Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, К вопросу несуществования решений уравнений p -адических струн, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 208–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:05:33

© 2013 г.

В. С. Владимиров*

К ВОПРОСУ НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ p -АДИЧЕСКИХ СТРУН

Работа посвящена математическим вопросам несуществования непрерывных (нетривиальных) решений краевых задач для уравнений p -адических замкнутых и открытых струн в одномерном случае. Установлены: неравенство между числом перемен знака у решения $\psi(t)$ и кратностью нулей функции $\psi^n(t)$; несуществование неотрицательных (неположительных) решений. В случае четных n , если решение ψ существует, кратности нулей функции ψ^n и ее порядок касания положительных максимумов (минимумов) не делятся на 4 и, следовательно, имеют вид $2(2r + 1)$, $r \geq 0$.

Ключевые слова: p -адические струны, тахионы, псевдодифференциальный оператор.

DOI: 10.4213/tmf8390

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания динамики (роллинга) тахионов p -адических открыто-замкнутых струн была предложена [1]–[6] нелинейная псевдодифференциальная система уравнений движения с ненулевой постоянной взаимодействия λ :

$$\psi^{p^2} = e^{-\square/4}\psi + \lambda^2 \frac{p-1}{2p} \psi^{(p-1)p/2-1} (\varphi^{p-1} - 1), \quad \psi = \psi(t, x), \quad (1.1)$$

$$\varphi^p \psi^{p(p-1)/2} = e^{-\square/2} \varphi, \quad \varphi = \varphi(t, x), \quad (1.2)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\square = -\partial^2/\partial t^2 + \Delta_x$ – оператор Даламбера, p – простое число.

Псевдодифференциальный оператор (ПДО) $P(x, \xi)$ определяется равенством

$$(PU)(x) = F^{-1}[P(x, \xi)F[U](\xi)](x),$$

где

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i\xi x} \varphi(x) dx \equiv \tilde{\varphi}(\xi)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

– преобразование Фурье функции $\varphi(x)$,

$$F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) = (2\pi)^{1-d} \int e^{-i\xi x} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi$$

– обратное к нему преобразование: $F^{-1}F = I$. Здесь $\xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{d-1} x_{d-1}$ – скалярное произведение векторов ξ и x . Функция $P(x, \xi)$ называется *символом* ПДО. В нашем случае ПДО не зависит от x , так что $d = 1$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. В результате получим упрощенную систему одномерных уравнений

$$\psi^{p^2} = e^{-\square/4} \psi, \quad (1.3)$$

$$\varphi^p \psi^{p(p-1)/2} = e^{-\square/2} \varphi. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) имеет самостоятельное значение: это уравнение для замкнутой струны. Уравнение (1.3) при $\psi = 1$ превращается в уравнение для открытой струны

$$\varphi^p = e^{-\square/2} \varphi. \quad (1.5)$$

Одномерные уравнения ($d = 1$) для замкнутой и открытой струн имеют соответственно вид

$$\psi^{p^2} = e^{\partial_{tt}^2/4} \psi, \quad (1.6)$$

$$\varphi^p = e^{\partial_{tt}^2/2} \varphi. \quad (1.7)$$

К решениям $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ приведенных уравнений присоединяются *краевые условия* на бесконечностях струн: для замкнутой струны

$$\psi(\pm\infty) = 1, \quad (1.8a)$$

$$\psi(\pm\infty) = 0, \quad (1.8b)$$

для открытой струны

$$\varphi(-\infty) = 1, \quad \varphi(\infty) = -1, \quad p \text{ нечетное}, \quad (1.9a)$$

$$\varphi(-\infty) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad p \text{ четное}. \quad (1.9b)$$

Для единообразия мы будем рассматривать более общее уравнение, объединяющее уравнения (1.6) и (1.7):

$$\psi^n = e^{a^2 \partial_{tt}^2} \psi, \quad (1.10)$$

где $n \geq 2$ – целое число, при этом значения $n = p^2$ и $a^2 = 1/4$ соответствуют замкнутой струне, а $n = p$, $a^2 = 1/2$, $\psi = \varphi$ – открытой струне. Впредь для определенности будем нормировать краевые задачи (1.8a), (1.9a) и (1.9b) для уравнения (1.10) условиями $\psi(-\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = 1$.

Исследованию этого нового класса уравнений математической физики с бесконечным числом производных посвящены многие работы физиков и математиков с применением компьютерной техники (см. [1]–[20] и приведенную там литературу).

В струнной теории поля взаимодействие нелокально, что существенно отличает ее от классической локальной теории поля. Струнная теория представляет значительный интерес не только для p -адической математической физики, но и для других областей знаний. Особенно следует отметить работы школы И. Я. Арефьевой по космологии (см. обзор [19]).

Решения $\psi(t)$ краевых задач для уравнения (1.10) предполагаются вещественными непрерывными функциями на всей оси t , отличными от тривиальных (вакуумов) $\pm 1, 0$. В этом случае решения ограничены¹⁾, причем $|\psi(t)| < 1$, $t \in \mathbb{R}$, а для краевых задач (1.8a) и (1.86) [15]

$$\psi' \in L_1(\mathbb{R}); \quad \psi'(\pm\infty) = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) эквивалентно нелинейному интегральному уравнению

$$\psi^n(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2/4a^2} \psi(\tau) d\tau. \quad (1.12)$$

2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Одной из первых задач уравнений математической физики является задача о существовании решений в том или ином классе функций (пространстве). Существование или несуществование решений – это первый критерий пригодности или непригодности избранной математической модели. Приведем некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Для задачи (1.6), (1.8a) (замкнутая струна) не существует четных неубывающих по $\tau > 0$ решений [9], [18]. Для задачи (1.7), (1.9a) при нечетном p (открытая струна) существует нечетное решение с одним простым нулем [5]–[7].

Следующий пример содержит результаты, касающиеся решений краевых задач для уравнения (1.12) (при условии их существования) и которые нам понадобятся в дальнейшем [15], [16], [20].

ПРИМЕР 2. Уравнение (1.12) эквивалентно начально-будущей краевой задаче для уравнения теплопроводности [15]

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad U = U(\sigma, t), \quad 0 < \sigma < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

для *интерполирующей функции* $U(\sigma, t)$, удовлетворяющей *начально-конечным* краевым условиям

$$U(0, t) = \psi(t), \quad U(1, t) = \psi^n(t). \quad (2.2)$$

Отметим, что переменные σ и t в уравнении (2.2) поменялись местами по сравнению с классическим уравнением теплопроводности. При этом интерполирующая функция выражается интегралом Пуассона (ср. (1.12)):

$$U(\sigma, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2/4a^2 \sigma} \psi(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

¹⁾По поводу неограниченных решений см. [21].

Функция $U(\sigma, t)$ выражается через $\Theta_3(v, t)$ – функцию Якоби ([22], с. 1054) по формуле

$$U(\sigma, t) = \Theta_3\left(i\pi\sigma, \frac{ta}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 m^2 \sigma} \cos(\pi mat),$$

причем этот ряд быстро сходится при всех $\sigma > 0$ равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$.

Из равенства (2.3) при $\sigma = 1$ и из второго условия (2.2) следует

$$\psi^n(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-\tau)^2/4a^2} \psi(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Для интерполирующей функции $U(\sigma, t)$ поставленных краевых задач справедлив закон сохранения*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [U(\sigma, t) - \psi(t)] dt = 0, \quad 0 \leq \sigma < \infty. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя уравнение (2.1) по прямоугольнику $0 < \sigma < s$, $b < t < c$ и пользуясь краевыми условиями (2.2), получим

$$\int_b^c [U(s, t) - \psi(t)] dt = a^2 \int_0^s [U'_t(\sigma, c) - U'_t(\sigma, b)] d\sigma. \quad (2.6)$$

Но в силу (2.3)

$$\begin{aligned} U'_t(\sigma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \sigma} 2a^2 \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - t) e^{-(\tau-t)^2/4a^2 \sigma} \psi(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 \sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-v^2} \psi(\tau - v\sqrt{4a^2 \sigma}) dv. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) при $\tau = b$ и $\tau = c$ в (2.6), получим

$$\begin{aligned} \int_b^c [U(s, t) - \psi(t)] dt &= - \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 \sigma}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-v^2} [\psi(c - v\sqrt{4a^2 \sigma}) - \psi(b - v\sqrt{4a^2 \sigma})] dv d\sigma. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Согласно теоремам Фубини и Лебега возможен переход к пределу при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow \infty$ под знаками интегралов в равенстве (2.8). В результате получим равенство (2.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} [U(s, t) - \psi(t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-v^2} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 \sigma}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dv d\sigma = 0,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1, 0$, $i = 1, 2$.

Из формул (2.5) и (2.2) вытекают следствия 1, 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для решений $\psi(t)$ краевых задач справедливо соотношение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi^n(t) - \psi(t)] dt = 0. \quad (2.9)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Не существует неотрицательных решений краевых задач, кроме 1, 0.

Для решения ψ краевых задач (1.3) и (1.4) справедливы соотношения (1.11).

Обозначим через $[t_1, t_2, \dots]$ (вещественные) нули вещественно-аналитической функции $\psi^n(t)$. Если решение $\psi(t)$ существует, то это множество не пусто: оно ограничено для краевых задач (1.3), (1.8a) и (1.4), (1.9a) (пусть их число будет m без учета кратностей), ограничено слева и может быть неограниченным справа для краевой задачи (1.4), (1.8b) и может быть неограниченным и справа, и слева для краевой задачи (1.3), (1.9b). Через $[\sigma_1, \sigma_2, \dots]$ обозначим их соответствующие кратности. Если m конечно, обозначим число нулей с учетом их кратностей $N = \sum_{k=1}^m \sigma_k$, а $S = \max\{1 \leq k \leq m \mid \sigma_k = 1\}$ – максимальную кратность. Обозначим также через Z число перемен знака [23] у решения $\psi(t)$ (и у функции $\psi^n(t)$ при нечетном n). Очевидно, $m \geq Z$. Через W обозначаем число перемен знака в коэффициентах $a_0, a_1, \dots, a_m$ в разложении функции ψ^n в ряд Тейлора [15]:

$$\psi^n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \quad a_k = (\psi, H_k), \quad (2.10)$$

где $H_k(t)$ – полиномы Эрмита.

Решение ψ есть вещественно-аналитическая функция на всей оси t , кроме нулей t_k , где она непрерывна и ее производная $\psi'(t)$ может иметь интегрируемую особенность в соответствии с (2.5). В этом случае все интегралы на бесконечностях сходятся абсолютно ($m < \infty$) или несобственно ($m = \infty$).

В работе [20] установлена следующая

ТЕОРЕМА 2. Решение $\psi(t)$ меняет знак по меньшей мере S раз, т. е.

$$Z \geq S. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема основана на том факте, что если кратность корня t_k равна σ_k , то $\sigma_k - 1$ моментов ядра уравнения (1.12) в точке $t = t_k$ равны нулю [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-(t_k-t)^2/4a^2\sigma_k} \tau^i dt \begin{cases} = 0, & i = 0, 1, \dots, \sigma_k - 1, \\ \neq 0, & i = \sigma_k. \end{cases} \quad (2.12)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 2 при $Z = 2$ все кратности нулей функции $\psi^n(t)$ равны $\sigma_k = 2$, при $Z = 4$ – $\sigma_k = 2$, при $Z = 6$ – $\sigma_k = 2$ или $\sigma_k = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из неравенства (2.11): $2 \geq \sigma_k \geq 2$ и $\sigma_k = 2$ и т. д. Случаи $\sigma_k = 4r$ невозможны согласно следствию 6 после теоремы 5 (см. ниже раздел 3).

Наряду с неравенством (2.11) полезны правила Декарта [23]. Например, для уравнения $\psi^n(t) = 0$

$$N - Z = 2k \geq 0, \quad W - N = 2l \geq 0, \quad (2.13)$$

где k и l – целые числа, большие или равные нулю. В частности, если n четно, имеем $Z = 0$, $N = 2k$.

Сформулируем еще одну нужную теорему [15].

ТЕОРЕМА 3. Пусть кратность $\sigma = 2k$ нуля $t = 0$ функции $\psi^n(t)$ четная. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ интерполирующая функция $U(1-\varepsilon, t)$ имеет ровно $2k$ простых вещественных нулей вида

$$t_i^\pm(\varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda_i^\pm\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.14)$$

где $\lambda_i^2, i = 1, 2, \dots, k$, – корни полинома Эрмита $H_{2k}(\lambda_i^2) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если при четном n функция $\psi^n(t)$ имеет нуль кратности $2(2j+1)$, $j = 0, 1, \dots$, то в достаточно малой окрестности $1 - \varepsilon < \sigma < 1$ точки $\sigma = 1$, $t = 0$ функция $U(\sigma, 0) < 0$; если кратность равна $4j$, $j = 1, 2, \dots$, то в той же окрестности $U(\sigma, 0) > 0$. При $\sigma > 1$ всегда $U(\sigma, 0) > 0$.

3. О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПРИ ЧЕТНОМ n

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вещественно-аналитическая функция $f(t)$ имеет максимум $M > 0$ в точке a (минимум $m > 0$ в точке b) с порядком касания $2r$, $r \geq 1$ ($2s$, $s \geq 1$), если кратность нуля функции $f(t) - M$ ($f(t) - m$) равна $2r$ ($2s$), т. е. в малой окрестности a (b) соответственно

$$f(t) = M + A(t-a)^{2r} + o(t-a)^{2r}, \quad (3.1)$$

где $A = f^{(2r)}(a)/(2r)! < 0$, $B = f^{(2s)}(b)/(2s)! > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Если существует непрерывное решение $\psi(t)$ краевой задачи при четном n , то функция $\psi^n(t)$ не имеет ни в одной точке положительного максимума с порядком касания $4r$, $r > 0$. То же верно и для случая положительных минимумов $m > 0$, если такие существуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, непрерывное решение $\psi(t)$ какой-либо из краевых задач (1.8а), (1.8б) и (1.9б) уравнения (1.10) существует. Тогда функция $\psi^n(t) = U(1, t)$ имеет по крайней мере один положительный максимум $M > 0$ в точке a с порядком касания $4r$ (см. рис. 1), т. е. в силу (3.1)

$$U(1, t) = \psi^n(t) \sim M - A(t-t_0)^{4r}, \quad A \leq 0, \quad (3.2)$$

где

$$(\psi^n)^{(j)}(t_0) = \begin{cases} M, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \dots, 4r-1, \\ A, & j = 4r. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что при достаточно малом ε

$$U(1, t) < M, \quad |t-a| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Из (2.1) и (3.2) заключаем, что функция $U(\sigma, a)$ имеет в точке $\sigma = 1$ максимум $M > 0$ с порядком касания $2r$, т. е.

$$U(\sigma, t_0) \sim M - A'(\sigma-1)^{2r}, \quad A' = \frac{a^2 A}{(2r)!} > 0,$$

Рис. 1

откуда следует, что при достаточно малом ε

$$U(\sigma, t_0) < M, \quad 1 - \varepsilon \leq \sigma \leq 1. \quad (3.5)$$

Разложим функцию $U(\sigma, t)$ в ряд Тейлора в прямоугольнике

$$[(\sigma, t): 1 - \varepsilon \leq \sigma \leq 1, |t - a| \leq \sqrt{\varepsilon}] \quad (3.6)$$

(см. рис. 1) для достаточно малых ε . Пользуясь соотношениями (3.3) и уравнением (2.1), получим равенство

$$U(\sigma, t) = M - A'(t - a)^{4r} - C(\sigma - 1)^{2r} + \sum_k C_k(\sigma - 1)^{a_k}(t - a)^{b_k}, \quad (3.7)$$

где C , C_k – некоторые вещественные числа, a_k , b_k – натуральные числа, причем такие, что в прямоугольнике (3.6) все слагаемые

$$|(\sigma - 1)^{a_k}(t - a)^{b_k}| \leq \varepsilon^{2r} \sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда и из (3.7) заключаем, что на нижнем основании $[(t, \sigma): |t - a| \leq \sqrt{\varepsilon}, \sigma - 1 \leq \varepsilon]$ и на боковых линиях $[(t, \sigma): t = \pm t_0, 1 - \varepsilon \leq 1]$ функция $U(\sigma, t) = M - A'\varepsilon^{2r} + O(\varepsilon^{2r}\sqrt{\varepsilon})$ меньше M . Но эта ситуация противоречит принципу максимума для уравнения теплопроводности.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если непрерывное решение $\psi(t)$ краевой задачи при четном n существует, то порядок касания всех положительных максимумов (минимумов) функции $\psi^n(t)$ равен $2(2r + 1)$ при некоторых целых $r \geq 0$.

ТЕОРЕМА 5. Если существует непрерывное решение $\psi(t)$ краевой задачи при четном n , то функция $\psi^n(t)$ не имеет нулей t_k кратности $\sigma_k = 4r$, $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4 при $M = 0$ с той только разницей, что вместо принципа максимума используется принцип минимума для уравнения теплопроводности.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если непрерывное решение $\psi(t)$ краевой задачи при четном n существует, то все кратности σ_k нулей t_k функции $\psi^n(t)$ равны $2(2r + 1)$ при некоторых целых $r \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Несуществование для задачи (1.8a) четных монотонно возрастающих при $t > 0$ непрерывных решений (см. раздел 1) не противоречит следствиям 5 и 6. Решения могут существовать при наличии двух и более максимумов (и минимумов) при кратности нулей $2(2r + 1)$ функции $\psi^n(t)$.

Благодарности. Автор благодарит И. Я. Арефьеву, И. В. Воловича и участников семинара Отдела математической физики МИ РАН за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1) и РФФИ (грант № 11-01-00828_а).

Список литературы

- [1] I. V. Volovich, *Clas. Quant. Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.
- [3] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1989), 3077–3079.
- [4] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
- [5] N. Moeller, M. Schnabl, *JHEP*, **01** (2004), 011, 18 pp.
- [6] В. С. Владимиров, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 354–367.
- [7] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368.
- [8] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адиический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [9] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034, 39 pp., arXiv: hep-th/0207107.
- [10] A. Sen, *JHEP*, **04** (2002), 048, 18 pp., arXiv: hep-th/0203211.
- [11] D. Ghoshal, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **584**:1–2 (2000), 300–312, arXiv: hep-th/0003278.
- [12] J. A. Minahan, *JHEP*, **03** (2001), 028, 16 pp.
- [13] N. Barnaby, *JHEP*, **07** (2004), 025, 23 pp., arXiv: hep-th/0406120.
- [14] E. Colletti, I. Sigalov, W. Taylor, *JHEP*, **08** (2005), 104, 25 pp., arXiv: hep-th/0505031.
- [15] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 55–80, arXiv: math-ph/0507018.
- [16] V. S. Vladimirov, *Sci. China Ser. A*, **51**:4 (2008), 754–764.
- [17] V. S. Vladimirov, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 79–87.
- [18] В. С. Владимиров, “О нелинейных уравнениях p -адиических струн для скалярных полей тахионов”, *Избранные вопросы математической физики и p -адиического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 254–272.
- [19] I. Ja. Aref'eva, “Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy”, *p -Adic Mathematical Physics: 2nd International Conference*, AIP Conference Proceedings, **826**, ред. А. Ю. Хренников, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, Melville, NY, 2006, 301–311, arXiv: astro-ph/0410443.
- [20] В. С. Владимиров, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 163–170.
- [21] V. S. Vladimirov, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **4**:1 (2012), 57–63.
- [22] *Математическая энциклопедия*, т. 5, Советская энциклопедия, М., 1985.
- [23] Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа: Теория функций, распределение нулей полиномов, определители, теория чисел*, ч. II, Гостехиздат, М., 1956.

Поступила в редакцию 28.06.2012