Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Оценка мнимой части полюса матрицы рассеяния для трехмерного уравнения Шредингера с ловушечным потенциалом, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 2, 271–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:15:13

ОЦЕНКА МНИМОЙ ЧАСТИ ПОЛЮСА МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЛОВУШЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Предложен метод оценки мнимой части резонансного полюса матрицы рассеяния для трехмерного уравнения Шредингера с ловушечным потенциалом. Метод основан на принципе инвариантности волновых операторов и равенстве Парсеваля. Показано, что при росте высоты барьера мнимая часть резонансного полюса матрицы рассеяния стремится к нулю экспоненциально.

Действительная неотрицательная функция $V: R^3 \rightarrow R_+^1$ называется ловушечным потенциалом, если она принимает большие значения в слое $\{x; a < |x| < b\}$, а ее значения вне этого слоя малы (математическое определение будет дано ниже). Хорошо известно [1], что аналитическое продолжение матрицы рассеяния для уравнения Шредингера с ловушечным потенциалом имеет полюсы с малыми мнимыми частями (на этом, по существу, основана классическая математическая модель гамовской теории α -распада: период полураспада отождествляется с обратной величиной мнимой части полюса матрицы рассеяния). Методам оценки мнимой части полюса матрицы рассеяния посвящено большое количество работ [2–6]. Эти методы в большинстве своем основаны на следующем приеме: резольвента оператора Шредингера рассматривается как интегральный оператор во вспомогательном банаховом пространстве и ищутся полюсы этого оператора. Для аналитических потенциалов этот метод иногда используется в комбинации с методом комплексного скейлинга, в сферически-симметричном случае удается использовать аналитическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако окончательный результат редко удается получить в обозримой и физически осмысленной форме. С математической точки зрения трудной является проблема ложных полюсов, поэтому задача оценки мнимой части резонансных полюсов матрицы рассеяния продолжает привлекать внимание исследователей. В данной работе мы указываем на возможность использования в этой задаче принципа инвариантности волновых операторов Бирмана и равенства Парсеваля для собственных функций непрерывного спектра оператора Шредингера. Насколько нам известно, ранее они в подобной ситуации не использовались. Мы дадим оценку мнимой части резонансных полюсов матрицы рассея-

*Московский государственный университет, Москва, Россия

ния через параметры потенциала в “евклидовой области”. Основной результат работы изложен в теоремах 1 и 2.

Исходным пунктом наших рассуждений является предложенная в [7] модель резонансного рассеяния на ловушечном потенциале. Напомним ее.

Пусть $V_\infty(x)$ – неотрицательная функция: $V_\infty: R^3 \rightarrow R_+^1$, которая принимает значения $+\infty$ на ограниченном множестве $\Omega = \{x; V_\infty(x) = +\infty\}$, дополнение $C\Omega$ которого состоит из непустого ограниченного множества D_{int} и содержит внешность шара связанного множества D_{out} ,

$$C\Omega = D_{\text{int}} \cup D_{\text{out}}, \quad \text{mes } D_{\text{int}} > 0, \quad \text{dist}(D_{\text{int}}, D_{\text{out}}) > 0.$$

Предположим, что при любом $n < \infty$ функция $\min(n, V_\infty(x))$ локально удовлетворяет условию Гельдера и вне некоторого шара верна оценка

$$V_\infty(x) < \text{const} \exp(-a|x|^2), \quad a > 0, \quad |x| > R_0.$$

Пусть $V_n(x)$ – монотонно возрастающая последовательность непрерывных по Гельдеру функций, для которой

$$\min(n, V_\infty(x)) \leq V_n(x) \leq \min(n+1, V_\infty(x)).$$

Функцию $V_n(x)$ при достаточно большом n мы называем ловушечным потенциалом, символом H_n обозначаем оператор Шредингера с потенциалом $V_n(x)$:

$$H_n = -\nabla^2 + V_n.$$

При $n = \infty$ по определению полагаем

$$H_\infty = -\partial_t \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-tH_n) \right) \Big|_{t=0}. \quad (1)$$

В [7] доказано, что определенный формулой (1) оператор самосопряжен в $L^2(C\Omega, dx)$. Решением задачи рассеяния мы называем функцию $u_n(x, \omega, \lambda)$, которая удовлетворяет уравнению $H_n u_n = \lambda u_n$, $\lambda > 0$, и представима в виде

$$\begin{aligned} u_n(x, \omega, \lambda) &= \exp(i(x, \omega)\sqrt{\lambda}) + \varphi_n(x, \omega, \lambda), \quad |\omega| = 1, \\ (\partial_x - i\sqrt{\lambda})\varphi_n(x, \omega, \lambda) &= o(|x|^{-1}), \quad \varphi_n(x, \omega, \lambda) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $(,)$ – скалярное произведение в R^3 . При $n < \infty$ функции $u_n(x, \omega, \lambda)$ образуют полную в $L^2(R^3, dx)$ систему собственных функций оператора H_n . Равенство Парсеваля имеет вид

$$\int |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-3} (1/2) \int_0^\infty \left[\int_S |\langle f | u_n \rangle(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right] \lambda^{1/2} d\lambda,$$

где

$$\langle f | u_n \rangle(\omega, \lambda) = \int f(x) u_n(x, \omega, \lambda) dx,$$

интегрирование без обозначения пределов проводится по всему пространству, S – единичная сфера в R^3 , $d\omega$ – элемент поверхности единичной сферы.

Как доказано в [7], сужение оператора H_∞ на $L^2(D_{\text{int}}, dx)$ имеет дискретный спектр.

Пусть $\psi(x, \lambda_j)$ – продолженная нулем на CD_{int} простая собственная функция дискретного спектра оператора H_∞ , которая отвечает собственному значению λ_j . Положим

$$a_j(\lambda, n) = \int_S |\langle \psi(\cdot, \lambda_j) | u_n \rangle(\lambda, \omega)|^2 d\omega. \quad (2)$$

Следующая лемма является переформулировкой утверждений лемм 10 и 22 работы [7] в удобных для нас обозначениях, и мы не будем ее доказывать.

ЛЕММА 1. Пусть n_0 достаточно велико и ε достаточно мало. Тогда при $n_0 < n < \infty$, $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ определенная формулой (2) функция представима в виде

$$a_j(\lambda, n) = b(\lambda, n) |\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| |1 - \mu_n(\lambda)|^{-2} + c(\lambda, n),$$

где b , c , μ_n – аналитические в окрестности $\{\lambda; |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}$ функции, которые равномерно по λ имеют предел при $n \rightarrow \infty$ и обладают следующими свойствами:

$$b(\lambda, n) > \operatorname{const} > 0, \quad |c(\lambda, n)| < \operatorname{const} < \infty, \quad |\partial \mu_n / \partial \lambda| > \operatorname{const} > 0.$$

Уравнение $1 - \mu_n(\lambda) = 0$ имеет единственный корень $\lambda_{j,n}$, который является полюсом матрицы рассеяния и таков, что $\operatorname{Im} \lambda_{j,n} < 0$, $\lambda_{j,n} \rightarrow \lambda_j$, $n \rightarrow \infty$.

Символом const мы обозначаем положительную, не зависящую от параметра n величину, значения которой зависят от каждого вхождения символа в формулу. Под матрицей рассеяния мы понимаем стандартно определенную по [8] матрицу и рассматриваем ее как аналитическую функцию параметра λ со значениями в пространстве операторов над $L^2(S, d\omega)$.

Положим

$$G_n(t) = \exp(-tH_n), \quad t > 0.$$

Пусть $G_n(x, y, t)$ – интегральное ядро оператора $G_n(t)$.

ЛЕММА 2. При $n < \infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} (1/2) \int_0^\infty \left[\int_S |\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t)|^2 |\langle \psi(\cdot, \lambda_j) | u_n \rangle(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right] \lambda^{1/2} d\lambda = \\ = \|(G_n(t) - G_\infty(t))\psi(\cdot, \lambda_j)\|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где норма берется в пространстве $L^2(R^3, dx)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\exp(-\lambda_j t)\psi(x, \lambda_j) &= \int G_\infty(x, y, t)\psi(y, \lambda_j) dy, \\ \exp(-\lambda t)u_n(x, \omega, \lambda) &= \int G_n(x, y, t)u_n(y, \omega, \lambda) dy,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda_j t))\langle \psi(\cdot, \lambda_j) | u_n \rangle(\omega, \lambda) = \int \varphi(y)u_n(y, \omega, \lambda) dy,$$

где

$$\varphi(y) = \int (G_n(y, x, t) - G_\infty(y, x, t))\psi(x, \lambda_j) dx.$$

Следовательно, (3) есть равенство Парсеваля для функции φ . Лемма доказана.

Положим

$$\begin{aligned}m(\sigma) &= \{\lambda; |\lambda - \lambda_j| > \sigma\}, \quad d(\sigma) = \{\lambda; |\lambda - \lambda_j| < \sigma\}, \\ I(\sigma, n) &= (2\pi)^{-3}(1/2) \int_{m(\sigma)} a_j(\lambda, n)\lambda^{1/2} d\lambda, \\ \theta(t, n) &= \|G_n(t) - G_\infty(t)\|,\end{aligned}$$

где берется операторная норма в $L^2(R^3, dx)$.

ЛЕММА 3. При $t > 0$, $n < \infty$ справедливо неравенство

$$I(\sigma, n) \leq \exp(2\lambda_j t)(1 - \exp(-\sigma t))^{-2}\theta(t, n)^2. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) следует, что

$$\theta(t, n)^2 \geq \|(G_n(t) - G_\infty(t))\psi(\cdot, \lambda_j)\|^2 \geq \inf_{\lambda \in m(\sigma)} |(\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t))|^2 I(\sigma, n).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Для находящихся в окрестности $\{\lambda; |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon\}$ полюсов матрицы рассеяния справедлива оценка

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \theta(t, n), \quad (5)$$

где $t > 0$ — произвольный параметр, а константа зависит от параметра t и потенциала $V_\infty(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma(n)$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sigma(n) \rightarrow 0, \quad \theta(t, n)/\sigma(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля для функции $\psi(x, \lambda_j)$, получим

$$\begin{aligned} 1 &= (2\pi)^{-3} (1/2) \int_{d(\sigma(n))} a_j(\lambda, n) \lambda^{1/2} d\lambda + I(\sigma(n), n) = \\ &= \int_{d(\sigma(n))} b(\lambda, n) |\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| |1 - \mu_n(\lambda)|^{-2} \lambda^{1/2} d\lambda + o(1) < \\ &< \operatorname{const} \int_{d(\sigma(n))} |1 - \mu_n(\lambda)|^{-1} d\lambda + o(1) < \\ &< \operatorname{const} \sigma(n)/|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

В приведенных выше выкладках мы сначала учли лемму 1 и неравенство (4), потом воспользовались неравенством

$$|\operatorname{Im} \mu_n(\lambda)| = |\operatorname{Im}(1 - \mu_n(\lambda))| \leq |1 - \mu_n(\lambda)|.$$

Затем мы учли, что в силу леммы 1

$$|1 - \mu_n(\lambda)| = |\mu_n(\lambda_{j,n}) - \mu_n(\lambda)| \geq \operatorname{const} |\lambda_{j,n} - \lambda| \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \lambda_{j,n}|.$$

Из (7) следует, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \sigma(n). \quad (8)$$

Так как (8) выполнено для любой удовлетворяющей условию (6) последовательности, должно быть выполнено неравенство (5). Теорема доказана.

Положим

$$\beta_n(x, t) = \int (G_n(x, y, t) - G_\infty(x, y, t)) dy.$$

Из известной оценки Карлемана для нормы интегрального оператора следует, что

$$\theta(t, n) \leq \sup_x \beta_n(x, t). \quad (9)$$

Простейшую оценку функции $\beta_n(x, t)$ можно получить на основе представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности через математическое ожидание от функционала броуновской траектории:

$$\int G_n(x, y, t) dy = E \left(\exp \left(-t \int_0^1 V_n(2\sqrt{t}x(\tau) + x) d\tau \right) \right). \quad (10)$$

Здесь броуновское движение нормировано так, что $E(x_i(\tau)x_j(\tau)) = 2\delta_{ij}\tau$. Пусть

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \min(n, V_\infty(x)), \\ \delta(n) &= \min(\operatorname{dist}(\{x; V_n(x) < n/4\}, \{x; V_n(x) > n/2\}), \\ &\quad \operatorname{dist}(\{x; V_n(x) < n/2\}, \{x; V_n(x) = n\})). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Для входящей в оценку (5) величины $\theta(t, n)$ справедлива оценка (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $\{x; V_n(x) > n/2\}$ из (10) следует, что

$$\begin{aligned}\beta_n(x, t) &\leq \exp\left(-t \min_{|\zeta| < \delta(n)} V_n(x + \zeta)\right) + E\left(\sup_{\tau} |x(\tau)| > \delta(n)/2\sqrt{t}\right) \leq \\ &\leq \exp(-tn/4) + 2\sqrt{2} \exp(-\delta(n)^2/32t).\end{aligned}$$

В области $\{x; V_n(x) < n/2\}$ мы имеем

$$\begin{aligned}\beta_n(x, t) &\leq E\left(1 - \exp\left(-t \int_0^1 (V_\infty - V_n)(2\sqrt{t}x(\tau) + x) d\tau\right)\right) \leq \\ &\leq E\left(\sup_{\tau} |x(\tau)| > \delta(n)/2\sqrt{t}\right) < 2\sqrt{2} \exp(-\delta(n)^2/32t),\end{aligned}$$

следовательно,

$$\sup_x \beta_n(x, t_0) < 4\sqrt{2} \exp(-\delta(n)\sqrt{n}/8\sqrt{2}), \quad t_0 = \delta(n)/(2\sqrt{2n}).$$

Однако для любого целого m

$$\theta(t, n) \leq m\theta(t/m, n) \leq m \sup_x \beta_n(x, t/m),$$

и поэтому

$$\theta(t, n) \leq 4\sqrt{2}(1 + t2\sqrt{2n}/\delta(n)) \exp(-\delta(n)\sqrt{n}/8\sqrt{2}). \quad (11)$$

Теорема доказана.

Если, например,

$$V_\infty(x) \cong (\text{dist}(x, \partial\Omega))^{-q}, \quad q > 2,$$

то оценка (11) дает

$$|\text{Im } \lambda_{j,n}| < \text{const}_1 \exp(-\text{const}_2 n^{(1/2-1/q)}),$$

где положительные константы зависят только от V_∞ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00084.

Список литературы

- [1] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966.
- [2] Resonances: The unifying route towards the formulation of dynamical processes. Eds E. Brandas, N. Elander. Lecture Notes in Physics. V. 325. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1987.
- [3] M. S. Asbaugh, E. M. Harrell. Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 151-170.
- [4] E. Enghal, E. Brandas. Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 4145-4152.
- [5] S. Albeverio, R. Hoegh-Kron. J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 101. P. 491-513.
- [6] W. Hunziker. Commun. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 177-188.
- [7] А. А. Арсеньев. ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 214-232.
- [8] М. Ш. Бирман, С. Б. Энттина. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 401-430.

Поступила в редакцию 11.IX.1997 г.