Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. С. Валверде, Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг, Эквивалентность многофотонных функций Грина в статистических квантовых теориях поля Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 44–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 09:55:16

© 2004 г. Х. С. Валверде*, Б. М. Пиментел*, В. Я. Файнберг†

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОГОФОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В СТАТИСТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ ДАФФИНА–КЕММЕРА–ПЕТЬО И КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА

Доказана эквивалентность многофотонных функций Грина в статистических квантовых теориях поля Даффина–Кеммера–Петью и Клейна–Гордона–Фока. При доказательстве используется формализм функционального интеграла для статистического производящего функционала в статистической квантовой теории поля при конечной температуре. В качестве иллюстрации в обеих теориях вычислены поляризационные операторы в однопетлевом приближении и продемонстрировано их совпадение.

Ключевые слова: статистическая теория поля, функции Грина фотона, интеграл по путям, перенормировка, эквивалентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод функций Грина в квантовой статистике имеет долгую историю, которая начинается с работы Мацубары 1953 г. [1]. Метод производящего статистического функционала впервые был применен Фрадкиным [2], [3] для вычисления перенормированных температурных функций Грина¹⁾. Позднее метод функционального интеграла в статистике был развит в работе Бернарда [7].

В последние годы возродился интерес к вопросу об эквивалентности теорий взаимодействия скалярных заряженных частиц с квантованными электромагнитным полем и полем Янга–Миллса в формулировках Даффина–Кеммера–Петью (ДКП) и Клейна–Гордона–Фока (КГФ). Была доказана эквивалентность этих теорий для S -матричных эле-

¹⁾ Подробный список публикаций можно найти в диссертации Фрадкина [3] и в монографиях Капусты [4] и Ле Беллака [5]. См. также ссылки в работе [6].

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brazil.
E-mail: valverde@ift.unesp.br; pimentel@ift.unesp.br

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: fainberg@lpi.ru

ментов скалярных частиц на массовой оболочке, а также для функций Грина фотонов *вне массовой оболочки* [8]–[10].

В этой связи возникает интересный физический вопрос: можно ли доказать эквивалентность многофотонных функций Грина в статистических квантовых теориях ДКП и КГФ?

Главная цель настоящей работы – дать положительный ответ на этот вопрос.

В разделе 2 приводится общее доказательство эквивалентности методом функционального интеграла в статистической квантовой теории. С физической точки зрения этот результат понятен: фотон не приобретает массу, а значит, и химический потенциал μ , т.е. в среде с ненулевой температурой фотон сохраняет свою природу. В качестве иллюстрации в разделе 3 вычисляются поляризационные операторы в однопетлевом приближении в обеих теориях и доказывается, что эти операторы действительно совпадают. Раздел 4 содержит заключительные замечания.

2. СОВПАДЕНИЕ МНОГОФОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИЯХ ДКП И КГФ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Чтобы получить статистический функционал $Z(J, \bar{J}, J_\mu)$ в статистической теории, нужно перейти в евклидово пространство и ограничить область интегрирования по x_4 : $0 \leq x_4 \leq \beta$, где $\beta = 1/T$, а $J, \bar{J}, J_\mu$ – внешние токи. Как следует из общих соображений, статистический функционал в теории ДКП взаимодействия заряженных частиц спина ноль с квантованным электромагнитным полем A_μ имеет следующий вид (в α -калибровке)²⁾:

$$Z_{\text{ДКП}} = Z_0 \int_{\beta} D A_\mu D \psi D \bar{\psi} \exp \left\{ - \int_0^\beta dx_4 \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{x} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(x) (\beta_\mu D_\mu + m) \psi(x) + J_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{J}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) J(x) \right] \right\}, \quad (1)$$

где $Z_0 = Z(0, 0, 0)$ ³⁾; $D_\mu = \partial_\mu^* - ieA_\mu$, $\partial_4^* = \partial_4 - \mu$, e – заряд электрона; μ – химический потенциал⁴⁾. В евклидовом пространстве $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)$, и все поля удовлетворяют условиям периодичности

$$\bar{\psi}(0, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(\beta, \mathbf{x}), \quad \psi(0, \mathbf{x}) = \psi(\beta, \mathbf{x}), \quad A_\mu(0, \mathbf{x}) = A_\mu(\beta, \mathbf{x}). \quad (2)$$

²⁾Обсуждение зависимости от калибровки см. в работе [7].

³⁾В случае, когда заряд $e = 0$,

$$Z_0 = \prod_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} (1 - e^{-\beta(E-\mu)})^{-1} (1 - e^{-\beta\omega})^{-1},$$

где $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $\omega = |\mathbf{k}|$.

⁴⁾В случае статистики Бозе–Эйнштейна химический потенциал всегда отрицателен.

Что касается функционального интегрирования по полям в формуле (1), то, например,

$$\int_{\beta} DA_{\mu}(x) = \int \prod_{0 \leq x_4 \leq \beta} \prod_{-\infty \leq x_i \leq \infty} \prod dA_{\mu}(x_4, \mathbf{x}). \quad (3)$$

В евклидовом пространстве выберем β_{μ} -матрицы в виде

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \beta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \beta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \beta_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

После интегрирования по ψ и $\bar{\psi}$ в (1) получаем

$$\begin{aligned} Z_{\text{ДКП}}(\bar{J}, J, J_{\mu}) &= Z_0 \int_{\beta} DA_{\mu}(x) \exp \left\{ - \int_{\beta} d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_{\mu} A_{\mu})^2 + J_{\mu} A_{\mu} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{Tr} \ln S(x, x, A) \right] - \int_{\beta} d^4x d^4y \bar{J}(x) S(x, y, A) J(y) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$S(x, y, A) = (\beta_{\mu} D_{\mu} + m)^{-1} \delta^4(x - y) \quad (6)$$

— функция Грина ДКП-частицы во внешнем поле $A_{\mu}(x)$, член $\text{Tr} \ln S(x, x, A)$ дает все вакуумные диаграммы теории возмущений. Этот член можно преобразовать к следующему компонентному виду:

$$\begin{aligned} \det S(x, y, A) &= \int_{\beta} D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ - \int_{\beta} d^4x \bar{\psi} (\beta_{\mu} D_{\mu} + m) \psi \right\} = \\ &= \int_{\beta} \prod_{\mu=1}^4 D\phi_{\mu} D\phi_{\mu}^* D\phi D\phi^* \times \\ &\quad \times \exp \left\{ - \int_{\beta} d^4x (\phi^* D_{\mu} \phi_{\mu} + \phi_{\mu}^* D_{\mu} \phi + m(\phi \phi^* + \phi_{\mu} \phi_{\mu}^*)) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя теперь по ϕ_{μ} и ϕ_{μ}^* , получаем

$$\begin{aligned} \det S(x, y, A) &= \det G(x, y, A) = \exp \text{Tr} \ln G(x, x, A) = \\ &= \frac{1}{m} \int_{\beta} D\phi D\phi^* \exp \left\{ - \frac{1}{m} \int_{\beta} d^4x \phi^* (-D_{\mu}^2 + m^2) \phi \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$G(x, y, A) = (-D_\mu^2 + m^2)^{-1} \delta^4(x - y) \quad (9)$$

– функция Грина уравнения КГФ во внешнем поле $A_\mu(x)$. Из формул (7)–(9) следует, что многофотонные функции Грина (а не только матричные элементы S -матрицы для *реальных* фотонов) в статистических теориях ДКП и КГФ совпадают⁵⁾. Это завершает доказательство эквивалентности многофотонных функций Грина в статистических теориях ДКП и КГФ.

3. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Поляризационный оператор в статистической теории КГФ в однопетлевом приближении имеет вид⁶⁾

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{КГФ}}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \left(\frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2+m^2)((p+k)^2+m^2)} - \frac{2\delta_{\mu\nu}}{p^2+m^2} \right), \quad (10)$$

где

$$p^2 = p_4^2 + \mathbf{p}^2, \quad p_4 = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad -\infty < n < +\infty. \quad (11)$$

Слагаемое, пропорциональное $\delta_{\mu\nu}$, в правой части (10) играет важную роль при доказательстве поперечности $\Pi_{\mu\nu}$ ($k_\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$). Однако это слагаемое не дает вклада в $\Pi_{\mu\nu}$ после перенормировки. В теории ДКП одночастичная функция Грина в импульсном пространстве имеет вид

$$G(\hat{p}) = -\frac{1}{m} \left(\frac{i\hat{p}(i\hat{p}+m)}{p^2+m^2} + 1 \right), \quad \hat{p} = \beta_\mu p_\mu. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что

$$(i\hat{p} - m)G(\hat{p}) = 1. \quad (13)$$

⁵⁾Строго говоря, скалярные поля $\phi(x)$ и $\varphi(x)$ в теориях ДКП и КГФ, соответственно, связаны следующим соотношением:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \phi(x).$$

⁶⁾Последнее слагаемое в правой части (10) отвечает слагаемому

$$e^2 \int A_\mu^2(x) \phi^*(x) \phi(x) d^4x$$

в лагранжиане теории КГФ.

Используя (12), (13), получаем поляризационный оператор в теории ДКП (в e^2 -приближении):

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{\text{ДКП}}(k) &= \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta} \text{Tr} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \beta_\mu G(\hat{p} + \hat{k}) \beta_\nu G(\hat{p}) = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta} \sum_{p_4} \int d\mathbf{p} \left(\frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2+m^2)((p+k)^2+m^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2+m^2} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{(p+k)^2+m^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Легко видеть, что после подстановки $(p+k) \leftrightarrow p$ в слагаемом $\delta_{\mu\nu}((p+k)^2+m^2)^{-1}$ оно становится равным $\delta_{\mu\nu}(p^2+m^2)^{-1}$, так что правые части (14) и (10) совпадают и формально калибровочно инвариантны. Это совпадение $\Pi_{\mu\nu}^{\text{КГФ}}$ и $\Pi_{\mu\nu}^{\text{ДКП}}$ в однопетлевом приближении подтверждает общее доказательство в разделе 2 (см. (8), (9))⁷⁾.

В релятивистской квантовой теории поля тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ имеет вид [11]

$$\Pi_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \Pi(k^2). \quad (15)$$

В квантовой статистике $\Pi_{\mu\nu}$ зависит от двух векторов k_μ и u_μ , последний является единичным вектором скорости среды. Таким образом, в общем случае (см. [3], с. 75)

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu} &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A_1 + \left(u_\mu u_\nu - \frac{k_\mu u_\nu(ku)}{k^2} - \frac{k_\nu u_\mu(ku)}{k^2} + \frac{k_\mu k_\nu(ku)^2}{k^4} \right) A_2 \equiv \\ &\equiv \Phi_{\mu\nu}^1 A_1 + \Phi_{\mu\nu}^2 A_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Вводя обозначения (в любом приближении)

$$a_1 \equiv \Pi_{\mu\mu} = 3A_1 + \lambda A_2, \quad (17)$$

$$a_2 \equiv u_\mu \Pi_{\mu\nu} u_\nu = \lambda(A_1 + \lambda A_2), \quad \lambda = 1 - \frac{(ku)^2}{k^2}, \quad (18)$$

имеем

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(a_1 - \frac{1}{\lambda} a_2 \right), \quad A_2 = \frac{1}{2\lambda} \left(-a_1 + \frac{3}{\lambda} a_2 \right). \quad (19)$$

Если система находится в покое⁸⁾,

$$\lambda = 1 - \frac{k_4^2}{k^2}, \quad (20)$$

⁷⁾Заметим, что выражение (8.23) для $\Pi_{\mu\nu}^{\text{ДКП}}$ в работе [3] не совпадает с нашим выражением (14), нарушая эквивалентность.

⁸⁾Можно показать, что представление (16), строго говоря, справедливо, только если система находится в покое, $\mathbf{u} = 0$, $u_4 = 1$ (см. [3], глава II, раздел 7).

и

$$a_2 = \Pi_{44} = \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right) A_1 + \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right)^2 A_2. \quad (21)$$

Удобно представить a_1, a_2 в виде

$$a_i = a_i^R + a_i^\beta. \quad (22)$$

Здесь a_i^R — это те слагаемые, которые не зависят от β и должны быть перенормированы; a_i^β зависят от β . Важно, что при стремлении температуры к нулю

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_i^\beta = 0. \quad (23)$$

Теперь можно переписать (16) в следующем виде:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Phi_{\mu\nu}^1 \left(a_1^R - \frac{1}{\lambda} a_2^R + a_1^\beta - \frac{1}{\lambda} a_2^\beta \right) + \frac{1}{2\lambda} \Phi_{\mu\nu}^2 \left(-a_1^R + \frac{3}{\lambda} a_2^R - a_1^\beta + \frac{3}{\lambda} a_2^\beta \right). \quad (24)$$

Слагаемое $\sim \Phi_{\mu\nu}^2$ должно исчезать в пределе $\beta \rightarrow \infty$. Соответственно в этом пределе мы получаем тензор $\Pi_{\mu\nu}$ евклидовой квантовой теории поля. Из того, что a_1^R и a_2^R не зависят от β , следует, что (после перенормировки)

$$a_2^R = \frac{\lambda}{3} a_1^R. \quad (25)$$

Таким образом,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \Phi_{\mu\nu}^1 a_1^R, \quad \text{или} \quad \Pi_{\mu\mu} = a_1^R. \quad (26)$$

Вычислим a_1 и a_2 , пользуясь общей формулой для суммирования по p_4 в правой части (14). Опустим слагаемые, пропорциональные $\delta_{\mu\nu}$, в правых частях (10) и (14), поскольку эти слагаемые исчезают после регуляризации и перенормировки; тогда

$$a_1 = \Pi_{\mu\mu} = -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d\mathbf{p} \sum_{p_4} \frac{(2p+k)^2}{(p^2+m^2)((p+k)^2+m^2)}, \quad (27)$$

$$a_2 = \Pi_{44} = -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d\mathbf{p} \sum_{p_4} \frac{(2p_4+k_4)^2}{(p^2+m^2)((p+k)^2+m^2)}. \quad (28)$$

Общая формула для суммирования по p_4 имеет вид (см. [3], с. 123, приложение 3 и [12], с. 299)

$$\frac{1}{\beta} \sum_n f\left(\frac{2\pi n}{\beta}, K\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega, K) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega \frac{f(\omega, K) + f(-\omega, K)}{e^{-i\beta\omega} - 1}. \quad (29)$$

Формулу (27) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d\mathbf{p} \sum_{p_4} \frac{4p^2 + 4pk + 2k^2 + 4m^2 - (4m^2 + k^2)}{(p^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)} = \\
 &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d\mathbf{p} \sum_{p_4} \left\{ -\frac{4m^2 + k^2}{(p^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)} + \frac{2}{p^2 + m^2} + \frac{2}{(p+k)^2 + m^2} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow +\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d\mathbf{p} \sum_{p_4} \frac{4m^2 + k^2}{(p^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)}, \tag{30}
 \end{aligned}$$

где в предпоследнем выражении были опущены последние два слагаемых, поскольку они исчезают после перенормировки.

Вводя фейнмановский параметр x в последнем выражении в правой части (30), получаем

$$a_1(k^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} (4m^2 + k^2) \int d\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \sum_{p_4} \left[(p^2 + m^2) + \frac{k^2}{4}(1-x^2) \right]^{-1}. \tag{31}$$

Чтобы получить вклад в $a_1(k^2)$, не зависящий от β , нужно взять только первое слагаемое в правой части (29):

$$\begin{aligned}
 a_1^R(k^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3} (4m^2 + k^2) \times \\
 &\times \int d\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\omega^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{k^2}{4}(1-x^2) \right]^{-1}. \tag{32}
 \end{aligned}$$

Замыкая контур интегрирования на бесконечности в верхней полуплоскости, находим

$$a_1^R(k^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} (4m^2 + k^2) \int^l d\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \frac{1}{2} \left[\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{k^2}{4}(1-x^2) \right]^{-1/2}, \tag{33}$$

где l – импульс обрезания. После интегрирования по x и перенормировки

$$a_1^R(k^2) \rightarrow a_1^R(k^2) - a_1^R(0) - k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} a_1^R(0) \tag{34}$$

получаем

$$a_1^R(k^2) = -\frac{e^2(k^2)^2}{16\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} dz^2 \left(1 - \frac{4m^2}{z^2} \right)^{3/2} \frac{1}{z^2(z^2 + k^2)}. \tag{35}$$

В пределе $\beta \rightarrow \infty$ получается евклидово выражение для $\Pi_{\mu\nu}$ (см. (26)):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi_{\mu\nu} = \left(-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \left(\frac{e^2}{48\pi^2} \right) k^4 \int_{4m^2}^{\infty} dz \left(1 - \frac{4m^2}{z^2} \right)^{3/2} \frac{1}{z^2(z^2 + k^2)}. \tag{36}$$

Это выражение для $\Pi_{\mu\nu}$ следует также из формулы (11) работы [12], где фотонная функция Грина была вычислена с использованием дисперсионного подхода.

Из (25), (35) мы легко находим a_2^R :

$$a_2^R(k^2) = \frac{\lambda}{3} a_1^R = + \frac{e^2 k^2}{48\pi^2} (k_4^2 - k^2) \int_{4m^2}^{\infty} dz \left(1 - \frac{4m^2}{z^2}\right)^{3/2} \frac{1}{z^2(z^2 + k^2)}. \quad (37)$$

Окончательно для a_1^β и a_2^β ($\mu \neq 0$) получаем

$$\begin{aligned} a_1^\beta &= \frac{e^2}{16\pi^2} (4m^2 + k^2) \int_0^\infty \frac{p dp}{E|\mathbf{k}|} (e^{\beta(E-\mu)} - 1)^{-1} \ln \frac{(k^2 + 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}{(k^2 - 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}, \\ a_2^\beta &= \frac{e^2}{16\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{Ep|\mathbf{k}|} (e^{\beta(E-\mu)} - 1)^{-1} \left\{ (E^2 - k_4^2) \ln \frac{(k^2 + 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2}{(k^2 - 2p|\mathbf{k}|)^2 + 4E^2 k_4^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2iEk_4 \ln \frac{(k^2 + 2iEk_4)^2 - 4p^2 \mathbf{k}^2}{(k^2 - 2iEk_4)^2 - 4p^2 \mathbf{k}^2} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2}.$$

Некоторые детали вычислений можно найти в приложении.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы доказали эквивалентность фотонных функций Грина в статистических теориях ДКП и КГФ (раздел 2) и вычислили поляризационный оператор в однопетлевом приближении, чтобы проиллюстрировать эту эквивалентность (раздел 3). Было бы интересно доказать эквивалентность многоглюонных функций Грина в статистических неабелевых квантовых теориях поля ДКП и КГФ (см. [10]).

Можно было бы также обобщить доказательство эквивалентности многофотонных функций Грина в статистических теориях ДКП и КГФ на случай заряженных векторных полей, однако это доказательство имело бы формальный характер ввиду неперенормируемости теории.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вывод формулы (35) более подробно. Формулу (33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a_1^R(k^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3} 4\pi(m^2 + k^2) \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \int_0^l p^2 dp \left(p^2 + m^2 + \frac{k^2}{4}(1-x^2) \right)^{-1/2} = \\ &= -\frac{e^2}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{4}{k^2}} \int_0^l p^2 dp (m^2 + k^2) \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx (\alpha + 1 - x^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 4(p^2 + m^2)/k^2$,

$$\begin{aligned} a_1^R(k^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{4}{k^2}} \int_0^l p^2 dp (4m^2 + k^2) \left(\frac{4}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{1/\sqrt{1+\alpha}} \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} = \\ &= -\left(\frac{e^2}{8\pi^2} \right) \int_0^l \frac{p^2 dp}{E} \frac{4m^2 + k^2}{k^2 + 4m^2 + p^2}. \end{aligned}$$

После перенормировки (см. (34)) получим формулу (35).

Благодарности. В.Я. Файнберг благодарит Б.Л. Воронова, И.В. Тютина и А.Е. Шабада за полезные обсуждения. Б.М. Пиментел и Х.С. Валверде благодарят Р. Касана за замечания. Работа была поддержана FAPESP (В.Я. Файнберг, грант № 01/12585-6; Б.М.Пиментел, грант № 02/00222-9; Х.С. Валверде, грант полной поддержки № 00/03812-6), РФФИ (В.Я. Файнберг, грант № 02-01-00556, грант поддержки научных школ № 1578.2003.2) и CNPq (Бразилия) (Б.М. Пиментел).

Список литературы

- [1] *J. Matzubara.* Progr. Theor. Phys. 1953. V. 9. P. 550.
- [2] *E. С. Фрадкин.* ДАН СССР. 1954. Т. 98. С. 47; 1955. Т. 100. С. 897.
- [3] *E. С. Фрадкин.* Тр. ФИАН. 1965. Т. 29. С. 3.
- [4] *J. I. Kapusta.* Finite Temperature Field Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
- [5] *M. Le Bellac.* Thermal Field Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [6] *R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, J. S. Valverde.* Phys. Lett. A. 2003. V. 316. P. 33.
- [7] *C. W. Bernard.* Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 3312.
- [8] *Б. М. Пиментел, В. Я. Файнберг.* ТМФ. 2000. Т. 124. С. 445.
- [9] *V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel.* Braz. J. Phys. 2000. V. 30. P. 275.
- [10] *V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel.* Phys. Lett. A. 2000. V. 271. P. 16.
- [11] *V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, J. S. Valverde.* Dispersion method in DKP theory. In: Proc. of the Intern. Meeting "Quantization, Gauge Theories and Strings" dedicated to the memory of E. S. Fradkin (Moscow, June 5–10, 2000). V. II. Eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin. Singapore: Scientific World, 2001. P. 79.
- [12] *H. J. Rothe.* Lattice Gauge Theories: An Introduction. Singapore: World Scientific, 1996.

Поступила в редакцию 1.VIII.2003 г.