Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Широков, Теорема Паули при описании n -мерных спиноров в формализме алгебр Клиффорда, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 1, 11–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:51:44

© 2013 г.

Д. С. Широков*

ТЕОРЕМА ПАУЛИ ПРИ ОПИСАНИИ n -МЕРНЫХ СПИНОРОВ В ФОРМАЛИЗМЕ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Обсуждается обобщенная теорема Паули и ее возможные применения при описании n -мерных спиноров (Дирака, Вейля, Майорана и Майорана–Вейля) в формализме алгебр Клиффорда. Предложен явный вид элементов, осуществляющих обобщения дираковского, зарядового и майорановского сопряжений в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства. При описании сопряжений используется понятие дополнительной сигнатуры алгебры Клиффорда. Показано, что дополнительная сигнатура может принимать только определенные значения, несмотря на зависимость от матричного представления.

Ключевые слова: теорема Паули, спиноры, алгебра Клиффорда, дираковское сопряжение, зарядовое сопряжение, майорановское сопряжение, спиноры Вейля, спиноры Майорана, спиноры Майорана–Вейля, дополнительная сигнатура алгебры Клиффорда.

DOI: 10.4213/tmf8384

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1936 году Паули [1] доказал так называемую фундаментальную теорему о гамма-матрицах Дирака. Теорема утверждает, что два набора из четырех квадратных комплексных матриц четвертого порядка, которые антикоммутируют между собой и квадраты которых равны единичной матрице или единичной матрице с обратным знаком, связаны преобразованием подобия, причем матрица подобия единственна с точностью до умножения на ненулевое комплексное число. Эта теорема играет важную роль при изучении различных вопросов, возникающих в теории поля (см., например, [2], [3]). В частности, с помощью теоремы Паули доказывается лоренц-инвариантность уравнения Дирака, описывается связь спинорных и ортогональных групп, вводится понятие спиноров Майорана.

Имеются общеизвестные утверждения, которые в некотором смысле обобщают теорему Паули на случай произвольной размерности. А именно, методами теории представлений несложно показать [4], [5], что алгебра Клиффорда имеет единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление в случае четной

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: shirokov@mi.ras.ru

размерности и два неприводимых представления в случае нечетной размерности. Данные утверждения применяются в различных задачах математической физики, в частности в теории суперсимметрии (см. [5]–[19]).

В одной из предыдущих работ [20] автором были предложены утверждения, обобщающие теорему Паули. А именно, рассматривается более общий вопрос (который не всегда сводится к рассмотрению представлений) о связи двух наборов элементов алгебр Клиффорда, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям. Даются обобщения на случай алгебр Клиффорда произвольных четных и нечетных размерностей над полем вещественных и комплексных чисел. Показано, что в нечетном вещественном случае есть четыре (а в комплексном шесть) варианта связи между двумя наборами элементов, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда. В отличие от теоремы Паули в случае четырехмерного пространства Минковского, где связь осуществляется преобразованием подобия, в случае произвольной нечетной размерности (например, в случае трехмерного пространства) два набора связаны преобразованием подобия с точностью до умножения на элемент алгебры Клиффорда $\beta^{1\dots n}\gamma_{1\dots n}$, который может принимать в вещественном случае четыре (в комплексном случае шесть) различных значения (см. ниже теоремы 5, 6). Кроме того, во всех случаях (четной и нечетной размерностей) указаны явные алгоритмы вычисления элемента, осуществляющего эту связь.

В настоящей работе мы также указываем возможные приложения доказанных теорем в различных задачах математической физики. Стоит отметить несколько направлений, связанных с применением обобщенной теоремы Паули (ОТП).

Первым направлением можно назвать изучение n -мерного уравнения Дирака, в частности вопрос об инвариантности уравнения при псевдоортогональных (в частном случае лоренцевых) преобразованиях координат. В настоящее время активно используется трехмерное уравнение Дирака для графена. Таким образом, уравнение Дирака представляет интерес не только в случае четных, но и в случае нечетных размерностей. Локальная ОТП используется при изучении систем уравнений Дирака–Максвелла и Дирака–Янга–Миллса [21].

Второе применение относится к изучению связи спинорных и ортогональных групп. Мы предлагаем альтернативное доказательство с помощью ОТП теоремы о двулистных накрытиях ортогональных групп спинорными в случае произвольных размерностей (без использования теоремы Картана–Дьедонне, как делается в стандартном изложении). Кроме того, мы предлагаем явные алгоритмы вычисления элементов спинорных групп, которым соответствуют элементы ортогональных групп при двулистном накрытии.

Третье возможное применение, на котором мы и остановимся в настоящей работе, возникает при изучении n -мерных спиноров. Мы даем описание элементов, осуществляющих обобщения дираковского, майорановского и зарядового сопряжений от спинора в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства. Отметим, что в случае четных размерностей рассмотрено по два аналога сопряжения каждого вида. В связи с вопросом о существовании спиноров Дирака, Вейля, Майорана и Майорана–Вейля в формализме алгебр Клиффорда в случае различных размерностей и сигнатур пространства возникают вопросы, связанные с применением

ОТП в теории суперсимметрии (отметим классические работы по суперсимметрии и супергравитации Шерка, Глиоззи, Оливе [9], Куго и Таундсена [8], современные обзоры [5], [6] и другие работы [10]–[19]). В настоящей работе при изучении подобных вопросов мы используем ОТП.

Отметим, что мы используем аппарат алгебр Клиффорда над полем вещественных и комплексных чисел произвольных размерностей и сигнатур. Этот аппарат представляется нам более естественным и удобным (например, по сравнению с матричным аппаратом) при изучении перечисленных выше вопросов. При описании спиноров существенную роль играет структура алгебр Клиффорда, которая подчиняется 8-периодичности Картана–Ботта (см. ниже теорему 2).

В разделе 2 дается определение алгебры Клиффорда, рассмотрены связанные с ней понятия, которые необходимы в дальнейшем изложении. Кроме того, сформулированы общеизвестные теоремы о центре алгебры Клиффорда и об изоморфизмах алгебр Клиффорда матричным алгебрам. Далее, в разделе 3 сформулированы утверждения, обобщающие теорему Паули на случай вещественных и комплексных алгебр Клиффорда произвольных размерностей. Эти теоремы играют ключевую роль в дальнейшем изложении.

В разделе 4 дается краткий обзор n -мерных спиноров Дирака и Вейля в формализме алгебр Клиффорда.

В разделах 5, 6 обсуждается вопрос о согласованности операций над элементами алгебры Клиффорда и операций над матрицами. При изучении этого вопроса активно используется ОТП. Представлены новые результаты (теоремы 7, 8). Теорема 7 является следствием ОТП (теоремы 4, 5, 6). В теореме 8 предлагаются явные формулы для связи матричных операций с операциями в алгебре Клиффорда (при этом используется введенное понятие дополнительной сигнатуры алгебры Клиффорда, которая зависит от матричного представления). На основе этих формул ниже предлагаются явные формулы для элементов, осуществляющих обобщения дираковского, майорановского и зарядового сопряжений.

В разделах 7–9 доказываются теоремы об аналогах дираковского, майорановского и зарядового сопряжений соответственно в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства. Здесь же приводятся общеизвестные утверждения о реализации n -мерных спиноров Майорана, псевдомайорановских спиноров и спиноров Майорана–Вейля (выкладки проводятся в формализме алгебр Клиффорда). Доказывается теорема о том, что дополнительная сигнатура алгебры Клиффорда может принимать ограниченное число значений, несмотря на зависимость от матричного представления (теорема 12).

Отметим, что некоторые аспекты, связанные с n -мерными спинорами, представлены (иногда в другом формализме) в литературе. Мы постарались дать более полное математическое описание теории n -мерных спиноров Вейля, Майорана и Майорана–Вейля в случае произвольных размерностей и сигнатур. Излагается своя точка зрения на поставленные вопросы, представлено несколько новых результатов (теоремы 7–9, 11, 12, 14). В теоремах 9, 11, 14 даны явные формулы для элементов алгебры Клиффорда $A_{\pm}$, $B_{\pm}$ и $C_{\pm}$, которые явно зависят от матричного представления алгебры Клиффорда. При этом используется понятие дополнительных сигнатур алгебр Клиффорда (k_{γ}, l_{γ}) и (r_{γ}, s_{γ}) .

Ключевую роль в наших рассуждениях играют ОТП (теоремы 4–6), с помощью которых мы связываем операции над матрицами с операциями над элементами алгебры Клиффорда.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Алгебра Клиффорда (первоначальное название – геометрическая алгебра) была открыта английским математиком Вильямом Клиффордом [22] в 1878 году как алгебра, объединяющая свойства алгебры Грассмана [23] и кватернионов Гамильтона [24].

Дальнейшее развитие алгебр Клиффорда связано с целым рядом известных математиков и физиков (Р. Липшиц, Т. Вален, Э. Картан, Э. Уитт, К. Шевалле [25], М. Рис [26] и др.). Существенным для изучения алгебр Клиффорда оказалось открытие в 1928 году уравнения Дирака [27] для электрона, к которому алгебра Клиффорда имеет непосредственное отношение. Уравнение Дирака записывается с использованием четырех комплекснозначных матриц (гамма-матриц Дирака), которые удовлетворяют тем же определяющим соотношениям, что и генераторы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$. Связь алгебры Клиффорда со спинорами привлекла внимание к теории алгебр Клиффорда со стороны многих физиков и математиков.

В настоящее время алгебры Клиффорда применяются во многих разделах современной математики и физики. Например, алгебра Клиффорда находит свое применение в теории поля [28], [29], робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, небесной механике, вычислительной технике, электродинамике, геометрии и др.

В литературе известно несколько различных (эквивалентных) определений алгебр Клиффорда¹⁾. В рассматриваемом далее определении алгебры Клиффорда используется базис специального вида – занумерованный упорядоченными мультииндексами. Подчеркнем, что введенные ниже генераторы и базис фиксированы (не меняются). Такое определение ближе к первоначальному определению Клиффорда.

Пусть E – векторное (линейное) пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть n – натуральное число, размерность пространства E равна $\dim E = 2^n$. Пусть в E введен базис

$$e, e^a, e^{a_1 a_2}, \dots, e^{1 \dots n}, \quad a_1 < a_2 < \dots \quad (2^n \text{ штук}),$$

занумерованный упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n . Индексы $a, a_1, a_2, \dots$ пробегает значения от 1 до n .

Пусть p и q – неотрицательные целые числа и $p + q = n$, $n \geq 1$. Введем диагональную матрицу η размера n : $\eta = \|\eta^{ab}\| = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, у которой на диагонали стоят p штук $+1$ и q штук -1 . Введем на E операцию *клиффордова*

¹⁾В монографии [30] рассмотрены сразу три различных определения алгебры Клиффорда и показана их эквивалентность. В разных случаях бывают удобны разные определения. После работ Картана определение алгебры Клиффорда дается как определение алгебры Клиффорда n -мерного векторного пространства V с заданной квадратичной формой Q сигнатуры (p, q) , где $n = p + q$. При этом требуется, чтобы алгебра Клиффорда содержала изометричную копию V .

умножения $U, V \rightarrow UV$ так, что выполнены свойства дистрибутивности, ассоциативности, e – единичный элемент,

$$\begin{aligned} e^a e^b + e^b e^a &= 2\eta^{ab} e & \forall a, b = 1, \dots, n, \\ e^{a_1} \dots e^{a_k} &= e^{a_1 \dots a_k}, & 1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n. \end{aligned}$$

Тогда введенная таким образом алгебра называется *алгеброй Клиффорда* и обозначается $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ в случае поля вещественных чисел и $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(p, q) \equiv \mathcal{C}(p, q)$ в случае поля комплексных чисел²⁾. Если рассуждения верны для обоих случаев, будем писать $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$, подразумевая, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Элементы e^a называются *генераторами*³⁾ алгебры Клиффорда, элемент e называется *единицей* алгебры Клиффорда. Пара чисел (p, q) называется *сигнатурой* алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$. Заметим, что часто сигнатурой также называется число $p - q$.

Любой элемент U алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$ представляется в виде разложения по базису

$$U = ue + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n}, \quad (1)$$

где $u, u_a, u_{a_1 a_2}, \dots, u_{1\dots n}$ – вещественные (в случае $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$) или комплексные (в случае $\mathcal{C}(p, q)$) числа.

Векторные подпространства, натянутые на элементы $e^{a_1 \dots a_k}$, занумерованные упорядоченными мультииндексами длины k , обозначаются через $\mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q)$. Элементы подпространства $\mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ называются *элементами ранга k* . Отметим, что

$$\dim \mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q) = C_n^k.$$

Разбиение $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ задает классификацию элементов алгебр Клиффорда по рангам.

Z_2 -градуировка. Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$ является Z_2 -градуированной алгеброй (супералгеброй), а именно представляется в виде прямой суммы с соответствующими свойствами для четного и нечетного подпространств:

$$\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q) = \mathcal{C}_{\text{even}}^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus \mathcal{C}_{\text{odd}}^{\mathbb{F}}(p, q) = \bigoplus_{k - \text{even}} \mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus \bigoplus_{k - \text{odd}} \mathcal{C}_k^{\mathbb{F}}(p, q). \quad (2)$$

Рассмотрим следующие операции сопряжения от элементов алгебры Клиффорда, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Комплексное сопряжение. Если элемент $U \in \mathcal{C}(p, q)$ задан в виде разложения (1), то операцию *комплексного сопряжения от элемента алгебры Клиффорда*

²⁾Заметим, что комплексные алгебры Клиффорда одной размерности n (и разных сигнатур) изоморфны друг другу как алгебры (см. теорему 3). Однако в приложениях рассматриваются комплексные алгебры Клиффорда различных сигнатур. Например, при рассмотрении уравнения Дирака используется комплексная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(1, 3)$ (а не $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(4, 0)$). Комплексные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(p, q)$ целесообразно рассматривать в тех задачах, в которых требуется использовать операцию комплексного сопряжения от элементов алгебры Клиффорда.

³⁾В русскоязычной литературе вместо термина “генератор” часто используется термин “порождающий”.

$U \rightarrow \bar{U}$ зададим формулой

$$\bar{U} = \bar{u}e + \bar{u}_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} \bar{u}_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \sum_{a_1 < a_2 < a_3} \bar{u}_{a_1 a_2 a_3} e^{a_1 a_2 a_3} + \dots,$$

в которую входят комплексно-сопряженные коэффициенты $\bar{u}, \bar{u}_a, \bar{u}_{a_1 a_2}, \dots$.

В соответствии с этой формулой элементы базиса алгебры Клиффорда рассматриваются как вещественные величины, т.е. $\bar{e}^{a_1 \dots a_k} = e^{a_1 \dots a_k}$. Равенства $\bar{\bar{U}} = U$, $\overline{(UV)} = \bar{U} \bar{V}$, $\overline{(U+V)} = \bar{U} + \bar{V}$, $\overline{(\lambda U)} = \bar{\lambda} \bar{U}$ верны для произвольных элементов $U, V \in \mathcal{C}(p, q)$ и чисел $\lambda \in \mathbb{C}$.

Реверс. Для элемента $U \in \mathcal{C}(p, q)$ определим операцию сопряжения $U \rightarrow U^\sim$, называемую *реверсом*:

$$U^\sim = \left(\sum_{k=0}^n \binom{k}{U} \right)^\sim = \sum_{k=0}^n (-1)^{k(k-1)/2} \binom{k}{U}.$$

Отметим, что реверс обращает порядок следования множителей в произведениях генераторов: $(e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_k})^\sim = e^{a_k} \dots e^{a_2} e^{a_1}$, в частности $(e^a)^\sim = e^a$. Верны равенства $U^{\sim\sim} = U$, $(UV)^\sim = V^\sim U^\sim$, $(U+V)^\sim = U^\sim + V^\sim$, $(\lambda U)^\sim = \lambda U^\sim$.

Четностное сопряжение. Операция *четностного сопряжения* $U \rightarrow U^\perp$ такова, что нечетные элементы она умножает на -1 , а четные элементы не меняет. В частности, имеем $(e^a)^\perp = -e^a$. Для элемента $U \in \mathcal{C}(p, q)$ имеем $U^\perp = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{k}{U}$. Верны равенства $U^{\perp\perp} = U$, $(UV)^\perp = U^\perp V^\perp$, $(U+V)^\perp = U^\perp + V^\perp$, $(\lambda U)^\perp = \lambda U^\perp$.

Операции проецирования на подпространства $\mathcal{C}_k^\mathbb{F}(p, q)$ и операция взятия следа. Введем обозначение для линейных операций проецирования на подпространства элементов ранга k :

$$\langle U \rangle_k = \bar{U} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k} \in \mathcal{C}_k^\mathbb{F}(p, q).$$

Введем операцию *следа* элемента $U \in \mathcal{C}^\mathbb{F}(p, q)$ как операцию проецирования на одномерное подпространство $\mathcal{C}_0^\mathbb{F}(p, q)$, натянутое на единичный элемент e : $\text{Tr}(U) = \langle U \rangle_0|_{e \rightarrow 1} = u$.

Будем обозначать коммутатор и антикоммутатор двух элементов алгебры Клиффорда через $[U, V] = UV - VU$ и $\{U, V\} = UV + VU$.

Следующая известная теорема говорит о центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^\mathbb{F}(p, q)$.

ТЕОРЕМА 1. Центром алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^\mathbb{F}(p, q)$ размерности $n = p + q$ является

$$\text{cen } \mathcal{C}^\mathbb{F}(p, q) = \begin{cases} \mathcal{C}_0^\mathbb{F}(p, q), & n \text{ четное,} \\ \mathcal{C}_0^\mathbb{F}(p, q) \oplus \mathcal{C}_n^\mathbb{F}(p, q), & n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Приведем также общеизвестные теоремы об изоморфизме алгебр Клиффорда матричным алгебрам.

ТЕОРЕМА 2 (Периодичность Картана–Ботта). *Вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$, $n = p + q$, изоморфны (как алгебры) следующим матричным алгебрам:*

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q) \simeq \begin{cases} \text{Mat}(2^{n/2}, \mathbb{R}), & p - q \equiv 0, 2 \pmod{8}, \\ \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{R}) \oplus \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{R}), & p - q \equiv 1 \pmod{8}, \\ \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), & p - q \equiv 3, 7 \pmod{8}, \\ \text{Mat}(2^{(n-2)/2}, \mathbb{H}), & p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}, \\ \text{Mat}(2^{(n-3)/2}, \mathbb{H}) \oplus \text{Mat}(2^{(n-3)/2}, \mathbb{H}), & p - q \equiv 5 \pmod{8}, \end{cases}$$

где $\text{Mat}(k, \mathbb{F})$ – алгебра квадратных матриц размера $k \times k$ над полем или телом $\mathbb{F}$.

ТЕОРЕМА 3. *Имеем следующие изоморфизмы комплексных алгебр Клиффорда матричным алгебрам:*

$$\mathcal{C}(p, q) \simeq \begin{cases} \text{Mat}(2^{n/2}, \mathbb{C}), & n \text{ чётно}, \\ \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}) \oplus \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), & n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Отметим, что элементы комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ представляются комплексными матрицами, размер которых равен $2^{[(n+1)/2]}$, причем при нечётном n это будут блочно-диагональные матрицы размера $2^{(n+1)/2}$, у которых на диагонали стоят два блока размера $2^{(n-1)/2}$, а остальные элементы – нули.

3. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПАУЛИ

В работе [20] автором были предложены теоремы, обобщающие так называемую фундаментальную теорему Паули о гамма-матрицах. При этом использовался аппарат алгебр Клиффорда. Сформулируем доказанные теоремы.

Будем обозначать через $\mathcal{I}$ множество мультииндексов A длины от 0 до n : $\mathcal{I} = \{\emptyset, 1, \dots, n, 12, 13, \dots, 1, \dots, n\}$, где $\emptyset$ – пустой мультииндекс. Пусть

$$\mathcal{I}_{\text{even}} = \{A \in \mathcal{I} : |A| \text{ чётно}\}, \quad \mathcal{I}_{\text{odd}} = \{A \in \mathcal{I} : |A| \text{ нечётно}\}.$$

Используем обозначения $\gamma_A = \gamma_{a_1 \dots a_k} = \gamma_{a_k} \dots \gamma_{a_1} = (\gamma^A)^{-1}$ и $\gamma_a = \eta^{ab} \gamma^b = (\gamma^a)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда четной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда γ^a, β^a , $a = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} e, \quad \beta^a \beta^b + \beta^b \beta^a = 2\eta^{ab} e.$$

Тогда оба набора генерируют базисы⁴⁾ алгебры Клиффорда и существует единственный, с точностью до умножения на ненулевое вещественное (или комплексное) число, обратимый элемент алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$ такой, что

$$\gamma^a = T^{-1} \beta^a T \quad \forall a = 1, \dots, n. \quad (3)$$

При этом такой элемент T имеет вид $T = \sum_A \beta^A F \gamma_A$, где в качестве элемента F подойдет любой такой элемент из $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\text{even}}\}$, если $\beta^{1\dots n} \neq -\gamma^{1\dots n}$, или из $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\text{odd}}\}$, если $\beta^{1\dots n} \neq \gamma^{1\dots n}$, что $\sum_A \beta^A F \gamma_A \neq 0$.

⁴⁾ Другими словами, всевозможные произведения $\gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_k} = \gamma^{a_1 \dots a_k} = \gamma^A$ и β^A образуют два базиса в $\mathcal{C}^{\mathbb{F}}(p, q)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ – вещественная алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда $\gamma^a, \beta^a, a = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}e, \quad \beta^a \beta^b + \beta^b \beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ сигнатуры $p - q \equiv 1 \pmod{4}$ элементы $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ либо принимают значения $\pm e^{1\dots n}$ и соответствующие наборы генерируют базис алгебры Клиффорда, либо принимают значения $\pm e$ и наборы не генерируют базис. При этом реализуются указанные ниже случаи 1–4.

В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ сигнатуры $p - q \equiv 3 \pmod{4}$ элементы $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ всегда принимают значения $\pm e^{1\dots n}$ и соответствующие наборы всегда генерируют базис алгебры Клиффорда. При этом реализуются только случаи 1, 2.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, обратимый элемент алгебры Клиффорда T такой, что:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \gamma^a = T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}; \\ 2) \quad & \gamma^a = -T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}; \\ 3) \quad & \gamma^a = e^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = e^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}; \\ 4) \quad & \gamma^a = -e^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = -e^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что все четыре случая имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\dots n} \gamma_{1\dots n}) T^{-1} \beta^a T.$$

Кроме того, в случае вещественной алгебры Клиффорда $p - q \equiv 1 \pmod{4}$ элемент T , о существовании которого говорится во всех четырех случаях теоремы, имеет вид

$$T = \sum_{A \in \mathcal{I}_{\text{even}}} \beta^A F \gamma_A, \quad (5)$$

где в качестве F всегда подойдет один из элементов множества $\{\gamma^A + \gamma^B, A, B \in \mathcal{I}_{\text{even}}\}$.

В случае вещественной алгебры Клиффорда сигнатуры $p - q \equiv 3 \pmod{4}$ элемент T , о существовании которого говорится в случаях 1, 2 теоремы, имеет вид (5). Причем в качестве F подойдет любой такой из элементов множества $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\text{even}}\}$, что построенная по нему свертка $\sum_{A \in \mathcal{I}_{\text{even}}} \beta^A F \gamma_A \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{C}(p, q)$ – комплексная алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда $\gamma^a, \beta^a, a = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}e, \quad \beta^a \beta^b + \beta^b \beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ сигнатуры $p - q \equiv 1 \pmod{4}$ имеем для элементов $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ возможные значения $\pm e^{1\dots n}$, когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, и значения $\pm e$, когда наборы не генерируют базис. При этом реализуются случаи 1–4 теоремы.

В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ сигнатуры $p - q \equiv 3 \pmod{4}$ имеем для элементов $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ возможные значения $\pm ie^{1\dots n}$, когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, и значения $\pm ie$, когда наборы не генерируют базис. При этом реализуются случаи 1, 2, 5, 6 теоремы.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, обратимый элемент алгебры Клиффорда T такой, что:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \gamma^a &= T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}; \\
 2) \quad \gamma^a &= -T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}; \\
 3) \quad \gamma^a &= e^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = e^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}; \\
 4) \quad \gamma^a &= -e^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = -e^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}; \\
 5) \quad \gamma^a &= ie^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = ie^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}; \\
 6) \quad \gamma^a &= -ie^{1\dots n} T^{-1} \beta^a T & \forall a = 1, \dots, n & \Leftrightarrow \beta^{1\dots n} = -ie^{1\dots n} \gamma^{1\dots n}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что все шесть случаев имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\dots n} \gamma_{1\dots n}) T^{-1} \beta^a T.$$

Кроме того, элемент T , о существовании которого говорится во всех шести случаях теоремы, имеет вид

$$\sum_{A \in \mathcal{I}_{\text{even}}} \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве F всегда подойдет один из элементов множества $\{\gamma^A + \gamma^B, A, B \in \mathcal{I}_{\text{even}}\}$.

Отметим, что предложенные теоремы можно переформулировать в терминах матриц, если воспользоваться утверждениями теорем 2, 3. В настоящем изложении делать этого не будем в силу громоздкости получающихся формулировок.

4. СПИНОРЫ ДИРАКА И ВЕЙЛЯ В ФОРМАЛИЗМЕ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Впервые спиноры были рассмотрены Картаном в 1913 году, затем переоткрыты Дираком в 1928 году. С тех пор был развит ряд подходов и предложен ряд различных реализаций спиноров, в том числе в случае произвольных размерностей пространства.

Открытие в 1928 году уравнения Дирака [27] привлекло внимание к изучению спиноров со стороны многих математиков и физиков. В 1930 году Жуве [31] и Заутер [32] рассматривали спинор как элемент левого идеала в матричной алгебре. В 1947 году Рисс [26] впервые интерпретировал спиноры как элементы левого идеала в алгебре Клиффорда. Именно такой подход наиболее удобен при рассмотрении n -мерных спиноров и изучении их свойств (см., например, [30], [33]). Упомянем также ставшие классическими работы Рашевского [34] и Румера [35].

Отметим, что понятие “спинор” включает в себя два аспекта. Первый аспект (алгебраический) заключается в том, что спинор (в простейшем случае) является элементом некоторого минимального левого идеала (см. ниже), т. е. фактически

просто столбцом, если использовать матричный формализм. Второй аспект связан с тем, что на самом деле спинор представляет собой набор (столбец) функций, зависящих от точки пространства, и при ортогональных преобразованиях с матрицей $P \in O(p, q)$ умножается слева на элемент спинорной группы. Дальнейшие рассмотрения в настоящей статье почти всегда будут затрагивать только первый, алгебраический аспект. Второй аспект следует принимать во внимание, когда мы рассматриваем спинор не просто как абстрактный алгебраический объект, а как неизвестную величину в уравнении Дирака.

Спиноры Дирака. Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ и примитивный идемпотент $t^2 = t$, $t \in \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$. Ему соответствует минимальный левый идеал (*спинорное пространство*) $I(t) = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)t$, порожденный идемпотентом t . Элементы левого идеала $\psi \in I(t)$ будем называть *спинорами* (в формализме алгебр Клиффорда).

Неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q) \rightarrow \text{End}(I)$ инъективно в случае $p - q \not\equiv 1 \pmod{4}$ (см. теорему 2). В случае $p - q \equiv 1 \pmod{4}$ алгебра Клиффорда не является простой и представляет собой прямую сумму двух простых идеалов. В этом случае рассматривается левый идеал (*двойное спинорное пространство*) $I \oplus \hat{I}$, построенный по идемпотентам t и $\hat{t}$. Таким образом, получаем инъективное представление в случае $p - q \equiv 1 \pmod{4}$. Однако оно является приводимым и представляет собой прямую сумму двух неприводимых представлений. Каждое из этих неприводимых представлений называется *полуспинорным*, и соответствующие левые идеалы называются *полуспинорными пространствами*.

При рассмотрении комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ действуют аналогичным образом (см. теорему 3). В случае четного n рассматривают спинорное представление. Элементы левого идеала называют *спинорами Дирака*. В случае нечетного n рассматривают либо *двойные спиноры*, либо *полуспиноры*. Далее будем рассматривать только комплексные алгебры Клиффорда.

Спиноры Вейля. Рассмотрим множество спиноров Дирака, реализуемое в комплексной алгебре Клиффорда (как множество элементов левого идеала) $E_{\text{Dirac}} = \{\psi \in I(t)\}$. Рассмотрим *киральный оператор* (или псевдоскаляр)

$$\omega = \begin{cases} e^{1\dots n}, & p - q \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ ie^{1\dots n}, & p - q \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\omega = \omega^{-1} = \omega^\dagger$. Кроме того, $\{\omega, e^a\} = \omega e^a + e^a \omega = 0$, если n четно, и $[\omega, e^a] = \omega e^a - e^a \omega = 0$, если n нечетно, для всех $a = 1, 2, \dots, n$.

Определим два оператора

$$P_L = \frac{e - \omega}{2}, \quad P_R = \frac{e + \omega}{2}.$$

Они являются ортогональными идемпотентами (проекторами), так как $(P_R)^2 = P_R$, $(P_L)^2 = P_L$, $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Отметим, что в случае нечетного n операторы P_L и P_R лежат в центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ и дают разложение алгебры Клиффорда на прямую сумму двух идеалов $\mathcal{C}(p, q) = P_R \mathcal{C}(p, q) \oplus P_L \mathcal{C}(p, q)$.

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ четной размерности $n = p + q$. Тогда *левые* и *правые спиноры Вейля* (или *киральные спиноры*) определяются следующим образом:

$$E_{\text{Weyl}}^L = \{\psi \in E_{\text{Dirac}} \mid P_L \psi = \psi\}, \quad E_{\text{Weyl}}^R = \{\psi \in E_{\text{Dirac}} \mid P_R \psi = \psi\}.$$

Таким образом, спиноры Вейля являются собственными спинорами операторов P_L и P_R . Заметим, что условия на спиноры можно переписать в другом эквивалентном виде: $P_L \psi = \psi \Leftrightarrow \omega \psi = -\psi$ и $P_R \psi = \psi \Leftrightarrow \omega \psi = \psi$. Отметим, что $E_{\text{Dirac}} = E_{\text{Weyl}}^R \oplus E_{\text{Weyl}}^L$, т. е. для любого $\psi \in E_{\text{Dirac}}$ имеем $\psi = \psi_L + \psi_R$, $\psi_L = P_L \psi$, $\psi_R = P_R \psi$.

5. СОГЛАСОВАННОСТЬ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ И ОПЕРАЦИЙ В АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА

Будем рассматривать матричные представления комплексных алгебр Клиффорда (см. теорему 2)

$$\gamma: \mathcal{C}(p, q) \rightarrow \begin{cases} \text{Mat}(2^{n/2}, \mathbb{C}), & n \text{ четное,} \\ \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}) \oplus \text{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), & n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В случае нечетного n элементы алгебры Клиффорда представляются блочно-диагональными матрицами размера $2^{(n+1)/2}$. Обозначим через $\gamma^a = \gamma(e^a)$ матрицы, соответствующие генераторам алгебры Клиффорда в матричном представлении γ .

Согласно теореме Паули все остальные матричные представления β в случае четного n можно получить из исходного в виде $\beta^a = T^{-1} \gamma^a T$, где обратимая матрица T определена с точностью до ненулевой константы.

В случае нечетного n все матричные представления можно получить из исходного в виде $\beta^a = \pm T^{-1} \gamma^a T$, где матрица T определена с точностью до умножения на обратимый элемент центра $Z = \lambda 1 + \mu J$, где $J = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ — диагональная матрица, у которой на диагонали стоит одинаковое число 1 и -1 .

Рассмотрим операцию эрмитова сопряжения от элемента алгебры Клиффорда, которая вводится по формулам (см. [36])

$$U^\dagger = \begin{cases} e_{1\dots p} U^\dagger e^{1\dots p}, & p \text{ нечетно,} \\ e_{1\dots p} U^{\dagger \wedge} e^{1\dots p}, & p \text{ четно,} \end{cases} \quad (7)$$

$$U^\dagger = \begin{cases} e_{p+1\dots n} U^\dagger e^{p+1\dots n}, & q \text{ четно,} \\ e_{p+1\dots n} U^{\dagger \wedge} e^{p+1\dots n}, & q \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Всегда можно выбрать такое матричное представление γ (см. [36]), что $\gamma(e^a) = \gamma^a$ — унитарные матрицы:

$$(\gamma^a)^\dagger = (\gamma^a)^{-1} = \eta^a \gamma^a. \quad (8)$$

В дальнейшем будем рассматривать только матричные представления, для которых выполнено (8). Заметим, что соотношение (8) эквивалентно $(\gamma(e^a))^\dagger = \gamma((e^a)^\dagger)$, а значит, эквивалентно $\gamma^\dagger(U) = \gamma(U^\dagger) \forall U \in \mathcal{C}(p, q)$, т. е. согласованности операции эрмитова сопряжения от матрицы и операции эрмитова сопряжения от элемента

алгебры Клиффорда. Также заметим, что из (8) следует, что первые p матриц γ^a являются эрмитовыми, а последние q – антиэрмитовыми.

Будем рассматривать различные операции сопряжения (см. раздел 2) от элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$: $U^\sim$, $U^\wedge$, $\overline{U}$, $U^\ddagger$, $U^\dagger$, U^T , $\overleftarrow{U}$.

Мы рассматриваем здесь две новые операции от элементов алгебры Клиффорда: операцию транспонирования элемента алгебры Клиффорда и операцию взятия комплексного матричного сопряжения от элемента алгебры Клиффорда

$$U^T = \gamma^{-1}((\gamma(U))^T), \quad \overleftarrow{U} = \gamma^{-1}(\overleftarrow{\gamma(U)}), \quad (9)$$

которые зависят от выбора матричного представления γ . Здесь $\overleftarrow{\gamma(U)}$ – матрица, комплексно-сопряженная к матрице $\gamma(U)$.

Рассмотрим набор из генераторов e^a алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$. Отметим, что $(e^a)^\sim = e^a$, $(e^a)^\wedge = -e^a$, $\overline{e^a} = e^a$, $(e^a)^\ddagger = e^a$. Будем рассматривать наборы элементов, полученные из исходного набора e^a действием одной из операций сопряжения:

$$\beta^a = \pm(e^a)^\dagger, \quad \pm(e^a)^T, \quad \pm\overleftarrow{e^a}. \quad (10)$$

Заметим, что все рассмотренные наборы удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры Клиффорда $\beta^a \beta^b + \beta^b \beta^a = 2\eta^{ab}e$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Наборы β^a , введенные в (10), генерируют новые базисы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$.*

В случае четного n для рассматриваемых наборов e^a и β^a всегда существует единственный, с точностью до умножения на комплексную константу, обратимый элемент T такой, что

$$\beta^a = T^{-1}e^aT, \quad a = 1, \dots, n.$$

При этом $T \in \mathcal{C}_{\text{even}}(p, q)$, если $\beta^{1\dots n} = e^{1\dots n}$, и $T \in \mathcal{C}_{\text{odd}}(p, q)$, если $\beta^{1\dots n} = -e^{1\dots n}$.

Элемент T имеет вид $\sum_A \beta^A e^B e_A$ для некоторого e^B .

В случае нечетного n для рассматриваемых двух наборов e^a и β^a существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра, обратимый элемент T такой, что

$$\begin{aligned} \beta^a &= T^{-1}e^aT, & a &= 1, \dots, n & (\text{в случае } \beta^{1\dots n} = e^{1\dots n}), \\ \beta^a &= -T^{-1}e^aT, & a &= 1, \dots, n & (\text{в случае } \beta^{1\dots n} = -e^{1\dots n}). \end{aligned}$$

В обоих случаях элемент $T \in \mathcal{C}_{\text{even}}(p, q)$ (либо после умножения на $e^{1\dots n}$ получаем другой $T \in \mathcal{C}_{\text{odd}}(p, q)$).

Кроме того, элемент T имеет вид $\sum_{A \in \mathcal{I}_{\text{even}}} \beta^A e^B e_A$ для некоторого e^B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из теорем 4–6.

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИГНАТУРЫ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Заметим, что можно всегда выбрать такие матричные представления γ , для которых помимо условий (8) выполнены условия

$$(\gamma^a)^T = \pm \gamma^a, \quad \overleftarrow{\gamma^a} = \pm \gamma^a, \quad (11)$$

т. е. матрицы γ^a являются вещественными или чисто мнимыми (и при этом симметричными или антисимметричными в силу унитарности).

Введем *дополнительные сигнатуры алгебры Клиффорда*

$$\begin{aligned} (k_\gamma, l_\gamma), \quad 0 \leq k_\gamma \leq n, \quad 0 \leq l_\gamma \leq n, \quad k_\gamma + l_\gamma = n, \\ (r_\gamma, s_\gamma), \quad 0 \leq r_\gamma \leq n, \quad 0 \leq s_\gamma \leq n, \quad r_\gamma + s_\gamma = n, \end{aligned}$$

которые зависят от матричного представления γ алгебры Клиффорда. Здесь k_γ – количество симметричных матриц среди γ^a , l_γ – количество антисимметричных матриц среди γ^a . Аналогично r_γ – количество вещественных матриц среди γ^a , s_γ – количество чисто мнимых матриц среди γ^a .

Введенные величины зависят от матричного представления γ . Далее будем иногда опускать индекс γ . Заметим, что, несмотря на зависимость от матричного представления, мы найдем ограничения на возможные значения параметров k_γ и l_γ (см. ниже теорему 12).

Параметров k, l, r, s порой не хватает, чтобы полностью восстановить нужную нам информацию о выбранном матричном представлении алгебры Клиффорда. Поэтому мы предлагаем начать с двух других независимых параметров $[kp]_\gamma, [kq]_\gamma$, которые равны соответственно количеству симметричных матриц среди первых p матриц γ^a и количеству симметричных матриц среди последних q матриц γ^a . Заметим, что $[kp]_\gamma \leq k, [kp]_\gamma \leq p, [kq]_\gamma \leq k, [kq]_\gamma \leq q$. Этих двух параметров (наряду с фиксированными и не зависящими от матричного представления параметрами p и q) нам хватит, чтобы однозначно восстановить параметры $k_\gamma, l_\gamma, r_\gamma, s_\gamma, [lp]_\gamma, [lq]_\gamma$. Последние два из перечисленных параметров равны соответственно количеству антисимметричных матриц среди первых p матриц γ^a и количеству антисимметричных матриц среди последних q матриц γ^a .

Имеем следующие формулы для этих параметров:

$$\begin{aligned} [lp]_\gamma &= p - [kp]_\gamma, & [lq]_\gamma &= q - [kq]_\gamma, \\ k_\gamma &= [kp]_\gamma + [kq]_\gamma, & l_\gamma &= [lp]_\gamma + [lq]_\gamma = p + q - [kp]_\gamma - [kq]_\gamma = n - k, \\ r_\gamma &= [kp]_\gamma + [lq]_\gamma = [kp]_\gamma + q - [kq]_\gamma, & s_\gamma &= [lp]_\gamma + [kq]_\gamma = p - [kp]_\gamma + [kq]_\gamma. \end{aligned}$$

Итак, в итоге размерность алгебры Клиффорда n представляется суммой четырех чисел:

$$n = [kpr]_\gamma + [lps]_\gamma + [kqs]_\gamma + [lqr]_\gamma,$$

где $[kpr]_\gamma = [kp]_\gamma, [lps]_\gamma = [lp]_\gamma, [kqs]_\gamma = [kq]_\gamma, [lqr]_\gamma = [lq]_\gamma$. Здесь индексы r и s характеризуют вещественность или мнимость соответствующих матриц γ^a (которая автоматически следует из свойств унитарности и (анти)симметричности).

Например, в случае $(p, q) = (n, 0)$ имеем $[kq]_\gamma = [lq]_\gamma = 0$, $k_\gamma = r_\gamma = [kp]_\gamma$, $l_\gamma = s_\gamma = [lp]_\gamma = p - [kp]_\gamma$, т. е. в этом случае все симметричные матрицы, представляющие генераторы, являются вещественными, а все антисимметричные – мнимыми.

В случае $(p, q) = (0, n)$ имеем $[kp]_\gamma = [lp]_\gamma = 0$, $k_\gamma = s_\gamma = [kq]_\gamma$, $l_\gamma = r_\gamma = [lq]_\gamma = q - [kq]_\gamma$, т. е. все симметричные матрицы, представляющие генераторы, являются мнимыми, а все антисимметричные – вещественными.

При сделанных предположениях имеем для всех наборов (10) $\beta^a = \pm e^a$. Тогда согласно ОТП элементы T , о которых говорилось выше, найдутся среди элементов вида $\sum e^A e^B e_A$, т. е. среди элементов базиса $\{e^A\}$.

Обозначим те генераторы e^a , для которых матрицы γ^a симметричны, через $e^{b_1}, \dots, e^{b_k}$. Аналогично для антисимметричных матриц имеем обозначение $e^{c_1}, \dots, e^{c_l}$, для вещественных – $e^{d_1}, \dots, e^{d_r}$ и для чисто мнимых – $e^{f_1}, \dots, e^{f_s}$.

Можно указать явные формулы для операций U^T и $\overleftarrow{U}$. А именно, имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. *Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ и матричное представление γ , удовлетворяющее условиям (8), (11). Тогда верны следующие формулы для операций транспонирования и взятия комплексного матричного сопряжения (9) от элемента алгебры Клиффорда:*

$$U^T = \begin{cases} e_{b_1 \dots b_k} U^\sim e^{b_1 \dots b_k}, & k \text{ нечетно,} \\ e_{b_1 \dots b_k} U^\wedge e^{b_1 \dots b_k}, & k \text{ четно,} \end{cases} \quad (12)$$

$$U^T = \begin{cases} e_{c_1 \dots c_l} U^\sim e^{c_1 \dots c_l}, & l \text{ четно,} \\ e_{c_1 \dots c_l} U^\wedge e^{c_1 \dots c_l}, & l \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$\overleftarrow{U} = \begin{cases} e_{d_1 \dots d_r} \overline{U} e^{d_1 \dots d_r}, & r \text{ нечетно,} \\ e_{d_1 \dots d_r} \overline{U}^\wedge e^{d_1 \dots d_r}, & r \text{ четно,} \end{cases} \quad (13)$$

$$\overleftarrow{U} = \begin{cases} e_{f_1 \dots f_s} \overline{U} e^{f_1 \dots f_s}, & s \text{ четно,} \\ e_{f_1 \dots f_s} \overline{U}^\wedge e^{f_1 \dots f_s}, & s \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству формул (7) (см. [36]).

Заметим, что формулы (12), (13) похожи на формулы для эрмитова сопряжения (7), однако они явно зависят от матричного представления. В зависимости от k , l , r и s всегда имеются по две эквивалентные формулы для операции транспонирования и по две эквивалентные формулы для операции взятия комплексного матричного сопряжения.

7. ОБОБЩЕНИЕ ДИРАКОВСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ

В настоящем разделе введем аналоги дираковского сопряжения на случай произвольных размерности и сигнатуры пространства. При этом в случае четных размерностей n будем рассматривать одновременно два различных дираковских сопряжения. В случае нечетного n рассматривается только одно дираковское сопряжение.

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$. Согласно ОТП (теорема 7) и используя рассуждения из раздела 6, заключаем, что среди элементов базиса

$\{e^A\}$ найдутся элементы $A_{\pm}$ такие, что

$$(e^a)^\dagger = \pm A_{\pm}^{-1} e^a A_{\pm}, \quad (14)$$

причем в случае четного n всегда существуют оба элемента $A_{\pm}$, а в случае нечетного n – только один из элементов A_+ и A_- . Эти формулы можно переписать в виде $U^\dagger = A_+^{-1} U^\dagger A_+$ и $U^\dagger = A_-^{-1} U^\dagger A_-$. В следующей теореме представлены явные формулы для элементов $A_{\pm}$. Отметим, что в литературе при четном n в качестве элемента, осуществляющего дираковское сопряжение, используют элемент $e^{1\dots p}$. В следующей теореме разобраны всевозможные случаи.

ТЕОРЕМА 9. *Элемент A_+ существует всегда, кроме случая четного p и нечетного q , а элемент A_- существует всегда, кроме случая нечетного p и четного q . Для этих элементов верны формулы*

$$A_+ = \begin{cases} \mu_1 e^{1\dots p}, & p, q \text{ нечетны,} \\ \mu_2 e^{p+1\dots n}, & p, q \text{ четны,} \\ Z_1 e^{1\dots p} = Z_2 e^{p+1\dots n}, & p \text{ нечетно, } q \text{ четно,} \end{cases} \quad (15)$$

$$A_- = \begin{cases} \mu_1 e^{p+1\dots n}, & p, q \text{ нечетны,} \\ \mu_2 e^{1\dots p}, & p, q \text{ четны,} \\ Z_1 e^{1\dots p} = Z_2 e^{p+1\dots n}, & p \text{ четно, } q \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (16)$$

где μ_i – произвольные ненулевые комплексные константы, а Z_i – произвольные обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$.

Кроме того, всегда можно подобрать μ_i и Z_i так, чтобы для элементов A_+ и A_- выполнялись соотношения

$$A_+ = A_+^\dagger = A_+^{-1} = A_+^{\dagger\wedge}, \quad A_- = A_-^\dagger = A_-^{-1} = A_-^{\dagger\wedge}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 7 элемент A_+ существует, если $(e^1)^\dagger \dots (e^n)^\dagger = e^{1\dots n}$, т.е. когда q четно, а элемент A_- существует, если $(e^1)^\dagger \dots (e^n)^\dagger = -e^{1\dots n}$, т.е. когда q нечетно. Явные выражения для элементов A_+ и A_- получаем из (7). Выбирая в качестве μ число 1 или i в зависимости от p и q , можем добиться выполнения свойств (17).

В случае различных сигнатур можно ввести следующие операции *сопряжения Дирака*:

$$\psi^{D+} = \psi^\dagger (A_+)^{-1} = (A_+)^{-1} \psi^\dagger, \quad \text{кроме случая } p \text{ четно, } q \text{ нечетно,} \quad (18)$$

$$\psi^{D-} = \psi^\dagger (A_-)^{-1} = (A_-)^{-1} \psi^\dagger, \quad \text{кроме случая } p \text{ нечетно, } q \text{ четно.} \quad (19)$$

Например, в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$ с генераторами e^0, e^1, e^2, e^3 получаем два сопряжения Дирака $\psi^{D+} = \psi^\dagger e^0$ и $\psi^{D-} = \psi^\dagger e^{123}$, первое из которых совпадает со стандартным.

Рассмотрим следующие два набора величин, называемые *билинейными ковариантами* (билинейными формами Дирака): $j_{\pm}^A = \psi^{D\pm} e^A \psi$, где A – произвольный мультииндекс длины от 0 до n . Можно проверить, что при ортогональных заменах

координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu = p^\mu_\nu x^\nu$, где $P = \|p^\mu_\nu\| \in O(p, q)$, билинейные коварианты меняются (если спиноры меняются по правилу $\psi \rightarrow S\psi$, где S – элемент спинорной группы) как тензоры либо почти как тензоры (в формуле преобразований появляется знак минус): $(j^\mu_{\pm} \dots j^\mu_k)' = p^{\mu_1}_{\nu_1} \dots p^{\mu_k}_{\nu_k} j^\nu_1 \dots j^\nu_k$ или $(j^\mu_{\pm} \dots j^\mu_k)' = -p^{\mu_1}_{\nu_1} \dots p^{\mu_k}_{\nu_k} j^\nu_1 \dots j^\nu_k$ в зависимости от k .

8. ОБОБЩЕНИЕ МАЙОРАНОВСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ И ТЕОРЕМА О ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СИГНАТУРЕ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ и операцию транспонирования элемента алгебры Клиффорда (9). Заметим, что данная операция зависит от выбора матричного представления.

Согласно ОТП найдутся элементы $C_\pm$ такие, что

$$(e^a)^T = \pm C_\pm^{-1} e^a C_\pm, \quad (20)$$

причем в случае четного n всегда существуют оба элемента $C_\pm$, а в случае нечетного n – только один из элементов C_+ и C_- . Также можно переписать формулы в виде $U^T = C_+^{-1} U \sim C_+$ и $U^T = C_-^{-1} U \sim C_-$.

Сформулируем следующие теоремы об элементах $C_\pm$. Формулы (21) и (22) общеизвестны. Мы представляем также явный вид элементов $C_\pm$ (формулы (23), (24)) и выражения для констант $\lambda_\pm$ в зависимости от значений дополнительной сигнатуры (k, l) (см. (25), (26)).

ТЕОРЕМА 10. *Элемент C_+ существует в случаях $n \not\equiv 3 \pmod{4}$, элемент C_- существует в случаях $n \not\equiv 1 \pmod{4}$. Для этих элементов верны формулы*

$$(C_\pm)^T = \lambda_\pm C_\pm, \quad \overleftarrow{C}_\pm C_\pm = \lambda_\pm e, \quad (21)$$

где

$$\lambda_+ = \begin{cases} +1, & n \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}, \\ -1, & n \equiv 4, 5, 6 \pmod{8}, \end{cases} \quad \lambda_- = \begin{cases} +1, & n \equiv 0, 6, 7 \pmod{8}, \\ -1, & n \equiv 2, 3, 4 \pmod{8}. \end{cases} \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 11. *В случае матричных представлений, удовлетворяющих (8), (11), имеем явный вид элементов $C_\pm$:*

$$C_+ = \begin{cases} \mu_1 e^{b_1 \dots b_k}, & k, l \text{ нечетны}, \\ \mu_2 e^{c_1 \dots c_l}, & k, l \text{ четны}, \\ Z_1 e^{b_1 \dots b_k} = Z_2 e^{c_1 \dots c_l}, & k \text{ нечетно}, l \text{ четно}, \end{cases} \quad (23)$$

$$C_- = \begin{cases} \mu_1 e^{c_1 \dots c_l}, & k, l \text{ нечетны}, \\ \mu_2 e^{b_1 \dots b_k}, & k, l \text{ четны}, \\ Z_1 e^{b_1 \dots b_k} = Z_2 e^{c_1 \dots c_l}, & k \text{ четно}, l \text{ нечетно}, \end{cases} \quad (24)$$

где μ_i – произвольные ненулевые комплексные константы, а Z_i – обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$. Также получаем следующие значения

для $\lambda_{\pm}$:

$$\lambda_+ = \begin{cases} (-1)^{k(k-1)/2}, & k, l \text{ нечетны,} \\ (-1)^{l(l+1)/2}, & k, l \text{ четны,} \\ (-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{l(l+1)/2}, & k \text{ нечетно, } l \text{ четно,} \end{cases} \quad (25)$$

$$\lambda_- = \begin{cases} (-1)^{l(l+1)/2}, & k, l \text{ нечетны,} \\ (-1)^{k(k-1)/2}, & k, l \text{ четны,} \\ (-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{l(l+1)/2}, & k \text{ четно, } l \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 10, 11. Явные формулы для элементов $C_{\pm}$ в случае выделенных матричных представлений получаем из формул (12).

Для четного n из (20) получаем $e^A = C_{\pm}^T C_{\pm}^{-1} e^A C_{\pm} (C_{\pm}^{-1})^T$, т.е. $C_{\pm} (C_{\pm}^{-1})^T = \lambda_{\pm} e$, так как полученное выражение коммутирует со всеми элементами. Поскольку $\text{Det}(C_{\pm}) = 1$ (под определителем от элемента алгебры Клиффорда понимается определитель от соответствующего матричного представления, см. [37]), то $\lambda_{\pm} = 1, -1$. Кроме того, $C_{\pm}^{\dagger} C_{\pm} = e$, тогда получим $\overleftarrow{C_{\pm}} = (C_{\pm}^T)^{\dagger} = (\lambda_{\pm} C_{\pm})^{\dagger} = \lambda_{\pm} C_{\pm}^{-1}$.

Далее, для произвольного упорядоченного мультииндекса A длины k имеем

$$\begin{aligned} (e^A)^T &= (\pm 1)^k (-1)^{k(k-1)/2} C_{\pm}^{-1} e^A C_{\pm}, \\ (C_{\pm} e^A)^T &= (\pm 1)^k (-1)^{k(k-1)/2} \lambda_{\pm} (C_{\pm} e^A). \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку набор e^A образует базис в алгебре Клиффорда, то и набор из симметричных и антисимметричных матриц $C_{\pm} e^A$ также образует базис. Элементы представляются комплексными квадратными матрицами размера $2^{n/2}$. Тогда среди них антисимметричных должно быть $(1/2)2^{n/2}(2^{n/2} - 1)$. С другой стороны, их число равно

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (1 - (\pm 1)^k (-1)^{k(k-1)/2} \lambda_{\pm}) C_n^k.$$

Приравнивая два выражения, получаем

$$\lambda_{\pm} = \cos \frac{\pi n}{4} \pm \sin \frac{\pi n}{4} = \pm \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} (n \pm 1) \right),$$

что и требовалось доказать.

Для нечетного n можно получить те же формулы (21), если воспользоваться тем, что в случае выделенных матричных представлений элементы $C_{\pm}$ всегда найдутся среди элементов базиса e^A (см. формулы (23) и (24)). Формулы (25) и (26) (для случая четного n тоже) получаем, сопоставляя формулы (23), (24) и (21). Далее, выбрав какое-нибудь конкретное матричное представление (см., например, [36]), получаем значения $\lambda_{\pm}$ в зависимости от $n \pmod{8}$ в случае нечетного n .

Заметим, что несмотря на то что элементы $C_{\pm}$ зависят от матричного представления, их симметричность (21) определяется только размерностью пространства n (22).

Таблица 1

$n \pmod 8$	$(k \pmod 4, l \pmod 4)$	$n \pmod 8$	$(k \pmod 4, l \pmod 4)$
0	(0, 0), (1, 3)	4	(3, 1), (2, 2)
1	(1, 0)	5	(3, 2)
2	(1, 1), (2, 0)	6	(3, 3), (0, 2)
3	(2, 1)	7	(0, 3)

Представим следующий новый результат. Несмотря на то что параметры k и l дополнительной сигнатуры (см. раздел 6) определяются выбором матричного представления, их значения не могут быть произвольными и принимают вполне определенные значения в зависимости от размерности пространства n .

ТЕОРЕМА 12. *Рассмотрим комплексные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ и матричное представление, удовлетворяющее условиям (8), (11). Тогда в зависимости от размерности $n = p + q$ алгебры Клиффорда имеем возможные значения для дополнительной сигнатуры (k_γ, l_γ) , приведенные в табл. 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится сопоставлением явных формул (25), (26) для $\lambda_\pm$, зависящих от k и l , и формул (22), зависящих от $n \pmod 8$.

Рассмотрим в качестве примера алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ размерности $n = 2$ и разных сигнатур $(p, q) = (2, 0), (1, 1), (0, 2)$. Следующие три матрицы Паули антикоммутируют и в квадрате дают $+\mathbf{1}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В качестве γ^1 и γ^2 мы можем взять любые две из этих трех матриц (в случае необходимости домножая на мнимую единицу i). Таким образом, реализуются в точности только сигнатуры $(k, l) = (2, 0), (1, 1)$. Возможные значения дополнительных сигнатур для алгебр Клиффорда размерностей $n = 1, 2, 3, 4$ приведены в табл. 2.

Укажем алгоритм, по которому мы составили эту таблицу, пользуясь только утверждением теоремы 12 и формулами из раздела 6. При рассмотрении алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ размерности $n = p + q$ сначала с использованием теоремы 12 узнаем возможные значения параметров k_γ и l_γ . Затем разбиваем параметр k_γ всевозможными способами на пары $([kp]_\gamma, [lq]_\gamma)$ так, что $k_\gamma = [kp]_\gamma + [kq]_\gamma$ и $0 \leq [kp]_\gamma \leq p$, $0 \leq [kq]_\gamma \leq q$. Далее по параметрам $([kp]_\gamma, [lq]_\gamma)$ восстанавливаем дополнительную сигнатуру (r_γ, s_γ) по формулам $r_\gamma = [kp]_\gamma + q - [kq]_\gamma$, $s_\gamma = n - r_\gamma$.

Рассмотрим, например, алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$. Стандартное представление Дирака соответствует случаю $(k_\gamma, l_\gamma) = (2, 2)$, $(r_\gamma, s_\gamma) = (3, 1)$. Представление Майорана соответствует случаю $(k_\gamma, l_\gamma) = (3, 1)$, $(r_\gamma, s_\gamma) = (0, 4)$. Оставшиеся два случая, указанные в табл. 2, также реализуются. Случай $(k_\gamma, l_\gamma) = (2, 2)$, $(r_\gamma, s_\gamma) = (1, 3)$ получим из представления Дирака, если матрицы, соответствующие генераторам e^1 и e^2 , умножим на мнимую единицу i и поменяем местами. Случай $(k_\gamma, l_\gamma) = (3, 1)$, $(r_\gamma, s_\gamma) = (2, 2)$ получим из представления Майорана, если матрицы, соответствующие генераторам e^1 и e^2 , умножим на мнимую единицу i и поменяем местами.

ТАБЛИЦА 2

(p, q)	$([kp]_\gamma, [kq]_\gamma)$	(k_γ, l_γ)	(r_γ, s_γ)	(p, q)	$([kp]_\gamma, [kq]_\gamma)$	(k_γ, l_γ)	(r_γ, s_γ)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(4, 0)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)		(2, 0)	(2, 2)	(2, 2)
(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(3, 1)	(3, 0)	(3, 1)	(4, 0)
	(1, 0)	(1, 1)	(1, 1)		(2, 1)	(3, 1)	(2, 2)
(1, 1)	(1, 1)	(2, 0)	(1, 1)		(2, 0)	(2, 2)	(3, 1)
	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)		(1, 1)	(2, 2)	(1, 3)
	(0, 1)	(1, 1)	(0, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 1)
(0, 2)	(0, 2)	(2, 0)	(0, 2)		(1, 2)	(3, 1)	(1, 3)
	(0, 1)	(1, 1)	(1, 1)		(2, 0)	(2, 2)	(4, 0)
(3, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 1)		(1, 1)	(2, 2)	(2, 2)
(2, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(1, 2)		(0, 2)	(2, 2)	(0, 4)
	(2, 0)	(2, 1)	(3, 0)	(1, 3)	(1, 2)	(3, 1)	(2, 2)
(1, 2)	(1, 1)	(2, 1)	(2, 1)		(0, 3)	(3, 1)	(0, 4)
	(0, 2)	(2, 1)	(0, 3)		(1, 1)	(2, 2)	(3, 1)
(0, 3)	(0, 2)	(2, 1)	(1, 2)		(0, 2)	(2, 2)	(1, 3)
				(0, 4)	(0, 3)	(3, 1)	(1, 3)
					(0, 2)	(2, 2)	(2, 2)

Майорановским сопряжением называется одно из следующих сопряжений (каждый раз, когда существуют соответствующие $C_\pm$):

$$\begin{aligned}\psi^{M+} &= \psi^T (C_+)^{-1} = (C_+)^{-1} \psi^\sim, & n \not\equiv 3 \pmod{4}, \\ \psi^{M-} &= \psi^T (C_-)^{-1} = (C_-)^{-1} \psi^{\sim\wedge}, & n \not\equiv 1 \pmod{4}.\end{aligned}$$

Рассмотрим, к примеру, случай алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$ и стандартное матричное представление с помощью гамма-матриц Дирака $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$. Нетрудно проверить, что матрицы γ^0 и γ^2 симметричны, а матрицы γ^1 и γ^3 антисимметричны. Таким образом, имеем $k = l = 2$. Получаем $C_+ = e^{13}$, $C_- = e^{02}$, $\psi^{M+} = -\psi^T e^{13}$, $\psi^{M-} = \psi^T e^{02}$. В этом случае имеем $C_\pm^T = -C_\pm$, т.е. $\lambda_\pm = -1$.

9. ОБОБЩЕНИЕ ЗАРЯДОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ, СПИНОРЫ МАЙОРАНА И МАЙОРАНА–ВЕЙЛЯ В ФОРМАЛИЗМЕ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Теперь рассмотрим операцию (9) комплексного матричного сопряжения $\overleftarrow{U}$ от элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$. Данная операция зависит от выбора матричного представления. Не будем путать ее с операцией комплексного сопряжения от элементов алгебры Клиффорда $\overline{e^a} = e^a$.

Согласно ОТП (см. теорему 7) имеем

$$\overleftarrow{e^a} = \pm B_\pm^{-1} e^a B_\pm, \quad (27)$$

причем в случае четного n всегда существуют оба элемента $B_{\pm}$, а в случае нечетного n — только один из B_+ и B_- . Можем переписать эти формулы в виде $\overleftarrow{U} = B_+^{-1} \overline{U} B_+$ и $\overleftarrow{U} = B_-^{-1} \overline{U}^{\wedge} B_-$.

Сформулируем теоремы об элементах $B_{\pm}$. Отметим, что формулы (28) и (29) общеизвестны. Мы предлагаем также явный вид элементов $B_{\pm}$ (см. (30) и (31)).

ТЕОРЕМА 13. *Элемент B_+ существует в случаях $p - q \not\equiv 3 \pmod{4}$, элемент B_- существует в случаях $p - q \not\equiv 1 \pmod{4}$. Для этих элементов верны формулы*

$$B_{\pm}^T = \epsilon_{\pm} B_{\pm}, \quad \overleftarrow{B_{\pm}} B_{\pm} = \epsilon_{\pm} e, \quad (28)$$

где

$$\epsilon_+ = \begin{cases} +1, & p - q \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}, \\ -1, & p - q \equiv 4, 5, 6 \pmod{8}, \end{cases} \quad \epsilon_- = \begin{cases} +1, & p - q \equiv 0, 6, 7 \pmod{8}, \\ -1, & p - q \equiv 2, 3, 4 \pmod{8}. \end{cases} \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 14. *В случае матричных представлений, удовлетворяющих условиям (8), (11), имеем явный вид элементов $B_{\pm}$:*

$$B_+ = \begin{cases} \mu_1 e^{d_1 \dots d_r}, & r, s \text{ нечетны}, \\ \mu_2 e^{f_1 \dots f_s}, & r, s \text{ четны}, \\ Z_1 e^{d_1 \dots d_r} = Z_2 e^{f_1 \dots f_s}, & r \text{ нечетно}, s \text{ четно}, \end{cases} \quad (30)$$

$$B_- = \begin{cases} \mu_1 e^{f_1 \dots f_s}, & r, s \text{ нечетны}, \\ \mu_2 e^{d_1 \dots d_r}, & r, s \text{ четны}, \\ Z_1 e^{d_1 \dots d_r} = Z_2 e^{f_1 \dots f_s}, & r \text{ четно}, s \text{ нечетно}, \end{cases} \quad (31)$$

где μ_i — произвольные ненулевые комплексные константы, а Z_i — обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$.

Имеем следующие связи между элементами (в тех случаях, когда каждая тройка элементов существует):

$$B_+ = (A_+^{-1})^{\sim} C_+, \quad B_+ = (A_-^{-1})^{\sim \wedge} C_-, \quad B_- = (A_-^{-1})^{\sim} C_+, \quad B_- = (A_+^{-1})^{\sim \wedge} C_-. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 13, 14. Явные формулы для элементов $B_{\pm}$ в случае выделенных матричных представлений следуют из формул (13).

В случае четного n имеем $e^a = \pm \overleftarrow{B_{\pm}^{-1}} e^a \overleftarrow{B_{\pm}} = \overleftarrow{B_{\pm}^{-1}} B_{\pm}^{-1} e^a B_{\pm} \overleftarrow{B_{\pm}}$, т. е. $B_{\pm} \overleftarrow{B_{\pm}} = \epsilon_{\pm} e$. Значит, $\epsilon_{\pm} \in \mathbb{R}$. Поскольку $\text{Det}(B_{\pm}) = 1$, то $\epsilon_{\pm} = 1, -1$. Кроме того, $(B_{\pm})^{\dagger} B_{\pm} = e$ и $B_{\pm}^{\dagger} = (\overleftarrow{B_{\pm}})^{\dagger} = (\epsilon_{\pm} B_{\pm}^{-1})^{\dagger} = \epsilon_{\pm} B_{\pm}$.

В случае нечетного n можно получить те же формулы (28), если воспользоваться тем, что в случае выделенных матричных представлений элементы $B_{\pm}$ всегда найдутся среди элементов базиса e^A (см. формулы (30) и (31)).

Элементы $B_{\pm}$ могут быть выражены через элементы $A_{\pm}$ и $C_{\pm}$. К примеру, всегда, кроме случая четного p и нечетного q , $n \equiv 3 \pmod{4}$, из $U^{\dagger} = A_+^{-1} U^{\dagger} A_+$ и $U^T = C_+^{-1} U^{\sim} C_+$ получаем $\overleftarrow{U} = C_+^{-1} (A_+^{-1} U^{\dagger} A_+)^{\sim} C_+ = C_+^{-1} A_+^{\sim} \overline{U} (A_+^{-1})^{\sim} C_+$, а значит, $B_+ = (A_+^{-1})^{\sim} C_+$. Аналогично доказываются три другие формулы из утверждения теоремы.

Теперь получим явный вид для коэффициентов $\epsilon_{\pm}$. Проведем выкладку в случае, когда существуют A_+ и C_+ :

$$\begin{aligned}\epsilon_+ &= B_+^T B_+^{-1} = ((A_+^{-1})^{\sim} C_+)^T ((A_+^{-1})^{\sim} C_+)^{-1} = C_+^T (A_+^{-1})^{\sim T} C_+^{-1} A_+^T = \\ &= \lambda_+ C_+ C_+^{-1} A_+^{-1} C_+ C_+^{-1} A_+^{\sim} = \lambda_+ A_+^{-1} A_+^{\sim}.\end{aligned}$$

В случае, когда существуют A_- и C_- , проводим аналогичную выкладку и получаем $\epsilon_+ = \lambda_- A_-^{-1} A_-^{\sim}$. Когда существуют A_- и C_+ , получаем $\epsilon_- = \lambda_+ A_+^{-1} A_+^{\sim}$. Когда существуют A_+ и C_- , получаем $\epsilon_- = \lambda_- A_-^{-1} A_-^{\sim}$. Зная значения $\lambda_{\pm}$ (зависящие от n) и значения $A_{\pm}$ (зависящие от четности p и q), получаем из этих четырех формул (которые охватывают все возможные случаи) значения констант $\epsilon_{\pm}$ в зависимости от p и q (29).

Заметим, что несмотря на то что элементы $B_{\pm}$ зависят от матричного представления, их симметричность (28) определяется только сигнатурой пространства $p - q$ (29).

Рассмотрим две операции *зарядового сопряжения*

$$\begin{aligned}\psi^{\text{ch}+} &= B_+ \overleftarrow{\psi} = \bar{\psi} B_+, & p - q \not\equiv 3 \pmod{4}, \\ \psi^{\text{ch}-} &= B_- \overleftarrow{\psi} = \bar{\psi}^{\Lambda} B_-, & p - q \not\equiv 1 \pmod{4}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 15. *Имеем следующие эквивалентные определения зарядового сопряжения (когда существуют соответствующие элементы $C_{\pm}$ и $A_{\pm}$):*

$$\begin{aligned}\psi^{\text{ch}+} &= C_+ (\psi^{\text{D}+})^T, & \psi^{\text{ch}+} &= C_- (\psi^{\text{D}-})^T, \\ \psi^{\text{ch}-} &= C_+ (\psi^{\text{D}-})^T, & \psi^{\text{ch}-} &= C_- (\psi^{\text{D}+})^T.\end{aligned}\tag{33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая связь между элементами $A_{\pm}$, $B_{\pm}$ и $C_{\pm}$ (32), получаем

$$\psi^{\text{ch}+} = B_+ \overleftarrow{\psi} = (A_+^{-1})^{\sim} C_+ \overleftarrow{\psi} = C_+ (A_+^{-1})^T C_+^{-1} C_+ \overleftarrow{\psi} = C_+ (\psi^{\dagger} A_+^{-1})^T = C_+ (\psi^{\text{D}+})^T.$$

Аналогично можно получить остальные три формулы.

Рассмотрим в качестве примера алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$ и стандартное матричное представление с помощью гамма-матриц Дирака. Поскольку матрицы γ^0 , γ^1 и γ^3 вещественны, а матрица γ^2 чисто мнимая, то $r = 3$, $s = 1$, $\epsilon_+ = -1$, $\epsilon_- = 1$ (так как $p - q = 6 \pmod{8}$) и $B_+ = e^{013}$, $B_- = e^2$, $\psi^{\text{ch}+} = e^{013} \overleftarrow{\psi}$, $\psi^{\text{ch}-} = e^2 \overleftarrow{\psi}$.

Майорановские спиноры и *псевдомайорановские спиноры* (часто называют просто спинорами Майорана) определяются следующим образом:

$$E_M = \{\psi \in E_{\text{Dirac}} \mid \psi^{\text{ch}-} = \pm \psi\}, \quad E_{\text{psM}} = \{\psi \in E_{\text{Dirac}} \mid \psi^{\text{ch}+} = \pm \psi\}.$$

В завершение приведем общеизвестные утверждения о реализации спиноров Майорана и Майорана–Вейля в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спиноры Майорана реализуются в случае $p - q \equiv 0, 6, 7 \pmod{8}$, а псевдомайорановские спиноры – в случае $p - q \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для псевдомайорановских спиноров получаем

$$\psi = \pm B_+ \overleftarrow{\psi}, \quad \pm B_+^{-1} \psi = \overleftarrow{\psi} = \pm \overleftarrow{B}_+ \psi = \pm \epsilon_+ B_+^{-1} \psi, \quad (1 - \epsilon_+) \psi = 0, \quad \epsilon_+ = 1.$$

Аналогично для спиноров Майорана получаем $\epsilon_- = 1$. Далее пользуемся формулами (29).

Заметим, что в случае $p - q \equiv 0, 1, 2 \pmod{8}$ алгебра Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(p, q)$ изоморфна алгебре вещественных матриц, а в случае $p - q \equiv 0, 6, 7 \pmod{8}$ то же самое можно сказать про алгебру Клиффорда $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(q, p)$ (см. теорему 2).

Левые и правые спиноры Майорана–Вейля определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\text{M-W}}^{\text{L}} &= \{\psi \in E_{\text{Weyl}}^{\text{L}} \mid \psi^{\text{ch}+} = \pm \psi\}, & E_{\text{M-W}}^{\text{R}} &= \{\psi \in E_{\text{Weyl}}^{\text{R}} \mid \psi^{\text{ch}-} = \pm \psi\}, \\ E_{\text{psM-W}}^{\text{L}} &= \{\psi \in E_{\text{Weyl}}^{\text{L}} \mid \psi^{\text{ch}-} = \pm \psi\}, & E_{\text{psM-W}}^{\text{R}} &= \{\psi \in E_{\text{Weyl}}^{\text{R}} \mid \psi^{\text{ch}+} = \pm \psi\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Спиноры Майорана–Вейля реализуются в случае $p - q = 0 \pmod{8}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спиноры Вейля реализуются только в случае четного n , причем $\omega = e^{1 \dots n}$ для $p - q = 0 \pmod{4}$ и $\omega = ie^{1 \dots n}$ для $p - q = 2 \pmod{4}$ (см. раздел 5). Покажем, что при $p - q = 2 \pmod{4}$ спиноры Майорана–Вейля не реализуются. Тогда согласно предложению 1 получим только случаи $p - q = 0 \pmod{8}$. Действительно, пусть $\omega = ie^{1 \dots n}$. Тогда условие левых спиноров Вейля $ie^{1 \dots n} \psi = -\psi$ при действии операции комплексного матричного сопряжения переходит в условие правых спиноров Вейля $ie^{1 \dots n} \psi = \psi$ (действительно, имеем $B_+^{-1}(-ie^{1 \dots n})B_+ \overleftarrow{\psi} = -\overleftarrow{\psi}$ и $B_+ \overleftarrow{\psi} = \pm \psi$), и мы приходим к противоречию. Аналогичную выкладку можно провести с элементом B_- , используя $B_- \overleftarrow{\psi} = \pm \psi$.

Отметим связь результатов, полученных в настоящей работе, с другими результатами. В литературе принято уделять наибольшее внимание случаю сигнатур $(1, n - 1)$, тогда как в настоящей работе изложен формализм спиноров для произвольных сигнатур (p, q) . В работах [5], [7], [9] изучаются (только в случае сигнатур $(1, n - 1)$) свойства трех элементов, каждый из которых соответствует одному из элементов каждого вида $A_{\pm}$, $B_{\pm}$, $C_{\pm}$ настоящей статьи. В работе [8] был впервые рассмотрен случай произвольной сигнатуры (p, q) и по одному из элементов каждого вида $(A_{\pm}, B_{\pm}, C_{\pm})$. В статьях [6], [18] рассматриваются по два элемента каждого вида и доказываются основные свойства этих элементов. Явный вид элементов $A_{\pm}$, $B_{\pm}$, $C_{\pm}$, зависящий от матричного представления, дан в настоящей статье (см. теоремы 9, 11, 14).

Отметим также, что мы обсуждаем математические структуры и конструкции. Соотнесение предлагаемых в статье математических конструкций с объектами реального мира (элементарными частицами) выходит за рамки настоящего исследования. Целью настоящей работы является математическое развитие теории.

Некоторые результаты, касающиеся существования спиноров Вейля, Майорана и Майорана–Вейля для тех или иных размерностей и сигнатур пространства, применяются в теории суперсимметрии. В случае сигнатур $p - q = 0 \pmod{8}$ в качестве суперзарядов часто берут спиноры Майорана–Вейля. В случае сигнатур

$p - q = 0, 1, 2, 6, 7 \pmod{8}$ рассматривают спиноры Майорана и псевдомайорановские спиноры. В связи с рассмотрением спиноров разного типа суперсимметричное расширение алгебры Пуанкаре строится по-разному в зависимости от размерности и сигнатуры пространства (см. приведенные в работах [5]–[19] ссылки).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность И. В. Воловичу, Н. Г. Марчуку и рецензенту за полезные замечания. Работа выполнялась в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1) и при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 8215).

Список литературы

- [1] W. Pauli, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **6:2** (1936), 109–136.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, М., 1980.
- [3] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [4] M. A. Naimark, A. I. Stern, *Theory of Group Representations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **246**, Springer, Berlin, 1982.
- [5] P. C. West, “Supergravity, brane dynamics and string duality”, *Duality and Supersymmetric Theories* (Cambridge, England, April 7–18, 1997), eds. D. I. Olive, P. C. West, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 147–266, arXiv: hep-th/9811101.
- [6] Y. Tanii, *Introduction to supergravities in diverse dimensions*, arXiv: hep-th/9802138.
- [7] Дж. Шерк, “Расширенная суперсимметрия и теория расширенной супергравитации”, *Геометрические идеи в физике*, Сб. статей, ред. Ю. И. Манин, Мир, М., 1983, 203–239.
- [8] T. Kugo, P. Townsend, *Nucl. Phys. B*, **221:2** (1983), 357–380.
- [9] F. Gliozzi, J. Sherk, D. Olive, *Nucl. Phys. B*, **122:2** (1977), 253–290.
- [10] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [11] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *УФН*, **146:4** (1985), 655–681.
- [12] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **59:1** (1984), 3–27.
- [13] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **60:2** (1984), 169–198.
- [14] J. Strathdee, *Internat. J. Modern Phys. A*, **2:1** (1987), 273–300.
- [15] P. G. O. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Springer, Berlin, 1986.
- [16] П. Уэст, *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Мир, М., 1989.
- [17] А. В. Галажинский, *Введение в суперсимметрию*, Изд. Томск. политехн. ун-та, Томск, 2008.
- [18] M. Rausch de Traubenberg, “Clifford Algebras in Physics”, *Lectures of the 7th International Conference on Clifford Algebras and their Applications – ICCA-7* (Toulouse, France, May 19–29, 2005), Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse, 2005, arXiv: hep-th/0506011.
- [19] F. Quevedo, *Cambridge lectures on supersymmetry and extra dimensions*, arXiv: 1011.1491.
- [20] Д. С. Широков, *Докл. РАН*, **440:5** (2011), 607–610.
- [21] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, *Local generalized Pauli’s theorem*, arXiv: 1201.4985.
- [22] W. K. Clifford, *Amer. J. Math.*, **1:4** (1878), 350–358.
- [23] H. Grassmann, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844.
- [24] W. R. Hamilton, *Philos. Mag.*, **25** (1844), 489–495.
- [25] C. Chevalley, *Collected Works*, v. 2: *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*, Springer, Berlin, 1997.

- [26] M. Riesz, “Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste”, *C. R. Dixième Congrès Math. Scandinaves* (Gjellerups Forlag, Copenhagen, July 1946), Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 123–148; “L’équation de Dirac en relativité générale”, *Collected Papers*, eds. L. Gårding, L. Hörmander, Springer, Berlin, 1988, 814–832.
- [27] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London A*, **117**:778 (1928), 610–624.
- [28] D. Hestenes, G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [29] Н. Г. Марчук, *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда*, РХД, Ижевск, 2009.
- [30] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **286**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [31] G. Juvet, *Comment. Math. Helv.*, **2**:1 (1930), 225–235.
- [32] F. Sauter, *Z. Phys.*, **63**:11–12 (1930), 803–814; **64**:5–6 (1930), 295–303.
- [33] I. M. Benn, R. W. Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [34] П. К. Рашевский, *УМН*, **10**:2(64) (1955), 3–110.
- [35] Ю. Б. Румер, *Спинорный анализ*, ОНТИ, М.–Л., 1936.
- [36] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, **18**:2 (2008), 237–254.
- [37] D. S. Shirokov, *Concepts of trace, determinant and inverse of Clifford algebra elements*, arXiv: 1108.5447.

Поступила в редакцию 18.06.2012,
после доработки 2.11.2012