $S'^{(0)}$ в ряд по степеням переменных η имеет вид

$$S'^{(0)} = S_{2,c}^{(0)} + S_4'^{(0)} + O(\eta^5), \quad (4.24)$$

а $S_4'^{(0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma S_4'^{(0)} = 0, \quad S_4'^{(0)} = \gamma Y_4 = -(Y_4, S_{2,c}^{(0)}). \quad (4.25)$$

Продолжая этот процесс, получаем, что общее собственное решение мастер-уравнения (4.5) антиканонически-эквивалентно $S_{2,c}^{(0)}$

$$S^{(0)} = e^{\hat{Y}^{(0)}} S_{2,c}^{(0)}, \quad \varepsilon(Y^{(0)}) = 1. \quad (4.26)$$

Прежде чем перейти к квантовому мастер-уравнению, введем в рассмотрение операторы, которые мы будем называть калибровочными преобразованиями (КП):

$$K = e^{[\Delta, Z]_+} = e^\rho e^{-\hat{Z}}, \quad \varepsilon(Z) = 1, \\ \rho = \ln \frac{D(\Theta)}{D(\eta)}, \quad \Theta = e^{-\hat{Z}} \eta. \quad (4.27)$$

Мы используем следующие свойства КП.

Пусть для данной функции $S(\eta, \hbar)$ построена функция $S'(\eta, \hbar)$:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'(\eta, \hbar)} = e^{[\Delta, Z]_+} e^{\frac{i}{\hbar} S(\eta, \hbar)}, \quad (4.28)$$

тогда

$$S'^{(0)}(\eta) = S'(\eta, 0) = e^{-\hat{Z}^{(0)}} S(\eta, 0) = e^{-\hat{Z}^{(0)}} S^{(0)}(\eta), \\ \Delta e^{\frac{i}{\hbar} S(\eta, \hbar)} = 0 \Rightarrow \Delta e^{\frac{i}{\hbar} S'(\eta, \hbar)} = 0. \quad (4.29)$$

Кроме того, последовательность КП есть снова некоторое КП.

Для построения решения квантового мастер-уравнения (4.1) выполним КП над S :

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'} = e^{[\Delta, Y^{(0)}]_+} e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (4.30)$$

Тогда $S'^{(0)} = S_{2,c}^{(0)}$, и с учетом свойства $\Delta S_{2,c}^{(0)} = 0$ находим

$$\gamma S'^{(1)} = 0, \quad S'^{(1)} = \gamma Y^{(1)} + c^{(1)} = -(Y^{(1)}, S_{2,c}^{(0)}) + c^{(1)}. \quad (4.31)$$

Введем действие S'' :

$$e^{\frac{i}{\hbar} S''} = e^{-\hbar [\Delta, Y^{(1)}]} e^{\frac{i}{\hbar} S'}. \quad (4.32)$$

Разложение S'' в ряд по $\hbar$ имеет вид

$$S'' = S_{2,c}^{(0)} + \hbar c^{(1)} + \hbar^2 S''^{(2)} + O(\hbar^3), \quad (4.33)$$

а из квантового мастер-уравнения (4.1) следует

$$\gamma S''^{(2)} = 0, \quad S''^{(2)} = \gamma Y^{(2)} + c^{(2)} = -(Y^{(2)}, S_{2,c}^{(0)}) + c^{(2)}. \quad (4.34)$$

Продолжая этот процесс, видим, что общее собственное решение квантового мастер-уравнения (4.1) получается из $S_{2,c}^{(0)}$ с помощью КП:

$$e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{[\Delta, Y]_+} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{2,c}^{(0)} + c) \right\}. \quad (4.35)$$

Если бы аналогичный результат был справедлив в теории поля, это означало бы, что все полевые модели физически тривиальны. Только условие локальности действия приводит к существованию нетривиальных физически неэквивалентных теорий.

5. УРАВНЕНИЕ $\bar{\Delta}_\hbar^a e^{\frac{1}{\hbar}S} = 0$

Сделаем несколько предварительных замечаний. Мы будем предполагать, что переменные разбиты на группы

$$\Phi = (\varphi^I, c^{\alpha b}, B^\alpha), \quad \bar{\Phi} = (\bar{\varphi}_I, \bar{c}_{\alpha b}, \bar{B}_\alpha), \quad \Phi_a^* = (\varphi_{Ia}^*, c_{\alpha b|a}^*, B_{\alpha a}^*). \quad (5.1)$$

Всем переменным присвоено новое гостовское число, как это описано в разделе 3 (формула (3.35)). На пространстве всех переменных действует (на индексы a, b) группа $Sp(2)$, реализованная как линейная замена переменных. При этом переменные $\varphi, B, \bar{\varphi}, \bar{B}$ являются скалярами, c^a образуют дублетные представления, $\bar{c}_a, \varphi_a^*, B_a^*$ – антидублетные представления и $c_{b|a}^*$ преобразуются как произведение двух антидублетов.

Операторы $\bar{\Delta}_\hbar^a$ равны

$$\bar{\Delta}_\hbar^a = (-1)^{\varepsilon(\Phi)} \frac{\partial}{\partial \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi_a^*} + \frac{i}{\hbar} \varepsilon^{ac} \Phi_c^* \frac{\partial}{\partial \Phi}, \quad \text{ngh}(\bar{\Delta}_\hbar^a) = 1. \quad (5.2)$$

Они являются нильпотентными:

$$\bar{\Delta}_\hbar^a \bar{\Delta}_\hbar^b + \bar{\Delta}_\hbar^b \bar{\Delta}_\hbar^a = 0, \quad (5.3)$$

и образуют $Sp(2)$ -дублет.

Мы будем изучать общее решение уравнения

$$\bar{\Delta}_\hbar^a e^{\frac{i}{\hbar}S} = 0, \quad (5.4)$$

которое возникает в $Sp(2)$ -симметричной формулировке калибровочных теорий и которое мы будем называть $Sp(2)$ -КМУ.

Введем класс КП

$$K = \exp \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}_h^b, [\bar{\Delta}_h^a, F]]_+ \right\}, \quad (5.5)$$

где F – произвольная функция или дифференциальный оператор. Если F является $Sp(2)$ -скаляром, то и K – также $Sp(2)$ -скаляр. Если $\text{ngh}(F) = -2$, то $\text{ngh}(K) = 0$ (в этом случае мы будем говорить, что оператор K сохраняет ngh). При этом, если S удовлетворяет $Sp(2)$ -КМУ (5.4), то и S' , определяемая соотношением

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'} = K e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (5.6)$$

также удовлетворяет $Sp(2)$ -КМУ (5.4). Нетрудно проверить, что последовательность КП есть снова некоторое КП. Кроме того, как показано в [3], произвольная замена переменных $\Phi \rightarrow \Phi' = F(\Phi)$ может быть расширена до КП в следующем смысле. Представим функцию $F(\Phi)$ в виде

$$F^A(\Phi) = \exp \left\{ f^C(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi^C} \right\} \Phi^A \quad (5.7)$$

с некоторыми функциями $f^C(\Phi)$ (в рамках теории возмущений по степеням переменных такое представление всегда возможно). Рассмотрим КП вида

$$K_f = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}_h^b, [\bar{\Delta}_h^a, \bar{\Phi}_A f^A]]_+ \right\}. \quad (5.8)$$

Тогда имеет место равенство

$$K_f \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\Phi, \Phi_a^*, \bar{\Phi}) \right\} \Big|_{\Phi_a^* = \bar{\Phi} = 0} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S(F(\Phi), 0, 0) + O(\hbar)] \right\}. \quad (5.9)$$

При этом, если замена переменных линейная:

$$f^C(\Phi) = f_D^C \Phi^D, \quad (5.10)$$

то оператор K сводится в существенном к линейной замене переменных:

$$\begin{aligned} S' &= e^{U_f} S + \hbar(-1)^{\varepsilon_A} f_A^A, \\ U_f &= f_D^C \Phi^D \frac{\partial}{\partial \Phi^C} - f_C^D \bar{\Phi}_D \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}_C} - f_C^D \Phi_{Da}^* \frac{\partial}{\partial \Phi_{Ca}^*}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если замена $\Phi \rightarrow \Phi'$ ковариантна относительно $Sp(2)$ и сохраняет ngh , то оператор K_f является $Sp(2)$ -скаляром и сохраняет ngh .

Перейдем к решению $Sp(2)$ -КМУ (5.4). Будем предполагать, что S является бозоном: $\varepsilon(S) = 0$, сохраняет новое гостовское число: $\text{ngh}(S) = 0$, и является $Sp(2)$ -скаляром. Решение будем искать в терминах ряда по $\hbar$ и степеням переменных:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k S^{(k)}. \quad (5.12)$$

$S^{(0)}$ удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(S^{(0)}, S^{(0)})^a + \varepsilon^{ac} \Phi_{Ac}^* \frac{\partial}{\partial \Phi_A} S^{(0)} &= 0, \\ (F, G)^a \equiv F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Phi^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Phi_{Aa}^*} G - F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \Phi_{Aa}^*} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \Phi^A} G. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Разложим $S^{(0)}$ в ряд по переменным:

$$S^{(0)} = \sum_{k=2}^{\infty} S_k^{(0)}, \quad S_k^{(0)} \sim \Gamma^k, \quad (5.14)$$

где Γ — совокупность всех переменных, $S_2^{(0)}$ сама удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению

$$\frac{1}{2}(S_2^{(0)}, S_2^{(0)})^a + \varepsilon^{ac} \Phi_{Ac}^* \frac{\partial}{\partial \Phi_A} S_2^{(0)} = 0. \quad (5.15)$$

Общая структура функции $S_2^{(0)}$, сохраняющей ngh и являющейся $Sp(2)$ -скаляром, такова:

$$S_2^{(0)} = \varphi^I D_{1II'} \varphi^{I'} + \varphi_{Ia}^* D_{2\alpha}^I c^{\alpha a} + \bar{\varphi}_I D_{3\alpha}^I B^\alpha + \varepsilon^{ab} c_{\alpha b|a}^* D_{4\beta}^\alpha B^\beta. \quad (5.16)$$

С помощью линейных преобразований переменных φ , как это описано в разделе 4, матрицу D_1 можно привести к каноническому виду

$$\varphi^I D_{1II'} \varphi^{I'} \rightarrow x^i \Lambda^{ij} x^j, \quad (5.17)$$

где Λ_{ij} диагональна в секторе четных переменных с m_+ собственными значениями +1 и m_- собственными значениями −1 и имеет жорданову форму в секторе нечетных переменных с m жордановыми клетками $i\sigma^2$, $\varphi^I = (x^i, y^\mu)$, y^μ — переменные, дополнительные к x^i (ядро матрицы D_1). Поскольку линейное преобразование переменных φ может быть расширено до линейного преобразования всех переменных, являющегося калибровочным (с сохранением $Sp(2)$ и ngh), мы будем считать его выполненным, так что $S_2^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} S_2^{(0)} &= \frac{1}{2} x^i \Lambda_{ij} x^j + x_{ia}^* D_{1\alpha}^i c^{\alpha a} + y_{\mu a}^* D_{2\alpha}^\mu c^{\alpha a} + \\ &+ \bar{x}_i D_{3\alpha}^i B^\alpha + \bar{y}_\mu D_{4\alpha}^\mu B^\alpha - \varepsilon^{ab} c_{\alpha a|b}^* D_{5\beta}^\alpha B^\beta. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Подставляя выражение (5.18) в $Sp(2)$ -мастер-уравнение (5.15), получаем

$$D_{1\alpha}^j = 0, \quad D_{4\alpha}^\mu = D_{2\beta}^\mu D_{5\alpha}^\beta. \quad (5.19)$$

Заметим, что при $\bar{\varphi} = \varphi_2^* = 0$ действие S ($S^{(0)}$) является решением квантового мастер-уравнения (мастер-уравнения) в переменных φ , φ_1^* , а при $\bar{\varphi} = \varphi_1^* = 0$ — в переменных

φ, φ_2^* . Мы будем считать, что в обоих случаях эти решения собственные, это означает, что $D_{2\alpha}^\mu$ и $D_{4\alpha}^\mu$ – квадратные обратимые матрицы. Тогда действие $S_2^{(0)}$ равно

$$S_2^{(0)} = \frac{1}{2} x^i \Lambda_{ij} x^j + y_{\alpha a}^* D_{2\beta}^\alpha c^{\beta a} + \bar{y}_\alpha D_{4\beta}^\alpha B^\beta + \varepsilon^{ab} c_{\alpha a|b}^* D_{2\gamma}^{-1\alpha} D_{4\beta}^\gamma B^\beta. \quad (5.20)$$

Выполним КП над S , отвечающее линейному преобразованию

$$c^{\alpha a} \rightarrow c'^{\alpha a} = D_{2\beta}^\alpha c^{\beta a}, \quad B^\alpha \rightarrow B'^\alpha = D_{4\beta}^\alpha B^\beta, \quad (5.21)$$

в результате чего $S_2^{(0)}$ приведет к каноническому виду

$$S_{2,c}^{(0)} = \frac{1}{2} x^i \Lambda_{ij} x^j + y_{\alpha a}^* c^{\alpha a} + \bar{y}_\alpha B^\alpha + \varepsilon^{ab} c_{\alpha a|b}^* B^\alpha. \quad (5.22)$$

Уравнение для $S_3^{(0)}$ следующее:

$$(S_2^{(0)}, S_3^{(0)})^a \equiv \gamma^a S_3^{(0)} = 0, \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^a = & x^i \Lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ja}^*} - (-1)^{\varepsilon(c^{\alpha a})} c^{\alpha a} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + y_{\alpha b}^* \frac{\partial}{\partial c_{\alpha b|a}^*} + (-1)^{\varepsilon(B^\alpha)} \varepsilon^{ab} B^\alpha \frac{\partial}{\partial c^{\alpha b}} + \\ & + (\bar{y}_\alpha + \varepsilon^{bc} c_{\alpha b|c}^*) \frac{\partial}{\partial B_{\alpha a}^*} + \varepsilon^{ab} \left(x_{ib}^* \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} + y_{\alpha b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + c_{\alpha c|b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{c}_{\alpha c}} + B_{\alpha b}^* \frac{\partial}{\partial \bar{B}_\alpha} \right), \\ & \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 0. \end{aligned}$$

Для построения решения уравнения (5.23) введем антидублет операторов d_a , $\text{ngh}(d_a) = -1$:

$$d_a = x_{ia}^* \Lambda^{-1ij} \frac{\partial}{\partial x^i} - (-1)^{\varepsilon(c^{\alpha a})} y^\alpha \frac{\partial}{\partial c^{\alpha a}} - (-1)^{\varepsilon(B^\alpha)} \varepsilon_{ab} c^{\alpha b} \frac{\partial}{\partial B^\alpha} + \varepsilon_{ab} \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial x_{ib}^*}, \quad (5.24)$$

обладающих свойствами

$$\begin{aligned} d_a d_b + d_b d_a &= 0, \quad d_a \gamma^b + \gamma^b d_a = \delta_a^b N, \\ [N, d_a] &= [N, \gamma^a] = 0, \\ N &= x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + c^{\alpha a} \frac{\partial}{\partial c^{\alpha a}} + B^\alpha \frac{\partial}{\partial B^\alpha} + x_{ia}^* \frac{\partial}{\partial x_{ia}^*} + \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Оператор N является $Sp(2)$ -скаляром.

Общее решение уравнения

$$\gamma^a X = 0, \quad \text{ngh}(X) = 0, \quad (5.26)$$

имеет вид

$$X = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \gamma^b \gamma^a Y + c, \quad c = \text{const}, \quad \text{ngh}(Y) = -2, \quad (5.27)$$

в силу соотношения

$$N^2 X = \frac{1}{4} \varepsilon_{ab} \gamma^b \gamma^a \varepsilon^{cd} d_d d_c X, \quad (5.28)$$

причем Y можно выбрать $Sp(2)$ -скаляром, если X — $Sp(2)$ -скаляр, как это следует из (5.28).

Таким образом,

$$S_3^{(0)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \gamma^b \gamma^a Y_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} (S_2^{(0)}, (S_2^{(0)}, Y_3)^a)^b, \quad \text{ngh}(Y_3) = -2, \quad (5.29)$$

где Y_3 — $Sp(2)$ -скаляр. Выполним КП над S :

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'} = \exp \left\{ -\frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, Y_3]]_+ \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (5.30)$$

Тогда для $S'^{(0)}$ имеем разложение

$$\begin{aligned} S'^{(0)} &= S_{2,c}^{(0)} + S_4^{(0)} + O(\Gamma^5), \\ \gamma^a S_4^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

и т. д. Таким образом, после серии КП решение S принимает вид

$$\begin{aligned} S &= S_{2,c}^{(0)} + \hbar S^{(1)} + O(\hbar^2), \\ \gamma^a S^{(1)} &= i \Delta^a S_{2,c}^{(0)} = 0, \quad \Delta^a = (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\partial}{\partial \Phi^A} \frac{\partial}{\partial \Phi_{Aa}^*}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Продолжая предыдущие рассуждения, мы получаем окончательно, что общее собственное решение $Sp(2)$ -КМУ (5.4), $Sp(2)$ -инвариантное и сохраняющее новое гостовское число, калибровочно-эквивалентно каноническому решению

$$e^{\frac{i}{\hbar} S} = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, Y]]_+ \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{2,c}^{(0)} + c) \right\}, \quad (5.33)$$

где Y можно считать произвольной функцией.

Снова можно сказать, что нетривиальный результат в теории поля возможен только из-за требования локальности.

Работа И. А. Б. и И. В. Т. частично поддержана грантами INTAS-РФФИ 95-0829i и INTAS 96-0308. Работа И. А. Б. поддержана также грантом РФФИ 96-01-00482, а работа И. В. Т. — грантом РФФИ 96-02-17314.

ДОПОЛНЕНИЕ

Здесь мы кратко опишем построение общего решения уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_B^a X_B &= 0, \\ \Delta_B^a &= \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u_{ia}^*}, \quad \varepsilon(u) = 0, \quad \varepsilon(u^*) = 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (Д.1)$$

В дальнейшем индекс “ B ” будет опущен.

Предварительно найдем общее решение уравнения

$$\Delta^2 \Delta^1 U = 0. \quad (\text{Д.2})$$

Разложим U в ряд по степеням u_{ia}^*

$$U = \sum_{m,k=0}^n U_{m,k}, \quad U_{m,k} \sim (u_1^*)^m (u_2^*)^k. \quad (\text{Д.3})$$

Очевидно, что каждое из слагаемых $U_{m,k}$ удовлетворяет уравнению (Д.2)

$$\Delta^2 \Delta^1 U_{m,k} = 0. \quad (\text{Д.4})$$

Пусть $m = k = n$, тогда

$$U_{n,n} = c(u) Q_1 Q_2, \quad Q_1 \equiv \prod u_1^*, \quad Q_2 \equiv \prod u_2^*. \quad (\text{Д.5})$$

Уравнение (Д.4) дает

$$c(u) = c + c_i u^i. \quad (\text{Д.6})$$

Пусть m или k (или оба) меньше n , например $k < n$. Из результатов раздела 2 следует, что

$$\begin{aligned} \Delta^1 U_{m,k} &= \Delta^2 Y_{m-1,k+1}, & \Delta^2 \Delta^1 Y_{m-1,k+1} &= 0, \\ \Delta^1 Y_{m-1,k+1} &= \Delta^2 Y_{m-2,k+2}, & \Delta^2 \Delta^1 Y_{m-2,k+2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^1 Y_{m-l,k+l} &= \Delta^2 Y_{m-l-1,k+l+1}. \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

Дальнейшие действия зависят от того, какое из равенств: $m-l-1 = 0$ или $k+l+1 = n$, будет достигнуто раньше.

Пусть $m+k \leq n$. Тогда при $l = m-1$ в (Д.7) получаем

$$\Delta^1 Y_{1,k+m-1} = \Delta^2 Y_{0,k+m}. \quad (\text{Д.8})$$

Из результатов раздела 2 следует

$$Y_{0,k+m} = -\Delta^1 Z_{1,k+m}, \quad (\text{Д.9})$$

что дает

$$\begin{aligned} \Delta^1 (Y_{1,k+m-1} - \Delta^2 Z_{1,k+m}) &= 0, \\ Y_{1,k+m-1} &= \Delta^2 Z_{1,k+m} - \Delta^1 Z_{2,k+m-1}, \\ \Delta^1 (Y_{2,k+m-2} - \Delta^2 Z_{2,k+m-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Д.10})$$

и т. д. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Delta^1(U_{m,k} - \Delta^2 Z_{m,k+1}) &= 0, \\ U_{m,k} &= \Delta^2 Z_{m,k+1} + \Delta^1 Z_{m+1,k}\end{aligned}\quad (\text{Д.11})$$

(это представление справедливо и при $m = n$, $k = 0$).

Пусть $m + k > n$. Тогда при $l = n - k - 1$ в (Д.7) получаем

$$\Delta^1 Y_{m+k+1-n, n-1} = \Delta^2 Y_{m+k-n, n}, \quad \Delta^2 \Delta^1 Y_{m+k-n, n} = 0, \quad (\text{Д.12})$$

что дает

$$\Delta^1 Y_{m+k-n, n} = c(u_1^*) Q_2, \quad c(u_1^*) \sim (u_1^*)^{m+k-1-n}. \quad (\text{Д.13})$$

Коэффициентную функцию $c(u_1^*)$ удобно представить в виде

$$c(u_1^*) = C_{i_1 \dots i_{2n-m-k+1}} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_{2n-m-k+1} 1}^*} Q_1, \quad (\text{Д.14})$$

где $C_{i_1 \dots}$ полностью антисимметричны по своим индексам.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}C_{(m)(k)} &\equiv C_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_k}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*}\right)^m Q_1 &\equiv \frac{\partial}{\partial u_{i_1 1}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{i_m 1}^*} Q_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*}\right)^k Q_2 \equiv \frac{\partial}{\partial u_{j_1 2}^*} \dots \frac{\partial}{\partial u_{j_k 2}^*} Q_2,\end{aligned}\quad (\text{Д.15})$$

тогда

$$c(u_1^*) = C_{(2n-m-k+1)} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*}\right)^{2n-m-k+1} Q_1. \quad (\text{Д.16})$$

Общее решение уравнения (Д.13) для $Y_{m+k-n, n}$ следующее:

$$Y_{m+k-n, n} = -\Delta^1 Z_{m+k+1-n, n} + u^i C_{i(2n-m-k)} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*}\right)^{2n-m-k+1} Q_1 Q_2. \quad (\text{Д.17})$$

Для $Y_{m+k+1-n, n-1}$ получаем

$$\begin{aligned}\Delta^1(Y_{m+k+1-n, n-1} - \Delta^2 Z_{m+k+1-n, n}) &= \\ &= \xi_1 C_{(2n-m-k)(1)} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*}\right)^{2n-m-k} Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*}\right)^1 Q_2.\end{aligned}\quad (\text{Д.18})$$

Здесь $\xi_1 = \pm 1$ — знаковый фактор, возникающий при перестановке $\partial/\partial u_2^*$ и u_1^* , точное значение которого несущественно. Из (Д.18) следует

$$\begin{aligned}Y_{m+k+1-n, n-1} &= \Delta^2 Z_{m+k+1-n, n} - \Delta^1 Z_{m+k+2-n, n-1} + \\ &+ \xi_1 u^i C_{i(2n-m-k-1)(1)} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*}\right)^{2n-m-k-1} Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*}\right)^1 Q_2\end{aligned}\quad (\text{Д.19})$$

и т. д. Окончательно получаем

$$U_{m,k} = \Delta^2 Z_{m,k+1} + \Delta^1 Z_{m+1,k} + u^i C_{i(n-m)(n-k)} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^{n-m} Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^{n-k} Q_2, \quad (\text{Д.20})$$

где все знаковые факторы включены в $C_{(2n-m-k+1)}$.

Таким образом, общее решение уравнения (Д.2) представимо в виде

$$U = \Delta^1 Z_1 + \Delta^2 Z_2 + \sum_{m+k < n} u^i C_{i(m)(k)}^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^m Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^k Q_2. \quad (\text{Д.21})$$

Вернемся к решению уравнения (Д.1). Полагая $a = 1$, находим

$$X = \Delta^1 U + c(u_2^*) Q_1. \quad (\text{Д.22})$$

Уравнение (Д.1) при $a = 2$ дает

$$\Delta^2 \Delta^1 U = 0. \quad (\text{Д.23})$$

Подставляя выражение (Д.21) для U в (Д.22), получаем

$$X = \Delta^2 \Delta^1 Z + \sum_{m+k < n} C_{(m)(k)}^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^m Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^k Q_2. \quad (\text{Д.24})$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части соотношения (Д.24) невозможно представить в форме $\Delta^2 \Delta^1 Z$.

Предположим, что

$$\sum_{m+k < n} C_{(m)(k)}^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^m Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^k Q_2 = \Delta^2 \Delta^1 Z \quad (\text{Д.25})$$

при некоторых коэффициентах $C_{(m+k)}^{mk}$. Пусть m_0 – наибольшее из m , встречающихся в левой части (Д.25). Введем оператор L :

$$L = u_{i1}^* \frac{\partial}{\partial u_{i2}^*}, \quad (\text{Д.26})$$

обладающий свойствами

$$\begin{aligned} [L, \Delta^2 \Delta^1] &= 0, \\ LC_{(m)(k)}^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^m Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^k Q_2 &= \\ &= (-1)^{n-1} m C_{(m-1)(k+1)}^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^*} \right)^{m-1} Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^{k+1} Q_2. \end{aligned} \quad (\text{Д.27})$$

Подействуем оператором L^{m_0} на равенство (Д.25):

$$\sum_{m_0+k < n} C_{(m_0+k)}^{m_0 k} Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial u_2^*} \right)^{m_0+k} Q_2 = \frac{(-1)^{m_0(n-1)}}{m_0!} \Delta^2 \Delta^1 (L^{m_0} Z), \quad (\text{Д.28})$$

откуда следует, что $C_{(m_0+k)}^{m_0 k} = 0$ при всех k . В свою очередь, это означает, что соотношение (Д.25) может выполняться только при $C_{(m+k)}^{mk} = 0$ для всех m, k .

Список литературы

- [1] *J. Zinn-Justin*. Renormalization of gauge theories. In: Trends in elementary particle theory. Lecture Notes in Physics. V. 37. Eds H.Rollnik and K.Dietz. Berlin: Springer, 1975. P. 2–39.
- [2] *Р. Э. Каллош*. Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 575.
- [3] *B. de Wit, J. van Holten*. Phys.Lett.B. 1979. V. 79. P. 389.
- [4] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27.
- [5] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
- [6] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin*. J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487.
- [7] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 532.
- [8] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin*. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2513.
- [9] *C. M. Hull*. Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1871.
- [10] *M. Henneaux*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1990. V. 18A. P. 47.
- [11] *G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux*. Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. P. 57.
- [12] *K. Bering*. Acta Universitatis Upsaliensis. 1997. V. 248. P. 78.
- [13] *И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев*. ТМФ. 1997. Т. 110. С. 137.

Поступила в редакцию 26.IX.1997 г.