Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Круглинская, Корреляционные функции и спектральные кривые в моделях минимальной гравитации, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 1, 90–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:45:48

© 2013 г.

О. С. Круглинская*

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ В МОДЕЛЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Обсуждаются корреляторы для моделей минимальной гравитации. Предложен алгоритм для вычисления инвариантных отношений из формул вычетов, которые можно сравнивать с коэффициентами разложения статистической суммы в теории Лиувилля. Для моделей серии $(2, 2K - 1)$ явно получены коэффициенты перехода от базиса квазиклассической иерархии к базису теории Лиувилля, а также проверена непосредственным вычислением гипотеза о форме спектральной кривой.

Ключевые слова: производящие функции, теория Лиувилля, интегрируемые системы, корреляционные функции.

DOI: 10.4213/tmf8388

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что матричные модели описывают двумерную квантовую гравитацию с центральным зарядом $c \leq 1$. В общем случае для описания теории двумерной гравитации с использованием $(1/N)$ -разложения [1] необходимо учитывать струнные петли – мировые листы рода больше нуля. Мы будем рассматривать только предел $N \rightarrow \infty$, отвечающий вкладу поверхностей рода нуль.

Статистическую сумму одноматричной модели можно представить в виде интеграла по собственным значениям (см., например, обзор [2] и библиографию в нем):

$$Z = \int d\Phi e^{-(1/\hbar) \text{Tr } W(\Phi)} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N (d\phi_i e^{-(1/\hbar) W(\phi_i)}) \Delta^2(\phi). \quad (1)$$

В этом выражении Φ является матрицей размера $N \times N$, $\hbar = t_0/N$ – параметр квазиклассического разложения (величина t_0 остается фиксированной и конечной при $N \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$), а $W(\Phi)$ в общем случае определяется формулой

$$W(\Phi) = \sum_{k \geq 0} t_k \Phi^k, \quad (2)$$

где t_k – источники, а $\text{tr } \Phi^k$ – некоторый базис в пространстве операторов.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: kruglinskaya@gmail.com

В меру интегрирования в правой части выражения (1) входит определитель Вандермонда

$$\Delta(\phi) = \prod_{i < j} (\phi_i - \phi_j). \quad (3)$$

Свободная энергия $F = \ln Z$ может быть представлена через разложение в ряд по четным степеням $\hbar$, которое будет эквивалентно разложению по обратному размеру матриц:

$$F(t_0|\{t_k\}) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g-2} F_g(t_0|\{t_k\}), \quad N \rightarrow \infty, \quad \hbar \rightarrow 0, \quad (4)$$

когда $N\hbar = t_0$ фиксировано.

В случае больших N основной вклад вносит только первое слагаемое F_0 рода нуль. Следовательно, будем учитывать только корреляционные функции на сфере [3]. В дальнейшем будем называть $F_0 = \mathcal{F}_{\text{ММ}}$ препотенциалом матричной модели по аналогии с топологическими струнами и суперсимметричными калибровочными теориями.

Вообще говоря, системой Зайберга–Виттена, определяющей препотенциал $\mathcal{F}$, называется следующий набор данных [4], [5]:

- семейство $\mathcal{M}$ римановых поверхностей (комплексных кривых) $\mathcal{C}$, размерность пространства модулей которого совпадает с родом кривой $\mathcal{C}$;
- мероморфный дифференциал dS , вариации которого относительно модулей кривых голоморфны.

В переменных

$$a_i \equiv \oint_{A_i} dS \quad (5)$$

препотенциал $\mathcal{F}$ определяется из выражений

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \equiv \oint_{B_i} dS. \quad (6)$$

Интегрирование в (5) и (6) ведется по A - и B -циклам, а формула (6) определяет $\mathcal{F}$ в силу билинейных соотношений Римана.

Прямыми аналогами выражений (5), (6) являются формулы вычетов (см. [3], [6]):

$$t_k = \frac{1}{k} \text{res}_{\infty} \xi^{-k} dS, \quad k > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{ММ}}}{\partial t_k} = \text{res}_{\infty} \xi^k dS, \quad k > 0, \quad (8)$$

определяющие некоторым образом препотенциал матричной модели $F_0 = \mathcal{F}_{\text{ММ}}$, где ξ – обратная локальная координата.

Уравнение спектральной кривой $\mathcal{C}$ в случае одноматричной модели (1)

$$y^2 = W'^2(x) + 4f(x) \quad (9)$$

может быть получено из петлевого уравнения при $N \rightarrow \infty$ [7]. Оно описывает гиперэллиптическую кривую, в терминах которой может быть полностью определена свободная энергия $F_0 = \mathcal{F}_{\text{ММ}}$ при $dS = y dx$.

В уравнении (9) $y = W'(x) - 2G$, а G – производящая функция (резольвента):

$$G(x) = \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - \Phi} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - \phi_i} \right\rangle, \quad (10)$$

$f(x)$ – полином степени на 2 меньшей, чем степень $W(x)$, определенный из асимптотики $x \rightarrow \infty$.

2. МОДЕЛИ МИНИМАЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ: (p, q) -КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

Считая матричные модели дискретным аналогом двумерной гравитации, статистическую сумму последней в этой гипотезе можно получить из статистической суммы матричной модели в результате некоторого нетривиального и сингулярного преобразования [8]. Детали этого предельного перехода были изучены в работе [9], мы же приводим результаты.

Минимальные конформные теории [10], взаимодействующие с лиувиллевской гравитацией [11], называются (p, q) -моделями минимальной гравитации. Чтобы вычислить статистическую сумму (p, q) -моделей для рода нуль, используется тот же метод, что и для вычисления препотенциала матричной модели. Переменные t_k , также называемые временами, и свободную энергию $\mathcal{F}$ в неявном виде можно записать, используя формулы (7), (8), в которых теперь

$$dS = Y dX, \quad \xi = X^{1/p}. \quad (11)$$

Для любой (p, q) -точки берется пара полиномов

$$X = \lambda^p + x_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots, \quad Y = \lambda^q + y_{q-1}\lambda^{q-1} + \dots, \quad (12)$$

которые удовлетворяют уравнению плоской кривой вида

$$Y^p = X^q + \sum C_{ij} X^i Y^j. \quad (13)$$

Если зафиксировать $p = 2$, $q = 2K - 1$, то

$$Y^2 = P_{2K-1}(X). \quad (14)$$

Последнее уравнение в случае общего положения описывает риманову поверхность рода $g = K - 1$ с $2K$ точками ветвления: корни полинома $P_{2K-1}(X) = 0$ плюс $X = Y = \infty$.

Согласно гипотезе, предложенной в работе [12], уравнение кривой (14) для минимальной гравитации с точностью до коэффициента совпадает с уравнением на полиномы Чебышева. В настоящей работе это предположение конкретизировано и проверено для ряда моделей прямым вычислением.

Для сравнения с теорией Лиувилля необходимо учитывать неоднозначный выбор базиса, обусловленный тем, что времена имеют скейлинговую размерность, которая может совпадать с суммой размерностей других времен в той же модели:

$$t_k \rightarrow t_k + A t_\alpha t_\beta, \quad A = \text{const}, \quad (15)$$

$$\Delta_k = \Delta_\alpha + \Delta_\beta, \quad \alpha, \beta < k. \quad (16)$$

В этом случае имеет место резонанс [13], [14]. В формуле (16) $\Delta_k = p + q - k$ – скейлинговая размерность времени t_k , а Δ_α , Δ_β – размерности t_α и t_β соответственно.

В моделях минимальной гравитации $(2, 2K - 1)$ космологическая постоянная $\mu = t_{2K-3}$ всегда имеет размерность $\Delta_\mu = 4$. Тогда резонансы с космологической постоянной

$$t_{2K-3-4i} \rightarrow t_{2K-3-4i} + A_i \mu^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Коэффициенты A_i можно найти из условия $\partial \mathcal{F} / \partial t_i = 0$ для одноточечных функций и струнного уравнения.

Далее мы описываем схему вычислений коэффициентов перехода $\{A_i\}$ для модели $(2, 9)$. В приложении приведены вычисленные коэффициенты для случаев $K = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

3. ПРИМЕР: МОДЕЛЬ $(2, 9)$

Для полиномов (12) в этом случае

$$X = \lambda^2 + x_0, \quad Y = \lambda^9 + y_7 \lambda^7 + y_5 \lambda^5 + y_3 \lambda^3 + y_1 \lambda. \quad (18)$$

Вычисляем времена через формулы (7):

$$\begin{aligned} t_1 &= -x_0 y_1 + \frac{3}{4} x_0^2 y_3 - \frac{5}{8} x_0^3 y_5 + \frac{35}{64} x_0^4 y_7 - \frac{63}{128} x_0^5, \\ t_3 &= \frac{2}{3} y_1 - x_0 y_3 + \frac{5}{4} x_0^2 y_5 - \frac{35}{24} x_0^3 y_7 + \frac{105}{64} x_0^4, \\ t_5 &= \frac{2}{5} y_3 - x_0 y_5 + \frac{7}{4} x_0^2 y_7 - \frac{21}{8} x_0^3, \\ t_7 &= \frac{2}{7} y_5 - x_0 y_7 + \frac{9}{4} x_0^2, \quad t_9 = \frac{2}{9} y_7 - x_0 = 0, \quad t_{11} = \frac{2}{11}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решая последние пять уравнений, линейных относительно y , и подставляя решения в уравнение для t_1 , получаем струнное уравнение

$$t_1 + \frac{3}{2} x_0 t_3 + \frac{63}{128} x_0^5 + \frac{15}{8} x_0^2 t_5 + \frac{35}{16} x_0^3 t_7 = 0. \quad (20)$$

В этой модели возможен только один резонанс:

$$t_3 \rightarrow t_3 + A_3 \mu^2, \quad \mu = t_7.$$

Из условия обращения в ноль одноточечной функции $\partial \mathcal{F} / \partial t_3$ и струнного уравнения находим космологическую постоянную и константу A_3 :

$$\mu = -\frac{9}{28} x_0^2, \quad A_3 = \frac{49}{36}. \quad (21)$$

Свободную энергию $\mathcal{F}$ моделей минимальной гравитации $(2, 2K - 1)$ можно записать в виде

$$\mathcal{F}(t_i) = \mu^{K+1/2} f(\tau_j), \quad (22)$$

где f – масштабно-инвариантная функция, τ_j – безразмерные отношения времен.

В данном примере

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t_1, t_3, t_5, \mu) &= \mu^{11/2} f\left(\frac{t_1}{\mu^{5/2}}, \frac{t_3}{\mu^2}, \frac{t_5}{\mu^{3/2}}\right), & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= \mu^3 f^{(1)}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} &= \mu^{1/2} f^{(11)} = \frac{x_0}{2}, & \dots, \end{aligned}\quad (23)$$

а безразмерные отношения

$$\tau_1 = \frac{t_1}{\mu^{5/2}}, \quad \tau_2 = \frac{t_3}{\mu^2}, \quad \tau_3 = \frac{t_5}{\mu^{3/2}}. \quad (24)$$

Перепишем струнное уравнение $u = f^{(11)}$ в безразмерных терминах:

$$\tau_1 + 3u\tau_2 + \frac{63}{4}u^5 + \frac{15}{2}u^2\tau_3 + \frac{35}{2}u^3 = 0. \quad (25)$$

Разложим функцию f в ряд:

$$\begin{aligned}f &= f_0 + f_1\tau_1 + f_2\tau_2 + f_3\tau_3 + \frac{1}{2}f_{11}\tau_1^2 + \frac{1}{2}f_{22}\tau_2^2 + \frac{1}{2}f_{33}\tau_3^2 + f_{12}\tau_1\tau_2 + \\ &+ f_{23}\tau_2\tau_3 + f_{13}\tau_1\tau_3 + \frac{1}{6}f_{111}\tau_1^3 + \frac{1}{6}f_{222}\tau_2^3 + \frac{1}{6}f_{333}\tau_3^3 + \\ &+ \frac{1}{2}f_{123}\tau_1\tau_2\tau_3 + \frac{1}{2}f_{112}\tau_1^2\tau_2 + \frac{1}{2}f_{122}\tau_1\tau_2^2 + \dots. \end{aligned}$$

Аналитические члены f_1 и f_3 в этом разложении не представляют интереса, так как они не универсальны.

Из уравнения (25) можно найти старшие коэффициенты при $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$:

$$f_{111} = -\frac{4}{105f_{11}^2(3f_{11}^2 + 2)}, \quad f_{112} = -\frac{3}{63f_{11}^3 + 35f_{11}}, \quad \dots \quad (26)$$

В результате, используя (8), (23) и (26), получаем безразмерные отношения, например

$$\frac{f_{1111}f_{11}}{f_{111}^2} = -7, \quad \frac{f_{1111}f_{22}}{f_{112}^2} = -\frac{7}{3}. \quad (27)$$

Аналогично можно легко вычислить отношения для других $(2, 2K - 1)$ -моделей. Например, для модели (2, 11) с производящей функцией

$$\mathcal{F} = \mu^{13/2} \tilde{f}(\tilde{t}_1/\mu^3, \tilde{t}_3/\mu^{5/2}, \tilde{t}_5/\mu^2, \tilde{t}_7/\mu^{3/2})$$

мы имеем

$$\frac{\tilde{f}_{1111}\tilde{f}_{11}}{\tilde{f}_{111}^2} = -9, \quad \frac{\tilde{f}_{1111}\tilde{f}_{22}}{\tilde{f}_{112}^2} = -3. \quad (28)$$

Именно безразмерные отношения (27), (28) имеет смысл сравнивать с результатами вычислений в теории Лиувилля, полученными в последние годы, используя высшие уравнения Лиувилля [15].

4. УРАВНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Интересующее нас уравнение спектральной кривой можно получить, используя формулы (12), где y_i выражены через t_k с помощью (7). При этом стоит помнить, что в базисе теории Лиувилля учитываются резонансы времен t_k с космологической постоянной μ (формула (17)), после чего t_k полагаются равными нулю.

Например, запишем уравнение кривой для модели (2, 9), содержащее только μ и t_3 . Для этого выразим из первого уравнения (18) λ и подставим в выражение для Y . В свою очередь, все y_i выражаются через времена (19). Производя замену $X' = -X/x_0$, получаем

$$\begin{aligned} Y^2 &= \frac{1}{126}(X - x_0)(x_0^4 - 4Xx_0^3 - 12X^2x_0^2 + 8X^3x_0 + 16X^4)^2 = \\ &= \frac{1}{126x_0^9}(X' + 1)(2X' - 1)^2(8X'^3 - 6X' - 1)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть этого равенства выражается через полином Чебышева $T_9(a)$ после замены $a = \sqrt{(X' + 1)/2}$:

$$\begin{aligned} T_9^2 &= (256a^9 - 576a^7 + 432a^5 - 120a^3 + 9a)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(X' + 1)(2X' - 1)^2(8X'^3 - 6X' - 1)^2, \end{aligned}$$

последнее выражение с точностью до коэффициента совпадает с уравнением кривой

$$Y' = T_9(a), \quad X' = T_2(a) = 2a^2 - 1 \quad (29)$$

и соответствует гипотезе Зайберга–Шиха [12].

Аналогичным образом можно проверить гипотезу для всех $(2, 2K - 1)$ -моделей, некоторые из которых представлены в приложении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен алгоритм вычисления корреляторов – коэффициентов разложения производящих функций в моделях $(2, 2K - 1)$ в правильном базисе с точки зрения непрерывной двумерной гравитации [13]. Безразмерные отношения этих коэффициентов можно связать с результатами теории Лиувилля, вычисления в которой гораздо сложнее (см., например, работу [15]).

Также получены точные уравнения спектральных кривых в лиувиллевском базисе. Прямым вычислением проверена гипотеза, согласно которой уравнения кривых с точностью до коэффициента совпадают с уравнениями для полиномов Чебышева.

Отметим, что для общего случая (p, q) -моделей минимальной гравитации с произвольными p и q алгоритм перехода к базису Лиувилля по-прежнему неизвестен. Некоторые соображения на этот счет приведены, например, в работах [14], [16].

ПРИЛОЖЕНИЕ

$(2, 2K - 1)$	Резонансы с космологической постоянной	Струнное уравнение и уравнение кривой
$(2, 11)$	$t_1 = \frac{729}{968}\mu^3,$ $t_5 = \frac{81}{44}\mu^2,$ $\mu = -\frac{11}{36}x_0^2$	$t_1 + \frac{15}{8}x_0^2t_5 + \frac{315}{128}x_0^4t_9 + \frac{231}{512}x_0^6 + \frac{35}{16}x_0^3t_7 + \frac{3}{2}x_0t_3 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{1024}(X - x_0)(x_0^5 + 6Xx_0^4 - 12X^2x_0^3 -$ $- 32X^3x_0^2 + 16X^4x_0 + 32X^5)^2$
$(2, 13)$	$t_3 = \frac{6655}{4056}\mu^3,$ $t_7 = \frac{121}{52}\mu^2,$ $\mu = -\frac{13}{44}x_0^2$	$t_1 + \frac{3}{2}x_0t_3 + \frac{693}{256}x_0^5t_{11} + \frac{429}{1024}x_0^7 +$ $+ \frac{15}{8}x_0^2t_5 + \frac{35}{16}x_0^3t_7 + \frac{315}{128}x_0^4t_9 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{4096}(X - x_0)(32X^5x_0 - 80X^4x_0^2 - 32X^3x_0^3 +$ $+ 24X^2x_0^4 + 6Xx_0^5 + 64X^6 - x_0^6)^2$
$(2, 15)$	$t_1 = \frac{28561}{43200}\mu^4,$ $t_5 = \frac{15379}{5400}\mu^3,$ $t_9 = \frac{169}{60}\mu^2,$ $\mu = -\frac{15}{52}x_0^2$	$t_1 + \frac{6435}{16384}x_0^8 + \frac{3003}{1024}x_0^6t_{13} + \frac{693}{256}x_0^5t_{11} +$ $+ \frac{315}{128}x_0^4t_9 + \frac{3}{2}x_0t_3 + \frac{35}{16}x_0^3t_7 + \frac{15}{8}x_0^2t_5 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{16384}(X - x_0)(128X^7 - x_0^7 + 64X^6x_0 - 192X^5x_0^2 -$ $- 80X^4x_0^3 + 80X^3x_0^4 + 24X^2x_0^5 - 8Xx_0^6)^2$
$(2, 17)$	$t_3 = \frac{590625}{314432}\mu^4,$ $t_7 = \frac{10125}{2312}\mu^3,$ $t_{11} = \frac{225}{68}\mu^2,$ $\mu = -\frac{17}{60}x_0^2$	$t_1 + \frac{6435}{2048}x_0^7t_{15} + \frac{3003}{1024}x_0^6t_{13} + \frac{693}{256}x_0^5t_{11} + \frac{315}{128}x_0^4t_9 +$ $+ \frac{35}{16}x_0^3t_7 + \frac{15}{8}x_0^2t_5 + \frac{3}{2}x_0t_3 + \frac{12155}{32768}x_0^9 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{65536}(X - x_0)(256X^8 + x_0^8 + 128X^7x_0 - 448X^6x_0^2 -$ $- 192X^5x_0^3 + 240X^4x_0^4 + 80X^3x_0^5 - 40X^2x_0^6 - 8Xx_0^7)^2$
$(2, 19)$	$t_1 = \frac{9938999}{16681088}\mu^5,$ $t_5 = \frac{1753941}{438976}\mu^4,$ $t_9 = \frac{54043}{8664}\mu^3,$ $t_{13} = \frac{289}{76}\mu^2,$ $\mu = -\frac{19}{68}x_0^2$	$t_1 + \frac{46189}{131072}x_0^{10} + \frac{693}{256}x_0^5t_{11} + \frac{109395}{32768}x_0^8t_{17} + \frac{6435}{2048}x_0^7t_{15} +$ $+ \frac{3003}{1024}x_0^6t_{13} + \frac{15}{8}x_0^2t_5 + \frac{3}{2}x_0t_3 + \frac{315}{128}x_0^4t_9 + \frac{35}{16}x_0^3t_7 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{262144}(X - x_0)(256X^8x_0 - 1024X^7x_0^2 - 448X^6x_0^3 +$ $+ 672X^5x_0^4 + 240X^4x_0^5 - 160X^3x_0^6 -$ $- 40X^2x_0^7 + 10Xx_0^8 + 512X^9 + x_0^9)^2$

(2, 21)	$t_3 = \frac{2476099}{1185408} \mu^5,$ $t_7 = \frac{1433531}{197568} \mu^4,$ $t_{11} = \frac{89167}{10584} \mu^3,$ $t_{15} = \frac{361}{84} \mu^2,$ $\mu = -\frac{21}{76} x_0^2$	$t_1 + \frac{88179}{262144} x_0^{11} + \frac{109395}{32768} x_0^8 t_{17} + \frac{230945}{65536} x_0^9 t_{19} +$ $+ \frac{35}{16} x_0^3 t_7 + \frac{315}{128} x_0^4 t_9 + \frac{6435}{2048} x_0^7 t_{15} +$ $+ \frac{693}{256} x_0^5 t_{11} + \frac{3003}{1024} x_0^6 t_{13} + \frac{15}{8} x_0^2 t_5 + \frac{3}{2} x_0 t_3 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{1048576} (X - x_0) (512 X^9 x_0 - 2304 X^8 x_0^2 -$ $- 1024 X^7 x_0^3 + 1792 X^6 x_0^4 + 672 X^5 x_0^5 - 560 X^4 x_0^6 -$ $- 160 X^3 x_0^7 + 60 X^2 x_0^8 + 10 X x_0^9 + 1024 X^{10} - x_0^{10})^2$
(2, 23)	$t_1 = \frac{1801088541}{3295407616} \mu^6,$ $t_5 = \frac{943427331}{179098240} \mu^5,$ $t_9 = \frac{9270261}{778688} \mu^4,$ $t_{13} = \frac{46305}{4232} \mu^3,$ $t_{17} = \frac{441}{92} \mu^2,$ $\mu = -\frac{23}{84} x_0^2$	$t_1 + \frac{676039}{2097152} x_0^{12} + \frac{3003}{1024} x_0^6 t_{13} + \frac{6435}{2048} x_0^7 t_{15} +$ $+ \frac{230945}{65536} x_0^9 t_{19} + \frac{969969}{262144} x_0^{10} t_{21} + \frac{109395}{32768} x_0^8 t_{17} +$ $+ \frac{693}{256} x_0^5 t_{11} + \frac{315}{128} x_0^4 t_9 + \frac{35}{16} x_0^3 t_7 + \frac{15}{8} x_0^2 t_5 + \frac{3}{2} x_0 t_3 = 0,$ $Y^2 = \frac{1}{4194304} (X - x_0) (-x_0^{11} + 2048 X^{11} + 1024 x_0 X^{10} -$ $- 5120 x_0^2 X^9 - 2304 x_0^3 X^8 + 4608 x_0^4 X^7 + 1792 x_0^5 X^6 -$ $- 1792 x_0^6 X^5 - 560 x_0^7 X^4 + 280 x_0^8 X^3 + 60 x_0^9 X^2 -$ $- 12 x_0^{10} X)^2$

Благодарности. Автор выражает благодарность А. В. Маршакову за полезные обсуждения и А. С. Анохиной за ценные замечания. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ (соглашение 8498).

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **72**:3 (1974), 461–473.
- [2] А. В. Маршаков, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 163–228.
- [3] I. M. Krichever, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475, arXiv: hep-th/9205110.
- [4] A. Gorsky, I. M. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474, arXiv: hep-th/9505035.
- [5] A. Marshakov, *Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems*, World Scientific, Singapore, 1999; “Seiberg–Witten curves and integrable systems”, *Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations*, eds. H. W. Braden, I. M. Krichever, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000, 69–91.
- [6] С. М. Харчев, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 280–292, arXiv: hep-th/9208046.
- [7] A. A. Migdal, *Phys. Rep.*, **102**:4 (1983), 199–290.
- [8] V. A. Kazakov, *Modern Phys. Lett. A*, **4**:22 (1989), 2125–2139; E. Brézin, V. A. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **236**:2 (1990), 144–150; M. R. Douglas, S. H. Shenker, *Nucl. Phys. B*, **335**:3 (1990), 635–654; D. Gross, A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2 (1990), 127–130.
- [9] Yu. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356**:3 (1991), 574–628.
- [10] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.

- [11] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [12] N. Seiberg, D. Shih, *JHEP*, **02** (2004), 021, 61 pp., arXiv: hep-th/0312170; *C. R. Physique*, **6**:2 (2005), 165–174, arXiv: hep-th/0409306.
- [13] A. A. Belavin, A. B. Zamolodchikov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304004, 18 pp., arXiv: 0811.0450.
- [14] G. Moore, N. Seiberg, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **362**:3 (1991), 665–709.
- [15] A. Zamolodchikov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:supp02 (2004), 510–523, arXiv: hep-th/0312279.
- [16] A. Marshakov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304021, 16 pp.