Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, Об экстремальных бозонных линейных каналах, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 331–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 03:17:43

© 2013 г.

А. С. Холево*

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ БОЗОННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

Множество всех каналов с данными входом и выходом является выпуклым. Сначала дается удобная формулировка необходимого и достаточного условия того, что канал является экстремальной точкой этого множества, в терминах комплементарного канала, – понятия, имеющего важное значение в квантовой теории информации. Эта формулировка основана на общем подходе к экстремальности вполне положительных отображений операторных алгебр в духе Арвесаона. Затем эта формулировка применяется для доказательства главного результата: при определенных условиях невырожденности чистота состояния окружения является необходимым и достаточным условием экстремальности бозонного линейного (квазисвободного) канала. Отсюда следует, что гауссовский канал между конечно-модовыми бозонными системами экстремален тогда и только тогда, когда он обладает минимальным уровнем шума.

Ключевые слова: квантовая теория информации, бозонный линейный канал, гауссовский канал, экстремальный канал, минимальный шум.

DOI: 10.4213/tmf8389

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории информации (КТИ) центральную роль играет понятие канала, которое описывает, вообще говоря, необратимую “зашумленную” эволюцию состояний системы, несущих квантовую информацию. Важной проблемой является характеристика уровня шума и возмущений, вносимых данным каналом. В настоящей работе дается решение этой проблемы для практически значимого класса бозонных линейных каналов, описывающих квантово-оптические системы обработки информации (см. например, работу [1]). Подробное объяснение понятий и фактов КТИ можно найти в монографии [2].

Далее $\mathcal{H}$ (возможно, с индексами) обозначает сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ – банахово пространство ядерных операторов и $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{I}(\mathcal{H})^*$ – алгебру всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Пусть A, B – две квантовые системы с гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$, которые называются входной и выходной системами. В настоящей работе *каналом* называется нормальное унитарное

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: holevo@mi.ras.ru

(сохраняющее единицу) вполне положительное отображение $\Phi: \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$. Существует единственное отображение $\Phi_*: \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ такое, что $\Phi = (\Phi_*)^*$, которое отображает операторы плотности (состояния) из $\mathcal{H}_A$ в операторы плотности (состояния) из $\mathcal{H}_B$. В физических терминах мы работаем в картине Гейзенберга, тогда как Φ_* является каналом в картине Шредингера.

Множество всех каналов со входом A и выходом B является выпуклым. Сначала мы даем удобную формулировку необходимого и достаточного условия того, что канал является экстремальной точкой этого множества, в терминах комплементарного канала – понятия, имеющего важное значение в КТИ [3]–[5]. Эта формулировка основана на общем подходе к экстремальности вполне положительных отображений C^* -алгебры в духе Арвесона [6] (см. также приложение). Затем мы применяем эту формулировку, чтобы доказать главный результат настоящей работы: при определенных условиях невырожденности чистота состояния окружения является необходимым и достаточным условием экстремальности бозонного линейного (квазисвободного) канала. Отсюда следует, что гауссовский канал между конечно-модовыми бозонными системами экстремален тогда и только тогда, когда он обладает минимальным уровнем шума. Для одномодовых каналов такая гипотеза была высказана в работе [7] на основе рассмотрения конечномерного критерия Чоя [8]. Поиск доказательства этого утверждения послужил начальной мотивировкой настоящей работы.

2. ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ В ТЕРМИНАХ КОМПЛЕМЕНТАРНЫХ КАНАЛОВ

Пусть даны три системы A, B, E с пространствами $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_E$ и изометрический оператор $V: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$; тогда соотношения

$$\Phi[X] = V^*(X \otimes I_E)V, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B), \quad (1)$$

$$\tilde{\Phi}[Y] = V^*(I_B \otimes Y)V, \quad Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_E), \quad (2)$$

определяют два канала $\Phi: \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ и $\tilde{\Phi}: \mathfrak{B}(\mathcal{H}_E) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, которые называются взаимно *комплементарными*.

Теорема Стайнспринга о расширении утверждает, что для данного канала Φ представление (1) и, следовательно, комплементарный канал $\tilde{\Phi}$, задаваемый выражением (2), всегда существуют. Представление (1) называется *минимальным*, если подпространство

$$\mathcal{M} = \{(X \otimes I_E)V\psi: \psi \in \mathcal{H}_A, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)\} \subset \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$$

плотно в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$. Пусть

$$\Phi[X] = V'^*(X \otimes I_{E'})V', \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B), \quad (3)$$

– другое представление для Φ , тогда найдется изометрический оператор W из $\mathcal{H}_E$ в $\mathcal{H}_{E'}$ такой, что

$$(I_B \otimes W)V = V', \quad (4)$$

при этом новый комплементарный канал имеет вид $\tilde{\Phi}'[Y'] = \tilde{\Phi}[W^*Y'W]$. В частности, если представление (3) также минимально, то оператор W отображает $\mathcal{H}_E$

на $\mathcal{H}_{E'}$, так что минимальное представление и соответствующий комплементарный канал единственны с точностью до унитарной эквивалентности. В этом случае комплементарный канал также называется минимальным.

Пусть Y – оператор в $\mathcal{H}_E$ такой, что $0 \leq Y \leq I_E$, тогда соотношение

$$\Phi_Y[X] = V^*(X \otimes Y)V, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B),$$

очевидно определяет вполне положительное отображение, удовлетворяющее соотношению $\Phi_Y \leq \Phi$. Из операторно-алгебраической версии теоремы Радона–Никодима, полученной Арвесоном (см. работу [6], теорема 1.4.2), следует: в предположении, что представление (1) минимально, это соотношение устанавливает взаимно однозначное аффинное соответствие между порядковыми интервалами $[0, I_E]$ и $[0, \Phi]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Канал Φ экстремален тогда и только тогда, когда найдется комплементарный канал $\tilde{\Phi}'$ такой, что $\text{Ker } \tilde{\Phi}' = 0$, или, что равносильно, $\overline{\text{Ran } \tilde{\Phi}'_*} = \mathfrak{I}(\mathcal{H}_E)$. Любой такой комплементарный канал минимален.*

Это следует из представленной в работе [6] теоремы 1.4.6 (см. приложение), но для полноты мы дадим здесь доказательство. Предположим, что $\text{Ker } \tilde{\Phi}' = 0$, и пусть $\tilde{\Phi}$ – комплементарный канал в минимальном представлении (1) для Φ , так что $\tilde{\Phi}'[Y'] = \tilde{\Phi}[W^*Y'W]$, где $W^*W = I_{E'}$. Тогда $\tilde{\Phi}'[I_{E'} - WW^*] = \tilde{\Phi}[W^*(I_{E'} - WW^*)W] = 0$, поэтому $I_{E'} - WW^* = 0$, так что W – унитарный оператор на $\mathcal{H}_{E'}$. Поэтому мы можем предположить, что $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}$ и $\text{Ker } \tilde{\Phi} = 0$. Пусть $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$, где Φ_j – каналы. Тогда по теореме Арвесона $\Phi_j = \Phi_{Y_j}$, $j = 1, 2$, где $0 \leq Y_j \leq 2I_E$. Поскольку Φ_j унитарны, $V^*(I_B \otimes Y_j)V = V^*(I_B \otimes I_E)V$, откуда $V^*(I_B \otimes (I_E - Y_j))V = 0$. Но это означает, что $\tilde{\Phi}[I_E - Y_j] = 0$, поэтому $I_E - Y_j = 0$. Таким образом, $\Phi_j = \Phi$, так что Φ – экстремальный канал.

Обратно, пусть Φ – экстремальный канал. Покажем, что $\text{Ker } \tilde{\Phi} = 0$ для минимального комплементарного канала. Пусть $\tilde{\Phi}[Y] = 0$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $Y = Y^*$ и $\|Y\| \leq 1$. Положим $\Phi_{\pm}[X] = V^*(X \otimes (I_B \pm Y))V$ для минимального представления (1) канала Φ . Тогда $\Phi_{\pm}$ – нормальные вполне положительные отображения по теореме Арвесона и $\Phi_{\pm}[I_B] = I_A$ по предположению. Поскольку канал Φ экстремален, $\Phi = \Phi_{\pm}$, откуда $V^*(X \otimes Y)V = 0$ для всех X, Y . Отсюда следует, что $\langle \psi_2 | V^*(X_2^* \otimes I_E)(I_B \otimes Y)(X_1 \otimes I_E)V | \psi_1 \rangle \equiv 0$, поэтому билинейная форма оператора $I_B \otimes Y$ обращается в нуль на $\mathcal{M}$, так что $Y = 0$ в силу минимальности представления.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выбирая ортонормированный базис $\{e_j\}$ в $\mathcal{H}_E$, введем операторы $V_j: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B$, определенные соотношением $V_j = \langle e_j | V$, т. е.

$$\langle \phi | V_j \psi \rangle = \langle \phi \otimes e_j | V \psi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{H}_B, \quad \psi \in \mathcal{H}_A, \quad (5)$$

и пусть $y_{jk} = \langle e_j | Y e_k \rangle$ – матрица оператора Y . Тогда полученный выше результат сводится к следующему: канал Φ экстремален тогда и только тогда, когда он допускает представление

$$\Phi[X] = \sum_k V_k^* X V_k, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B), \quad (6)$$

где система операторов $\{V_j^* V_k\}$ сильно независима в том смысле, что равенство $\sum_{jk} y_{jk} V_j^* V_k = 0$ (где ряд сходится в сильной операторной топологии) для матрицы $[y_{jk}]$ некоторого ограниченного оператора влечет $y_{jk} \equiv 0$. Этот результат, содержащийся в работе [9], обобщает критерий Чоя для конечномерного случая [8]. Однако для наших целей формулировка в терминах комплементарного канала оказывается более удобной.

3. ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ БОЗОННЫХ ЛИНЕЙНЫХ КАНАЛОВ

В дальнейшем мы рассматриваем бозонную систему с s модами, которая описывается неприводимой системой Вейля–Сигала

$$W(z) = e^{i(Rz)}, \quad (7)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где

$$Rz = \sum_{j=1}^s (x_j q_j + y_j p_j), \quad (8)$$

так что $R = [q_1, p_1, \dots, q_s, p_s]$ – вектор-строка *канонических наблюдаемых*, а $z = [x_1, y_1, \dots, x_s, y_s]^T$ – вектор-столбец вещественных параметров. Используемые определения и результаты можно найти в работах [10]–[13].

Вещественное векторное пространство Z , снабженное невырожденной антисимметричной билинейной формой Δ , называется симплектическим пространством. Особый интерес представляет стандартное симплектическое пространство $Z = \mathbb{R}^{2s}$, снабженное формой $z^T \Delta z'$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

– матрица коммутаторов канонических наблюдаемых, $[Rz, Rz'] = -iz^T \Delta z' I$.

Некоммутативное преобразование Фурье ядерного оператора τ в $\mathcal{H}$ определяется как

$$\phi_\tau(z) = \text{Tr}(\tau W(z)).$$

Комплексная функция $\phi_\tau(z)$ ограничена и непрерывна на Z . Если ρ – оператор плотности (состояние), то ϕ_ρ называется его характеристической функцией. Тогда $\phi_\rho(0) = 1$. Оператор τ положителен, если и только если функция $\phi_\tau(z)$ является Δ -неотрицательно-определенной: всевозможные матрицы с элементами

$$\phi_\tau(z_r - z_s) e^{iz_r^T \Delta z_s / 2}, \quad (10)$$

где $z_1, \dots, z_n$ – произвольное конечное подмножество Z , неотрицательно-определены.

Пусть $(Z_A, \Delta_A), (Z_B, \Delta_B)$ – симплектические пространства размерностей $2s_A, 2s_B$, которые описывают вход и выход канала (здесь Δ_A, Δ_B имеют канонический

вид (9)), и пусть $W_A(z_A)$, $W_B(z_B)$ – операторы Вейля в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ соответствующих бозонных систем. Канал Φ , преобразующий операторы Вейля согласно правилу

$$\Phi[W_B(z_B)] = W(Kz_B)f(z_B), \quad (11)$$

где K – линейное отображение между входным и выходным симплектическими пространствами, а f – комплексная непрерывная функция такая, что $f(0) = 1$, называется *бозонным линейным* [14] или квазисвободным [11]. Определим вещественную кососимметричную $(2s_B \times 2s_B)$ -матрицу

$$\Delta_K = \Delta_B - K^\top \Delta_A K.$$

Отображение (11) вполне положительно тогда и только тогда, когда f является Δ_K -неотрицательно-определенной: всевозможные матрицы с элементами

$$f(z_r - z_s)e^{iz_r^\top \Delta_K z_s/2}, \quad (12)$$

где $z_1, \dots, z_n$ – произвольное конечное подмножество Z , неотрицательно-определенны [11], [15].

Далее мы предположим, что *вещественная кососимметричная* $(2s_B \times 2s_B)$ -матрица $\Delta_K = \Delta_B - K^\top \Delta_A K$ невырождена, т. е.

$$\det \Delta_K \neq 0. \quad (13)$$

При этом условии существует вещественная невырожденная $(2s_B \times 2s_B)$ -матрица K_D такая, что

$$K_D^\top \Delta_D K_D = \Delta_K, \quad (14)$$

где $\Delta_D = \Delta_B$. Это есть просто каноническая форма невырожденной кососимметричной матрицы Δ_K . Сравнивая выражение (12) с (10), находим, что существует состояние ρ_D бозонной системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_D$, отвечающей стандартному симплектическому пространству $(Z_D, \Delta_D) \simeq (Z_B, \Delta_B)$, такое, что

$$f(z_B) = \text{Tr}(\rho_D W_D(K_D z_B)) = \phi_{\rho_D}(K_D z_B), \quad (15)$$

т. е.

$$\Phi[W_B(z_B)] = W(Kz_B)\phi_{\rho_D}(K_D z_B). \quad (16)$$

Из соотношения (14) следует

$$\Delta_B = K^\top \Delta_A K + K_D^\top \Delta_D K_D. \quad (17)$$

Мы будем использовать унитарное расширение канала Φ из работы [12]. Рассмотрим составную бозонную систему $AD = BE$ с гильбертовым пространством $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_D \simeq \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, отвечающую симплектическому пространству $Z = Z_A \oplus Z_D = Z_B \oplus Z_E$, где $(Z_E, \Delta_E) \simeq (Z_A, \Delta_A)$. Таким образом, $[R_A R_D] = [R_B R_E]$ описывают различные разбиения набора канонических наблюдаемых составной системы. Канал Φ задается линейным соотношением вход-выход (сохраняющим коммутаторы, как это следует из формулы (17))

$$R'_B = R_A K + R_D K_D, \quad (18)$$

где система D находится в состоянии ρ_D (для упрощения обозначений мы пишем $R_A, \dots$ вместо $R_A \otimes I_D, \dots$). Показано, что сохраняющее коммутаторы соотношение (18) может быть дополнено до линейного канонического преобразования, если положить

$$R'_E = R_A L + R_D L_D, \quad (19)$$

где $(2s_A \times 2s_A)$ -матрица L и $(2s_B \times 2s_A)$ -матрица L_D таковы, что $(2(s_A + s_B) \times 2(s_A + s_B))$ -матрица

$$T = \begin{bmatrix} K & L \\ K_D & L_D \end{bmatrix} \quad (20)$$

симплектична, т. е. удовлетворяет соотношению

$$T^\top \begin{bmatrix} \Delta_A & 0 \\ 0 & \Delta_D \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \Delta_B & 0 \\ 0 & \Delta_E \end{bmatrix},$$

и $\Delta_E = \Delta_A$.

ЛЕММА 1. При выполнении условия (13) имеет место $\det L \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того факта, что T симплектична, следует в дополнение к (17), что

$$\begin{aligned} 0 &= K^\top \Delta_A L + K_D^\top \Delta_D L_D, \\ \Delta_E &= L^\top \Delta_A L + L_D^\top \Delta_D L_D. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\det K_D \neq 0$, из первого уравнения получаем

$$L_D = -(K_D^\top \Delta_D)^{-1} K^\top \Delta_A L.$$

Подстановка во второе уравнение дает $\Delta_D = L^\top M L$, где

$$M = \Delta_A + \Delta_A K (\Delta_D K_D)^{-1} \Delta_D (K_D^\top \Delta_D)^{-1} K^\top \Delta_A.$$

Поэтому $(\det L)^2 \det M = 1$, откуда $\det L \neq 0$. Лемма доказана.

Обозначим через U_T унитарный оператор в $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_D \simeq \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, реализующий симплектическое преобразование T так, что

$$[R'_B R'_E] = U_T^* [R_B R_E] U_T = [R_A R_D] T. \quad (21)$$

Тогда мы имеем унитарное расширение

$$\Phi[W_B(z_B)] = \text{Tr}_D[(I_A \otimes \rho_D) U_T^* (W_B(z_B) \otimes I_E) U_T]. \quad (22)$$

Слабо комплементарный канал [12] дается соотношением

$$\tilde{\Phi}^w[W_E(z_E)] = \text{Tr}_D[(I_A \otimes \rho_D) U_T^* (I_B \otimes W_E(z_E)) U_T].$$

Уравнение (19) есть не что иное, как соотношение вход–выход для слабо комплементарного канала, который, таким образом, действует согласно формуле

$$\tilde{\Phi}^w[W_E(z_E)] = W_A(Lz_E) \phi_{\rho_D}(L_D z_E). \quad (23)$$

В случае чистого состояния $\rho_D = |\psi_D\rangle\langle\psi_D|$ соотношение (22) сводится к представлению Стайнспринга (1) для канала Φ с изометрией $V = U_T|\psi_D\rangle$, а соотношение (22) сводится к представлению (2), откуда следует $\tilde{\Phi}^w = \tilde{\Phi}$.

Очевидно, что если канал Φ , задаваемый соотношением (16), экстремален, то ρ_D – чистое состояние (иначе спектральное разложение ρ_D давало бы представление Φ в виде нетривиальной выпуклой комбинации). В обратном направлении мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что ρ_D – чистое состояние, характеристическая функция ϕ_{ρ_D} которого не обращается в нуль и L^2 -дифференцируема до порядка $2s_D$. Тогда канал Φ , задаваемый соотношением (16), экстремален.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вероятно, аналогичный результат должен иметь место для бозонных линейных каналов на алгебре канонических коммутационных соотношений (ККС) без предположения (13). В работе [11] было показано, что чистота состояния ρ_D в ситуации, когда K – симплектическое преобразование или проектор (так что $\det \Delta_K = 0$), достаточна для экстремальности квазисвободного отображения на алгебре ККС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что комплементарный канал $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет условию $\overline{\text{Ran } \tilde{\Phi}_*} = \mathfrak{T}(\mathcal{H}_E)$ предложения 1.

ЛЕММА 2. *Пусть $\Psi_{K,f}$ – бозонный линейный канал с одним и тем же входным и выходным пространством $\mathcal{H}$:*

$$\Psi_{K,f}[W(z)] = W(Kz)f(z),$$

где K – невырожденная квадратная матрица. Тогда ограничение $\Psi_{K,f}$ на $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ совпадает с $|\det K|^{-1}(\Psi_{\hat{K},\hat{f}})_*$, где $\hat{K} = K^{-1}$, $\hat{f}(z) = f(-K^{-1}z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой обращения для некоммутативного преобразования Фурье [10]: если τ – ядерный оператор и $\phi_\tau(z) = \text{Tr}(\tau W(z))$, то

$$\tau = \frac{1}{(2\pi)^s} \int \phi_\tau(z) W(-z) d^{2s}z.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_{K,f}[\tau] &= \frac{1}{(2\pi)^s} \int \phi_\tau(z) W(-Kz) f(-z) d^{2s}z = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^s |\det K|} \int \phi_\tau(K^{-1}z) W(-z) f(-K^{-1}z) d^{2s}z = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^s |\det K|} \int \phi_\tau(\hat{K}z) W(-z) \hat{f}(z) d^{2s}z. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\Psi_{K,f}[\tau]W(z)] &= |\det K|^{-1} \phi_\tau(\hat{K}z) \hat{f}(z) = \\ &= |\det K|^{-1} \text{Tr}[\tau W(\hat{K}z) \hat{f}(z)] = \\ &= |\det K|^{-1} \text{Tr}[\tau \Psi_{\hat{K},\hat{f}}(W(z))], \end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 3. В условиях леммы 2 $\overline{\text{Ran } \tilde{\Phi}_*} = \mathfrak{I}(\mathcal{H}_E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 $\det L \neq 0$, поэтому комплементарный канал $\tilde{\Phi}$, задаваемый формулой (23), удовлетворяет условию леммы 2.

Из леммы 2 следует, что с точностью до положительного множителя $\tilde{\Phi}_*$ сам является бозонным линейным каналом, удовлетворяющим условиям леммы 2. Достаточно доказать, что произвольный положительный ядерный оператор τ в $\mathcal{H}_E$ может быть аппроксимирован по ядерной норме операторами вида $\tilde{\Phi}_*[\tau_n]$, $\tau_n \in \mathfrak{I}(\mathcal{H}_A)$. Согласно тождеству Парсеваля для некоммутативного преобразования Фурье функция $\phi_{\sqrt{\tau}}(z)$ квадратично-интегрируема. Обозначим через $\mathcal{C}$ класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Пусть $\{\phi_n(z)\} \subset \mathcal{C}$ – последовательность, сходящаяся к $\phi_{\sqrt{\tau}}(z)$ в $L^2(Z)$. Рассмотрим операторы

$$\sigma_n = \frac{1}{(2\pi)^s} \int \phi_n(z) W(-z) d^{2s}z.$$

Мы можем предположить, что $\phi_n(-z) = \overline{\phi_n(-z)}$, так что оператор σ_n эрмитов. Согласно тождеству Парсеваля для некоммутативного преобразования Фурье нормы Гильберта–Шмидта $\|\sqrt{\tau} - \sigma_n\|_2 \rightarrow 0$. Используя неравенство $\|AB\|_1 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$, мы заключаем, что $\|\tau - \sigma_n^2\|_1 \rightarrow 0$. Функция $\varphi_n(z) = \text{Tr}(\sigma_n^2 W(z))$ является сверткой “со скручиванием” двух функций $\phi_n(z)$ и поэтому также принадлежит $\mathcal{C}$. Производя замену переменных и учитывая лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{1}{(2\pi)^s} \int \varphi_n(z) W(-z) d^{2s}z = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^s |\det L|} \int \varphi_n(L^{-1}z) W(-L^{-1}z) d^{2s}z = \tilde{\Phi}_*[\tau_n], \end{aligned}$$

где

$$\tau_n = \frac{1}{(2\pi)^s} \int \frac{\varphi_n(L^{-1}z)}{f(L^{-1}z)} W(-z) d^{2s}z$$

и функция $f(z)$ дается соотношением (15), так что она не обращается в нуль и является L^2 -дифференцируемой вплоть до порядка $2s$ по условиям теоремы. Поэтому функция $\varphi_n(L^{-1}z)/f(L^{-1}z)$ определена, имеет компактный носитель и также L^2 -дифференцируема до порядка $2s$. Остается доказать, что τ_n – ядерный оператор.

ЛЕММА 4. Если ϕ_τ имеет компактный носитель и L^2 -дифференцируема до порядка $2s$, то $\tau \in \mathfrak{I}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу, полученную в монографии [10] (лемма V.4.2):

$$\phi_{\tau(Rw)}(z) = \left[-\frac{1}{2} z^\top \Delta w - \nabla_w \right] \phi_\tau(z), \quad w, z \in Z,$$

видим, что функция $\phi_{\tau(Rw)^{2s}}$ квадратично-интегрируема. Отсюда следует, что $\tau(Rw)^{2s}$ продолжается до оператора Гильберта–Шмидта, как и оператор $\sigma = \tau(2N_1 + 1) \cdots (2N_s + 1)$, где $2N_j + 1 = (Re_j)^2 + (Rh_j)^2 = q_j^2 + p_j^2$ для некоторого симплектического базиса $\{e_j, h_j\}_{j=1, \dots, s}$ в Z . Здесь N_j – оператор числа квантов для j -й моды, который является самосопряженным с собственными значениями

$n_j = 0, 1, \dots$, причем операторы $N_1, \dots, N_s$ коммутируют. Следовательно, $\sigma^* \sigma$ является положительным ядерным оператором. Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{Tr}(\sigma^* \sigma) = \sum_{n_1, \dots, n_s} (2n_1 + 1)^2 \dots (2n_s + 1)^2 \langle n_1, \dots, n_s | \tau^* \tau | n_1, \dots, n_s \rangle < \infty,$$

где $\{|n_1, \dots, n_s\rangle\}$ – общий ортонормированный базис собственных векторов операторов $N_1, \dots, N_s$. Используя неравенство Коши–Буняковского, а также неравенство $\langle \psi | |\tau| | \psi \rangle^2 \leq \langle \psi | \tau^* \tau | \psi \rangle$ для единичного вектора ψ , имеем

$$\begin{aligned} (\mathrm{Tr} |\tau|)^2 &= \left(\sum_{n_1, \dots, n_s} \langle n_1, \dots, n_s | |\tau| | n_1, \dots, n_s \rangle \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{n_1, \dots, n_s} (2n_1 + 1)^2 \dots (2n_s + 1)^2 \langle n_1, \dots, n_s | \tau^* \tau | n_1, \dots, n_s \rangle \times \\ &\quad \times \sum_{n_1, \dots, n_s} (2n_1 + 1)^{-2} \dots (2n_s + 1)^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 4, а значит, и лемма 3, доказаны. Используя предложение 1, получаем утверждение теоремы.

4. СЛУЧАЙ ГАУССОВСКИХ КАНАЛОВ

Оператор плотности (состояние) ρ называется *гауссовским*, если его характеристическая функция $\phi_\rho(z) = \mathrm{Tr}(\rho W(z))$ имеет вид

$$\phi_\rho(z) = e^{i l^\top z - z^\top \alpha z / 2}, \quad (24)$$

где α – вещественная симметричная $(2s \times 2s)$ -матрица, называемая ковариационной (или корреляционной). Необходимое и достаточное условие для того, чтобы α была ковариационной матрицей, дается неравенством

$$\alpha \geq \frac{i}{2} \Delta, \quad (25)$$

где обе части неравенства рассматриваются как комплексные эрмитовы матрицы. Это равносильно Δ -неотрицательной определенности функции $\phi_\rho(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гауссовское состояние ρ является чистым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих равносильных условий:*

- 1) α является минимальным (в смысле частичного упорядочения вещественных симметричных матриц) решением неравенства (25);
- 2) симплектические собственные значения матрицы α все равны минимально возможному значению $1/2$;
- 3) $\mathrm{Rank}(\alpha - (i/2)\Delta) = s$;
- 4) $\alpha + \Delta \alpha^{-1} \Delta / 4 = 0$;
- 5) $\alpha = -\Delta J / 2$, где J – оператор комплексной структуры в (Z, Δ) .

Это предложение объединяет разрозненные результаты, доказательство которых в существенном основано на канонической форме Виллиамсона матрицы α [10], [13], [16].

Бозонный гауссовский канал $\Phi = \Phi_{K,l,\mu}$ – это бозонный линейный канал с гауссовской функцией $f(z)$, а именно

$$\Phi_{K,l,\mu}[W_B(z_B)] = W(Kz_B)e^{il^\top z_B - z_B^\top \mu z_B/2}. \quad (26)$$

Здесь K – вещественная $(2s_A \times 2s_B)$ -матрица, а μ – вещественная симметричная $(2s_B \times 2s_B)$ -матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\mu \geq \frac{i}{2}[\Delta_B - K^\top \Delta_A K], \quad (27)$$

которое является необходимым и достаточным условием для полной положительности. Канал (26) имеет минимальный шум, если μ является минимальным решением этого неравенства [12], [16].

Предполагая, что выполняется условие (13) и K_D является решением уравнения (14), получаем, что $\alpha_D = (K_D^\top)^{-1} \mu (K_D)^{-1}$ – вещественная симметричная $(2s_B \times 2s_B)$ -матрица такая, что $\alpha_D \geq (i/2)\Delta_D$. Далее, из минимальности μ следует, что α_D есть минимальное решение неравенства $\alpha_D \geq (i/2)\Delta_D$ и поэтому является ковариационной матрицей чистого центрированного ($l = 0$) гауссовского состояния $\rho_D = |\psi_D\rangle\langle\psi_D|$ бозонной системы в пространстве $\mathcal{H}_D$, отвечающей стандартному симплектическому пространству $(Z_D, \Delta_D) \simeq (Z_B, \Delta_B)$. Применяя теорему 1 к случаю гауссовского ρ_D , получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Бозонный гауссовский канал экстремален тогда и только тогда, когда он имеет минимальный шум.*

Лемма 2 в случае гауссовских каналов сводится к следующему утверждению.

Пусть $\Phi_{K,l,\mu}$ – гауссовский канал с одинаковыми входным и выходным пространствами, где K – невырожденная квадратная матрица. Тогда ограничение канала $\Phi_{K,l,\mu}$ на $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ совпадает с $|\det K|^{-1}(\Phi_{\hat{K},\hat{l},\hat{\mu}})_*$, где

$$(\hat{K}, \hat{l}, \hat{\mu}) = (K^{-1}, -(K^{-1})^\top l, (K^{-1})^\top \mu K^{-1}).$$

Это утверждение обобщает наблюдение о двойственности между одномодовыми гауссовскими каналами в их канонической форме [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $\mathfrak{B}$ – C^* -алгебра и Φ – вполне положительное отображение из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть

$$\Phi[X] = V^* \pi(X) V, \quad X \in \mathfrak{B},$$

– минимальное представление Стайнспринга для Φ , где V – ограниченный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, другое сепарабельное гильбертово пространство, и π – представление $\mathfrak{B}$ на $\mathcal{K}$. Пусть $\mathfrak{E} = \pi(\mathfrak{B})'$ – коммутант алгебры $\pi(\mathfrak{B})$ в $\mathcal{K}$. Теорема 1.4.6 из работы [6] утверждает, что Φ является экстремальной точкой выпуклого множества вполне положительных отображений Ψ , нормированных так, что $\Psi[I] = N \equiv V^* V$, тогда и только тогда, когда подпространство $\mathcal{L} = [V\mathcal{H}] \subseteq \mathcal{K}$ является разделяющим для $\mathfrak{E}$, т. е. для $Y \in \mathfrak{E}$ соотношение $P_{\mathcal{L}} Y|_{\mathcal{L}} = 0$ влечет $Y = 0$.

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\Phi}[Y] = V^* Y V, \quad Y \in \mathfrak{E},$$

которое является вполне положительным отображением, удовлетворяющим условию $\tilde{\Phi}[I] = N$, и может быть названо *комплементарным* к Φ (такая возможность обобщения понятия комплементарного отображения отмечалась Рускаи). Легко видеть, что сформулированный выше критерий экстремальности Арвесаона равносильен тому, что $\text{Ker } \tilde{\Phi} = 0$.

Благодарности. Автор благодарен участникам семинара “Некоммутативная вероятность, статистика и информация” в Математическом институте им. В. А. Стеклова за полезное обсуждение. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 12-01-00319_a), Российский квантовый центр и Landau Network – Centro Volta (Италия).

Список литературы

- [1] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, S. Lloyd, *Rev. Modern Phys.*, **84**:2 (2012), 621–669, arXiv: 1110.3234.
- [2] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010.
- [3] I. Devetak, P. W. Shor, *The capacity of a quantum channel for simultaneous transmission of classical and quantum information*, arXiv: quant-ph/0311131.
- [4] А. С. Холево, *ТВП*, **51**:1 (2006), 133–143.
- [5] C. King, K. Matsumoto, M. Natanson, M. B. Ruskai, *Markov Process. Related Fields*, **13**:2 (2007), 391–423.
- [6] W. B. Arveson, *Acta Math.*, **123** (1969), 141–224.
- [7] J. S. Ivan, K. Sabapathy, R. Simon, *Phys. Rev. A*, **84**:4 (2011), 042311, 26 pp., arXiv: 1012.4266.
- [8] M.-D. Choi, *Linear Algebra Appl.*, **10** (1975), 285–290.
- [9] S.-K. Tsui, *Proc. AMS*, **124**:2 (1996), 437–445.
- [10] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, ИКИ, М., Ижевск, 2004.
- [11] B. Demoen, P. Vanheuverzwijn, A. Verbeure, *Rep. Math. Phys.*, **15**:1 (1979), 27–39.
- [12] F. Caruso, V. Giovannetti, A. S. Holevo, *New J. Phys.*, **8** (2006), 310.
- [13] R. Simon, M. Selvadharay, G. S. Agarwal, *Gaussian states for finite number of Bosonic degrees of freedom*, 1998, unpublished draft.
- [14] А. С. Холево, *Пробл. передачи информ.*, **8**:1 (1972), 62–71.
- [15] A. S. Holevo, R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **63**:3 (2001), 032312, 14 pp.
- [16] G. Lindblad, *J. Phys. A*, **33**:28 (2000), 5059–5076.

Поступила в редакцию 18.06.2012