Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Шаров, Классификация ротационных движений для струнной модели ба-
риона “треугольник”, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 2, 277–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:57:30

© 1998 г.

Г. С. Шаров*

КЛАССИФИКАЦИЯ РОТАЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ СТРУННОЙ МОДЕЛИ БАРИОНА “ТРЕУГОЛЬНИК”

Рассматривается модель бариона, в которой три материальные точки (три кварка) попарно соединены релятивистскими струнами, образующими криволинейный треугольник. Для этой модели найдены и изучены классические аналитические решения, отвечающие плоскому равномерному вращению системы в случае произвольных масс кварков m_i . Сечения соответствующих мировых поверхностей плоскостью $t = \text{const}$ являются криволинейными треугольниками, составленными из отрезков гипоциклоиды. Проведена полная классификация движений данного вида, различающихся топологически своей конфигурацией, а также наличием и числом внутренних безмассовых точек струны, движущихся со скоростью света. В основу классификации положено исследование предельных состояний системы при $m_i \rightarrow 0$. Рассчитанная зависимость углового момента исследуемых движений от энергии открывает возможность моделирования с их помощью барионных состояний на реджевских траекториях.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая здесь струнная модель бариона “треугольник” находится в генетической связи с моделью релятивистской струны с массами на концах, которая описывает мезон – состоящую из кварка и антикварка систему, связанную сильным взаимодействием [1, 2]. В этой модели мезона два точечных массивных кварка соединены одномерной протяженной релятивистской струной, закон движения которой определяется условием экстремальности площади поверхности (мировой поверхности), заметаемой этой струной в пространстве Минковского. Струнная модель мезона обеспечивает согласующийся с квантовой хромодинамикой линейно растущий потенциал межкваркового взаимодействия [1, 3] и дает возможность описания мезонных состояний на траекториях Редже [4].

Вслед за мезонными были предложены в нескольких вариантах струнные модели бариона – трехкваркового связанного состояния [1, 5, 6]. При построении этих моделей на классическом уровне необходимо выбрать геометрический характер соединения трех материальных точек релятивистскими струнами. Возможны варианты: а) модель, в которой данные точки соединены двумя отрезками струны, связывающими соответствен-

* Тверской государственный университет, Тверь, Россия

но первый кварк со вторым и второй с третьим; б) модель, в которой три идущих от кварков струны соединяются в четвертой (безмассовой) точке; в) модель “треугольник”.

К настоящему времени подробно разрабатывался лишь вариант “б”, в частности в работах [6]. Модель “а” описана лишь качественно в [5].

В [7] и в продолжающей ее настоящей работе рассматривается струнная модель бариона “треугольник”, которая практически еще не исследована. В этой модели три материальные точки (три кварка) попарно соединены релятивистскими струнами, образуя в каждый момент времени криволинейный треугольник в пространстве. Если натяжения всех трех струн равны, то этот объект можно воспринимать как замкнутую струну, нагруженную тремя точечными массами. С точки зрения описания взаимодействия кварков в барионе данная модель выглядит наиболее естественно среди упомянутых выше.

При переходе от струнной модели мезона к модели бариона “треугольник” возникают дополнительные трудности, связанные, в частности, со следующими обстоятельствами. Мировая поверхность струны в этой модели имеет разрывы производных на траекториях кварков. Для произвольного движения невозможно задать параметризацию, в которой все эти траектории являются координатными линиями, а индуцированная метрика на мировой поверхности – конформно-плоской. Пространственноподобные координатные линии, вообще говоря, не замкнуты.

В настоящей работе эти трудности преодолены для некоторого класса движений системы. В разделе 1 приведены уравнения движения и краевые условия (условия на траекториях кварков) для данной модели. В разделах 2 и 3 найдены и исследованы решения этих уравнений, отвечающие равномерному вращению системы относительно центра масс в некоторой плоскости. В разделе 4 проведена классификация таких решений. В разделе 5 с помощью энергии и момента, вычисленных для найденных движений, исследуются возможности описания барионных состояний на траекториях Редже.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАРКОВ

Мы будем рассматривать модель бариона “треугольник” как замкнутую релятивистскую струну с натяжением γ , нагруженную тремя точечными массами m_1, m_2, m_3 . Действие для этой системы имеет вид [7]

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \gamma \int_{\sigma_0(\tau)}^{\sigma_3(\tau)} [(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2]^{\frac{1}{2}} d\sigma + \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{\left[\frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau)) \right]^2} \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $X^\mu(\tau, \sigma)$ – координаты точки струны в N -мерном пространстве Минковского, скорость света $c = 1$, $(ab) = a^\mu b_\mu$ – (псевдо)скалярное произведение, $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$, $\sigma_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, 3$, – внутренние координаты мировых линий кварков. Уравнения $\sigma = \sigma_0(\tau)$ и $\sigma = \sigma_3(\tau)$ определяют траекторию одного и того же (третьего по счету) кварка, что отражает факт замкнутости струны и в общем виде может быть записано следующим образом:

$$X^\mu(\tau, \sigma_0(\tau)) = X^\mu(\tau^*, \sigma_3(\tau^*)). \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что параметры τ и τ^* , фигурирующие в этих двух параметризациях одной и той же линии, вообще говоря, не совпадают. Это означает, что координатные линии $\tau = \text{const}$ на мировой поверхности не замкнуты, они начинаются (при $\sigma = \sigma_0$) и заканчиваются (при $\sigma = \sigma_3$) в различных точках поверхности и пространства Минковского.

Равенство $\tau = \tau^*$ имеет место лишь при специальном выборе параметров τ и σ , в частности при $\tau = t \equiv X^0$.

Функция $X^\mu(\tau, \sigma)$ на линиях $\sigma = \sigma_i(\tau)$ может иметь разрывы производных (за исключением тангенциальных к данным линиям).

Уравнения движения и краевые условия для данной модели выводятся в работе [7] путем варьирования и минимизации действия (1.1). С помощью невырожденной замены координат $\tau = \tau(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$, $\sigma = \sigma(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$, оставляющей инвариантным действие (1.1), индуцированную метрику на всей мировой поверхности всегда можно сделать непрерывной и привести к конформно-плоскому виду [7], другими словами, ввести координаты, в которых выполнены условия ортонормальности

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad (\dot{X} X') = 0. \quad (1.3)$$

В этих координатах принимают простейший вид уравнения движения

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \quad (1.4)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} m_i \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu + \sigma'_i(\tau) X'^\mu}{\sqrt{\dot{X}^2 \cdot (1 - \sigma_i'^2)}} \Big|_{\sigma=\sigma_i(\tau)} - \gamma (X'^\mu + \sigma'_i(\tau) \dot{X}^\mu) \Big|_{\sigma=\sigma_i+0} + \\ + \gamma (X'^\mu + \sigma'_i(\tau) \dot{X}^\mu) \Big|_{\sigma=\sigma_i-0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для третьего кварка ($i = 3$) в первых двух слагаемых условия (1.5) следует положить $\sigma = \sigma_0(\tau)$, а в последнем — $\sigma = \sigma_3(\tau^*)$ и заменить τ на τ^* , если условие замыкания имеет вид (1.2).

По своему физическому смыслу краевые условия (1.5) являются уравнениями движения (вторым законом Ньютона) для каждой из трех материальных точек, причем действующие на них силы натяжения со стороны двух отрезков струны по модулю равны γ .

С помощью невырожденной замены координат $\tau \pm \sigma = f_\pm(\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma})$ [1], оставляющей инвариантными условия (1.3) и уравнения (1.4), (1.5), можно зафиксировать две из четырех функций $\sigma_i(\tau)$, положив, например,

$$\sigma_1(\tau) = 0, \quad \sigma_2(\tau) = \pi. \quad (1.6)$$

Выполнения первого из условий (1.6) можно добиться выбором функции $f_+(\eta)$, оставляя тождественной $f_-(\eta) = \eta$, выполнения второго — еще одной заменой с $f_+ = f_-$.

После этого в нашем распоряжении останутся лишь сохраняющие (1.6) репараметризации с $f_+(\eta) = f_-(\eta) = \eta + \phi(\eta)$, $\phi(\eta + 2\pi) = \phi(\eta)$, $|\phi'(\eta)| < 1$ [8]. Однако с их помощью для произвольной мировой поверхности невозможно добиться равенства $\sigma_3 = \text{const}$ (и $\sigma_0 = \text{const}$) при всех τ . В связи с этим после наложения условий (1.3) и (1.6) возникает необходимость определения трех функций $\sigma_0(\tau)$, $\sigma_3(\tau)$ и $\tau^*(\tau)$, что существенно усложняет, например, решение начально-краевой задачи для данной барионной модели по сравнению с аналогичной задачей для струны, моделирующей мезон [9].

Для рассматриваемых в настоящей работе равномерных вращений системы вид упомянутых трех функций определяется соображениями симметрии.

2. РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПЛОСКИЕ РАВНОМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ

В работе [7] было получено решение поставленной задачи, описывающее равномерное вращение системы (из трех материальных точек вместе со связывающей их релятивистской струной) в плоскости xy относительно начала координат. При этом форма замкнутой струны одинакова во все моменты времени. Траектории кварков в $(2+1)$ -мерном пространстве Минковского являются винтовыми линиями и заданы внутренними уравнениями $\sigma = \sigma_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Это решение имеет вид

$$X^\mu = \{t_0 + a\tau + b\sigma; u(\sigma) \cos \omega\tau - \tilde{u}(\sigma) \sin \omega\tau; u(\sigma) \sin \omega\tau + \tilde{u}(\sigma) \cos \omega\tau\}. \quad (2.1)$$

В данное выражение входят константы a, b, ω и функции $u(\sigma)$, $\tilde{u}(\sigma)$, где

$$u(\sigma) = \begin{cases} A_0 \cos \omega\sigma + B_0 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1], \\ A_1 \cos \omega\sigma + B_1 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ A_2 \cos \omega\sigma + B_2 \sin \omega\sigma, & \sigma \in [\sigma_2, \sigma_3], \end{cases} \quad \begin{matrix} A_1 \equiv A, \\ B_1 \equiv B, \end{matrix} \quad (2.2)$$

а функция $\tilde{u}(\sigma) = \tilde{A}_i \cos \omega\sigma + \tilde{B}_i \sin \omega\sigma$, $\sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, устроена аналогично. Обозначения $\tilde{A}_1 \equiv \tilde{A}$, $\tilde{B}_1 \equiv \tilde{B}$ также считаем эквивалентными.

Амплитудные множители $A_i, \tilde{A}_i, B_i, \tilde{B}_i$ выбраны так, что функции $u(\sigma)$ и $\tilde{u}(\sigma)$ непрерывны на $[\sigma_0, \sigma_3]$, но могут иметь разрывы производной при $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$.

Значения σ_1 и σ_2 без ограничения общности можно выбрать в виде $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$, как и в (1.6), ниже этот выбор будет подразумеваться везде, если не оговорено противное. Заметим, что после наложения условий (1.6) две другие константы σ_0 и σ_3 задавать произвольным образом нельзя, они будут определены ниже из системы уравнений.

Выражение (2.1) является решением уравнений движения (1.4). Потребуем, чтобы оно удовлетворяло условиям ортонормальности (1.3), условиям замыкания (1.2) и краевым условиям (1.5). Подстановка (2.1) в два краевых условия (1.5) с $i = 1, 2$ в совокупности с условиями непрерывности функций $u(\sigma)$ и $\tilde{u}(\sigma)$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$ дает по четыре уравнения для u и $\tilde{u}$, позволяющих выразить все A_i, B_i через A и B (и по этим же формулам — $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$):

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_2 &= (1 + h_2 cs)A + h_2 s^2 B, \\ B_0 &= h_1 A + B, & B_2 &= -h_2 c^2 A + (1 - h_2 cs)B, \end{aligned} \quad (2.3)$$

здесь введены обозначения

$$c \equiv c_1 = \cos \omega(\sigma_2 - \sigma_1) = \cos \pi\omega, \quad s \equiv s_1 = \sin \pi\omega, \quad h_i = \frac{\omega m_i}{\gamma C_i},$$

где

$$C_i = \sqrt{\dot{X}^2} \Big|_{\sigma=\sigma_i} = \text{const}.$$

Требование выполнения условий ортонормальности (1.3) для решений (2.1) приводит к системе уравнений

$$A_i^2 + B_i^2 + \tilde{A}_i^2 + \tilde{B}_i^2 = (a^2 + b^2)/\omega^2, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.4)$$

$$A_i \tilde{B}_i - \tilde{A}_i B_i = ab/\omega^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.5)$$

Три уравнения (2.4) независимы, тогда как из уравнений (2.5) в качестве независимого можно оставить только одно, отвечающее $i = 1$. Если оно выполнено, то остальные два удовлетворяются автоматически в случае, если имеют место равенства (2.3).

Во введенной указанным образом координатной сети линии $\tau = \text{const}$ (не совпадающие с сечениями $t = \text{const}$) не замкнуты, и в условии замыкания (1.2) имеем $\tau^* \neq \tau$. Однако вследствие свойств симметрии мировой поверхности относительно поворота и одновременной трансляции вдоль оси $t = x^0$ связь между τ и τ^* достаточно проста: $\tau^* = \tau + \text{const}$.

Для того чтобы выражение (2.1) было решением поставленной задачи, осталось потребовать выполнения условия замыкания (1.2) и краевого условия (1.5) на траектории третьего ($i = 3$) кварка. Обозначим через $-\theta/\omega$ константу, фигурирующую в этих условиях:

$$\tau^* = \tau - \theta/\omega, \quad \theta = D\omega b/a, \quad \text{где } D = \sigma_3 - \sigma_0. \quad (2.6)$$

Выражение для θ получено подстановкой $X^0 = t_0 + a\tau + b\sigma$ в условие замыкания (1.2). Угол θ имеет следующий геометрический смысл: если провести на мировой поверхности линию $\tau = \text{const}$, $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_3$, то θ есть разность фаз между началом этой линии (при $\sigma = \sigma_0$) и ее концом (при $\sigma = \sigma_3$) на винтовой траектории третьего кварка.

Подставим выражения (2.1)–(2.3) в краевое условие (1.5) и условие замыкания (1.2) при $\mu = 1, 2$. Значения функций $u(\sigma)$, $\tilde{u}(\sigma)$ и их производных в точках $\sigma = \sigma_0$ и $\sigma = \sigma_3$ выразим с помощью (2.3) через A , B , $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, например:

$$u(\sigma_3) = [\cos \omega\sigma_3 - h_2 c \sin \omega(\sigma_3 - \pi)]A + [\sin \omega\sigma_3 - h_2 s \sin \omega(\sigma_3 - \pi)]B.$$

В четырех уравнениях (1.2) и (1.5) с $\mu = 1, 2$, которые должны выполняться при всех τ , выразим τ^* с помощью (2.6) и приравняем подобные члены при $\cos \omega\tau$ и $\sin \omega\tau$. Восемь получившихся равенств попарно совпадают и образуют линейную однородную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными амплитудами A , B , $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, имеющую достаточно громоздкий вид. Для упрощения записи и выявления структуры этой системы обозначим

$$\begin{aligned} \delta_i &= \sigma_{i+1} - \sigma_i, & D &= \sigma_3 - \sigma_0 = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2, \\ c_i &= \cos \omega\delta_i, & s_i &= \sin \omega\delta_i, & c_* &= \cos \omega\sigma_3, & s_* &= \sin \omega\sigma_3 \end{aligned}$$

и введем матричные обозначения, в которых данная система будет состоять из двух уравнений (каждое из них – столбец):

$$M_1 \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad M_3 \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

здесь

$$\begin{aligned} M_1 &= (h_1 s_0 - c_0)E + (c_* - h_2 c s_2)U, & M_2 &= -s_0 E - (s_* - h_2 s s_2)U, \\ M_3 &= [(1 - h_1 h_3)s_0 + (h_1 + h_3)c_0]E + (s_* + h_2 c c_2)U, \\ M_4 &= (h_3 s_0 - c_0)E + (c_* - h_2 s c_2)U, \\ U &= U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

E – единичная матрица. Первое из уравнений (2.7) – следствие условия замыкания (1.2), второе – следствие условия (1.5).

Если учесть взаимную коммутативность матриц M_k и исключить из системы (2.7) столбец с A и $\tilde{A}$ или столбец с B и $\tilde{B}$, то окажется, что каждый из них аннулируется одной и той же матрицей:

$$M \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} = 0, \quad M \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

где $M = M_1 M_4 - M_2 M_3 = E + U^2 - F U = (2 \cos \theta - F)U$ (здесь использовано тождество $E + U^2(\theta) = 2 \cos \theta \cdot U$). Величину

$$F = 2 \cos \omega D - (h_1 + h_2 + h_3) \sin \omega D + \sum_{i=0}^2 h_i h_{i+1} s_i \sin \omega (D - \delta_i) - h_1 h_2 h_3 s_0 s s_2$$

($h_0 \equiv h_3$) после введения обозначений

$$\begin{aligned} G_1 &= (h_1 s_0 s - s_0 c - s c_0)/s_2, & G_2 &= (h_2 s s_2 - s c_2 - s_2 c)/s_0, \\ G_3 &= (h_3 s_0 s_2 - s_0 c_2 - s_2 c_0)/s \end{aligned} \quad (2.9)$$

удобно преобразовать к простому виду

$$F = G_1 + G_2 + G_3 - G_1 G_2 G_3.$$

Однородные системы (2.8) имеют интересующее нас нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\det M = 0$, что с учетом $\det U = 1$ равносильно равенству

$$2 \cos \theta = G_1 + G_2 + G_3 - G_1 G_2 G_3. \quad (2.10)$$

При выполнении (2.10) матрица M обращается в нуль. Поэтому в качестве собственного можно выбрать произвольный ненулевой “вектор”

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix},$$

в частности, как это сделано в приводимых ниже примерах, можно положить $A = 0$ (при этом $\tilde{A}$, B , $\tilde{B}$ отличны от нуля). Этот факт связан с поворотной симметрией в выражениях (2.1), (2.2).

При выполнении условия (2.10) два матричных уравнения системы (2.7) становятся равносильными, и с помощью любого из них можно определить, например, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ по заданным произвольно A и B :

$$\tilde{A} = -K \cdot (h_1 A + 2B), \quad \tilde{B} = K \cdot (2HA + h_1 B), \quad (2.11)$$

где

$$K = \frac{s_0 s (G_2 G_3 - 1)}{2s_2 \sin \theta}, \quad H = \frac{1 + h_1^2 K^2}{4K^2} = 1 + \frac{1}{s} \left(h_1 c + \frac{h_1 - h_2}{h_2 s - 2c} \right). \quad (2.12)$$

Подставим эти величины в уравнения (2.4) и (2.5), порождаемые условиями ортонормальности (1.3). После преобразований убедимся, что соотношения (2.4) выполняются только тогда, когда параметры ω , δ_i и G_i связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{G_3 - G_2}{G_2 G_3 - 1} &= \frac{s c_0 - s_0 c}{s_2}, & \frac{G_1 - G_3}{G_1 G_3 - 1} &= \frac{s_2 c - s c_2}{s_0}, \\ \frac{G_2 - G_1}{G_1 G_2 - 1} &= \frac{s_0 c_2 - s_2 c_0}{s}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из этих условий лишь два являются независимыми.

Подставив выражения (2.11) в условия (2.4) и (2.5), выразив с помощью (2.8) параметр $b = a\theta/(D\omega)$ и проведя ряд преобразований с помощью (2.9)–(2.13), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a^2 \theta / (D\omega^3) &= 2K (HA^2 + h_1 AB + B^2), \\ a^2 \omega^{-2} [1 + (\theta/(D\omega))^2] &= [1 + (4 + h_1^2)K^2] (HA^2 + h_1 AB + B^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Исключая из этой системы множители $B^{*2} = HA^2 + h_1 AB + B^2$ и a , придем к соотношению

$$\frac{D\omega\theta}{D^2\omega^2 + \theta^2} = \frac{4s_0 s s_2 (G_2 G_3 - 1) \sin \theta}{4s_2^2 \sin^2 \theta + (4 + h_1^2)s_0^2 s^2 (G_2 G_3 - 1)^2}. \quad (2.15)$$

Это уравнение определяет для рассматриваемых движений набор допустимых частот ω , если заданы параметры G_i , δ_i и θ . Таким образом, характеризующий движение системы с точностью до масштабного множителя набор параметров ω , G_i , δ_i и θ определяется посредством решения достаточно сложной системы уравнений (2.9), (2.10), (2.13), (2.15).

После определения этих величин можно произвольным образом задать амплитудные параметры A и B (в частности, положить $A = 0$) и с помощью формул (2.14), (2.8), (2.11), (2.3) найти окончательно вид мировой поверхности (2.1).

3. МИРОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ СЕЧЕНИЯ ПЛОСКОСТЯМИ $t = \text{const}$

Простейшая схема построения мировой поверхности вида (2.1), отвечающей равномерному вращению рассматриваемой системы, предполагает задание параметров (2.9) G_1, G_2, G_3 в качестве исходных данных. Следующим шагом в этой схеме является определение значения угла θ по формуле (2.10) и величин δ_i с помощью соотношений (2.13). После подстановки G_i, δ_i и θ в уравнение (2.15) набор допустимых частот ω – корней этого уравнения – может быть найден численно, например с помощью метода секущих [10].

На каждом шаге этой схемы соответствующие параметры определяются неоднозначно, например, удовлетворяющие (2.10) значения $\theta = \theta_{j_1}$ образуют счетный набор, нулевым дискретным параметром j_1 .

Параметры (2.14) δ_0 и δ_2 (значение $\delta_1 = \pi$ зафиксировано без потери общности) находятся с помощью (2.13) по заданным G_i так же неоднозначно. Эту процедуру можно реализовать, например, записав правую часть последнего уравнения (2.13) в виде $s^{-1} \sin \omega(\delta_0 - \delta_2)$. Это уравнение позволяет определить величину

$$\delta_{02} = \delta_0 - \delta_2 = \frac{1}{\omega} \left[(-1)^{j_2} \arcsin s \frac{G_2 - G_1}{G_1 G_2 - 1} + \pi j_2 \right], \quad j_2 \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

При этом появляется дополнительный произвол в выборе дискретного параметра j_2 .

Подстановка $\delta_2 = \delta_0 - \delta_{02}$ во второе из уравнений (2.13) дает возможность определить значения

$$\delta_0 = \frac{1}{\omega} \left[\text{arctg} \frac{\sin \omega(\delta_{02} + \pi)}{\cos \omega(\delta_{02} + \pi) - (G_1 - G_3)/(G_1 G_3 - 1)} + \pi j_3 \right], \quad j_3 \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

и δ_2 “с точностью” до третьего дискретного параметра j_3 .

Подстановка G_i, δ_i и θ в (2.15) приводит к счетному набору корней этого уравнения – частот ω_l .

В результате описанной процедуры возникает набор решений поставленной задачи, различающихся в топологическом смысле.

В работе [7] был подробно рассмотрен частный случай, в котором конфигурация системы с тремя одинаковыми кварками симметрична относительно циклических перестановок. При этом для всех трех кварков равны значения m_i, C_i, Q_i , а также

$$G_1 = G_2 = G_3 = G, \quad (3.3)$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \pi \Leftrightarrow \sigma_0 = -\pi, \quad \sigma_3 = 2\pi. \quad (3.4)$$

Отметим, что (3.3) следует из (3.4) в силу соотношений (2.13). Обратное, вообще говоря, неверно: при выполнении (3.3) имеют место решения (2.13) с $\omega(\delta_i - \delta_j) = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, соответствующие выбору различных значений j_2 и j_3 в (3.1), (3.2).

Рассмотрим ситуацию, когда соотношения (3.3) и (3.4) не выполнены, в частности случай произвольных масс кварков. Параметры мировой поверхности определяются с помощью описанной выше процедуры. Чтобы иметь представление о соответствующем вращательном движении системы, достаточно рассмотреть сечение мировой поверхности плоскостью $t = t_0 = \text{const}$. Криволинейный треугольник, получающийся в сечении, можно воспринимать как “фотографию” положения струны в момент времени t .

Рис. 1. Простые движения системы с $m_1 = 3$, $m_2 = m_3 = 1$.

Характерный вид данных сечений мировой поверхности показан на рис. 1–3. В целях экономии места на рис. 1, 2 изображено по три кривые, “вложенные” одна в другую за счет выбора амплитуды B , на рис. 3 кривые разнесены пространственно.

Рис. 2. Простые движения системы с $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$.

Параметризацию сечений, показанных на рис. 1–3, приведем для случая $A = 0$ (этот

Рис. 3. Примеры экзотических состояний.

выбор влияет на ориентацию, но не на форму кривой) на отрезке $\sigma \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} x &= B \left[\sin \omega \sigma \cdot \cos \frac{\theta}{D} \sigma + K(h_1 \sin \omega \sigma - 2 \cos \omega \sigma) \sin \frac{\theta}{D} \sigma \right], \\ y &= B \left[-\sin \omega \sigma \cdot \sin \frac{\theta}{D} \sigma + K(h_1 \sin \omega \sigma - 2 \cos \omega \sigma) \cos \frac{\theta}{D} \sigma \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Величины D , h_1 и K определяются соответственно формулами (2.6), (2.9) и (2.12).

С помощью (2.3) выражения вида (3.5) можно получить и для двух других сторон криволинейного треугольника. Так, в частности, при $\sigma \in [\sigma_0, 0]$ в (3.5) достаточно заменить $(h_1 \sin \omega \sigma - 2 \cos \omega \sigma)$ на $(-h_1 \sin \omega \sigma - 2 \cos \omega \sigma)$.

Изображенные на рис. 1–3 кривые вращаются в плоскости xy с угловой частотой $\Omega = \omega/a$. Значение параметра a определяется из (2.14):

$$a = \sqrt{2DK\omega^3\theta^{-1}} B^*, \quad (3.6)$$

амплитудный множитель $B^* = \sqrt{HA^2 + h_1AB + B^2}$ в случае $A = 0$ равен $|B|$. При этом кварки движутся со скоростями v_i по окружностям радиусов R_i , где

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2K\theta}{D\omega}} = \sqrt{\frac{\theta s s_0 (G_2 G_3 - 1)}{D\omega s_2 \sin \theta}}, & v_2 &= \sqrt{\frac{\theta s s_2 (G_1 G_3 - 1)}{D\omega s_0 \sin \theta}}, \\ v_3 &= \sqrt{\frac{\theta s_0 s_2 (G_1 G_2 - 1)}{D\omega s \sin \theta}}, & R_i &= \frac{v_i}{\Omega} = \frac{a}{\omega} v_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Напомним, что в выбранных единицах измерения скорость света равна 1.

Ротационное движение (состояние) системы будем называть *простым*, если сечение мировой поверхности плоскостью $t = \text{const}$ является криволинейным треугольником с гладкими сторонами без особенностей. Такие конфигурации показаны на рис. 1 и 2. Движения, не относящиеся к категории простых (см. рис. 3), будем называть *экзотическими*.

Движение системы является простым (рис. 1, 2) тогда и только тогда, когда выполнены ограничения

$$|\theta| \leq \pi, \quad G_i > 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad G_1 + G_2 + G_3 - G_1 G_2 G_3 \geq -2, \quad (3.8)$$

при этом ω – минимальный по модулю ненулевой корень (2.15), удовлетворяющий условиям $|\omega| \delta_i \leq \pi$, $i = 0, 1, 2$. В частном случае равенства двух масс, например $m_2 = m_3$, условия (3.8) для G_i принимают вид $G_1 > 1$, $1 < G_2 = G_3 < 1 + 2/G_1$, в симметричном случае (3.3)–(3.4): $1 < G_1 = G_2 = G_3 < 2$.

На рис. 1 и 2 показана зависимость формы криволинейного треугольника от скорости вращения при фиксированных значениях m_i , которые равны $m_1 = 3$, $m_2 = m_3 = 1$ (см. рис. 1) и $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ (см. рис. 2). В такой постановке исходными данными являются значения масс кварков (исследуются движения одной и той же системы) и один из параметров, связанных со скоростью вращения, например G_1 . Массы m_i и другие параметры модели связаны следующим образом:

$$m_i = \frac{\gamma}{\omega} C_i h_i = \frac{\gamma}{\omega} a h_i \sqrt{1 - v_i^2}, \quad (3.9)$$

здесь параметр a определяется формулой (3.6), а v_i – формулой (3.7).

Для решения системы нелинейных уравнений (2.9)–(2.15), (3.7), (3.9) используем следующий подход. Наряду с фиксированным G_1 задаем пробные значения G_2 и G_3 . На этой основе определяем с помощью (2.10), (2.15), (3.1), (3.2) значения θ , ω и δ_i . Дискретные параметры j_1, j_2, j_3 выбираем в соответствии с исследуемым состоянием. Вычисленные с помощью (3.7), (3.9) значения отношений масс m_i/m_1 , $i = 2, 3$, с ростом номера итерации n стремятся к заданным отношениям масс. В основу итерационного процесса был положен двумерный вариант метода секущих [10]. Отметим, что данный итерационный метод используется здесь на двух уровнях, причем на первом – при решении системы уравнений (3.1), (3.2), (2.15) с одновременным определением ω , δ_0 и δ_2 .

На рис. 1 и 2 изображены состояния, характеризуемые различными значениями скорости вращения. Амплитуды B^* были выбраны так, что размер малых внутренних треугольников в несколько раз увеличен по сравнению с естественным (чем выше скорости v_i , тем больше размер треугольника), а размер внешних в несколько раз уменьшен. Естественным здесь назван размер или масштабный фактор B_n^* , определяемый формулами (3.9), (3.6) и отвечающий разным движениям одной и той же системы с теми же m_i и γ . Для средних треугольников на рис. 1 и 2 имеем $\gamma = 1$, для остальных естественный масштаб не сохранен из-за сильной зависимости размеров R_i от скорости вращения. Значения G_1, G_2 , минимальной v_1 и максимальной v_2 скоростей, коэффициента

увеличения B/B_n и другие для простых движений на рис. 1 и 2 приведены ниже (первые столбцы описывают внутренние треугольники):

К рис. 1 ($m_i = 3, 1, 1$)				К рис. 2 ($m_i = 4, 2, 3$)			
G_1	=	1.61	2.3	2.7	G_1	=	1.15 1.7 2.2
G_2	≈	1.0023	1.31	1.68	G_2	≈	1.041 1.312 1.69
ω	≈	0.168	0.387	0.77	ω	≈	0.143 0.386 0.75
θ	≈	0.053	1.063	2.46	θ	≈	0.139 0.923 2.328
v_1	≈	0.025	0.433	0.908	v_1	≈	0.145 0.497 0.91
v_2	≈	0.503	0.768	0.97	v_2	≈	0.354 0.711 0.954
δ_2	≈	6.25	4.38	3.392	δ_2	≈	3.955 3.493 3.222
B/B_n	=	1.7	1	0.19	B/B_n	=	5 1 1/7

При уменьшении скоростей кварков v_i , значений параметров ω и θ криволинейный треугольник стремится к прямолинейному. Предельная форма последнего зависит от того, удовлетворяют ли значения масс m_i неравенству треугольника. Если одна из масс превышает сумму двух других, например $m_1 > m_2 + m_3$ (см. рис. 1), то в пределе $\theta \rightarrow 0$ величина тупого угла в вершине, соответствующей максимальной из масс m_1 , стремится к π , а треугольник по форме приближается к отрезку. Предел $\theta = 0$, $R_1 = 0$, $v_1 = 0$ (при этом $\delta_2 = \delta_0 + \delta_1$, $G_2 = G_3 = 1 + 0$, $G_1 > 1$) достигается при конечных значениях ω , $v_2 = s$, $v_3 = s_0$. При дальнейшем уменьшении скоростей v_2 и v_3 тяжелый кварк оказывается в центре вращения, а струна сохраняет форму отрезка. Данная конфигурация выглядит как вращение нагруженной тяжелым кварком прямолинейной релятивистской струны с натяжением 2γ , моделирующей мезон [1, 4, 11].

Если неравенство треугольника для m_i выполнено (см. рис. 2), то в нерелятивистском пределе для величин (2.9) имеем $G_i \rightarrow 1 + 0$, а длины сторон ℓ_{ij} (между кварками m_i и m_j) прямолинейного треугольника пропорциональны как соответствующим δ_i , так и массам в противоположных вершинах:

$$\frac{\ell_{12}}{\delta_1} = \frac{\ell_{23}}{\delta_2} = \frac{\ell_{31}}{\delta_0}, \quad \frac{\delta_1}{m_3} = \frac{\delta_2}{m_1} = \frac{\delta_0}{m_2} \quad (\omega \rightarrow 0, \quad v_i \rightarrow 0). \quad (3.10)$$

В противоположном ультрарелятивистском пределе $v_i \rightarrow 1$ для простых состояний величины δ_0 и δ_2 стремятся к $\delta_1 = \pi$, $|\omega| \rightarrow 1 - 0$, $|\theta| \rightarrow \pi - 0$, а криволинейный треугольник вне зависимости от значений m_i стремится по форме к трехзвенной гипоциклоиде

$$x = B \left(2 \sin \frac{2}{3} \sigma - \sin \frac{4}{3} \sigma \right), \quad y = -B \left(2 \cos \frac{2}{3} \sigma + \cos \frac{4}{3} \sigma \right), \quad \sigma \in [-\pi, 2\pi] \quad (3.11)$$

(гипоциклоида – траектория точки окружности, катящейся внутри неподвижной окружности большего радиуса [12]). В случае (3.11) отношение этих радиусов равно 3, такую гипоциклоиду называют дельтоидой.

Предельный переход $v_i \rightarrow 1$ или $m_i \rightarrow 0$ к (3.11), а также движения замкнутых безмассовых струн, являющиеся вращениями гипоциклоид, рассмотрены в разделе 4.

Криволинейные треугольники, изображенные на рис. 1–3, также составлены из фрагментов гипоциклоиды. Отметим, что линия с параметризацией (3.5) при $\sigma \in \mathbb{R}$ является гипоциклоидой тогда и только тогда, когда параметры ω , θ , D и G_i связаны условием (2.15). Для этой гипоциклоиды отношение радиусов окружностей $2(1 - |b/a|)^{-1} = 2(1 - |\theta/(D\omega)|)^{-1}$ не обязательно рационально.

Классифицируя движения системы, отметим, что замена θ на $-\theta$ меняет направление обхода криволинейного треугольника при изменении σ от σ_0 до σ_3 , а замена ω на $-\omega$ меняет направление вращения (если θ и ω удовлетворяют (2.15), то этому уравнению удовлетворяют и $-\theta$, и $-\omega$).

Перейдем к рассмотрению экзотических состояний системы, примеры которых приведены на рис. 3. Аналогичные состояния имеют место и для струны, моделирующей мезон [8, 11]. Они характеризуются наличием внутренних (безмассовых) точек струны, движущихся со скоростью света. На мировых линиях этих точек метрика имеет особенности вида $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$. На рис. 3 эти особенности, являющиеся точками возврата гипоциклоид, не следует путать с материальными точками (положениями кварков). В последних фрагменты струны соединены под ненулевым углом, тогда как в особых точках соответствующий угол равен нулю. На рис. 3 (а также рис. 1 и 2) кварк под номером 1 занимает нижнее положение, т.е. имеет координаты $x = 0$, $y < 0$, определяемые выбором $A = 0$, $B > 0$, $t - t_0 = 0$. Кварки с номерами 2 и 3 расположены в порядке обхода струны против часовой стрелки. В центре вращения – номер кривой.

Исходными данными для построения представленных кривых служат значения G_i и выбранные каким-либо образом j_i и l в (3.1), (3.2), (2.15). В симметричном случае (3.3), (3.4) число особенностей $\dot{X}^2 = 0$ на сторонах криволинейного “треугольника” одинаково (кривые 4, 6 и 8 на рис. 3), если же (3.4) не выполнено, возможны конфигурации с различным числом этих особенностей, технически реализуемые с помощью выбора параметров j_2 и j_3 в формулах (3.1) и (3.2).

Введем для описания типа состояния системы символ (n_1, n_2, n_3) , где n_1 – число особенностей на отрезке струны между 1-м и 2-м кварками, n_2 – между 2-м и 3-м, n_3 – между 3-м и 1-м. Эта характеристика неполна, топологически различные кривые 2 и 3 на рис. 3 имеют один и тот же тип $(1, 0, 1)$ (то же относится и к кривым 4 и 6 типа $(1, 1, 1)$).

Опишем кратко изображенные на рис. 3 кривые. Четырехугольная кривая 1 представляет простейшее экзотическое состояние типа $(1, 0, 0)$ с одной особенностью и отвечает значениям $G_1 = 0.2$, $G_2 = -0.4$, $G_3 = -0.2$, $\omega \simeq 1.23$, $\theta \simeq 1.78$, $j_i = 0$. Соответствующие значения масс кварков следующие: $m_1 \simeq 3.04$, $m_2 \simeq 2.59$, $m_3 \simeq 3.36$ при $\gamma = 1$. Пятиугольная линия 2 характеризуется значениями $G_1 = 0.2$, $G_2 = 0.1$, $G_3 = 0.5$, $\theta \simeq 5.12$; звездообразная пятилучевая конфигурация 3 – значениями $G_1 = 1.9$, $G_2 = G_3 = 1.7$, $v_1 \simeq 0.534$, $v_2 = v_3 \simeq 0.6$, $\omega \simeq 1.37$, $\theta \simeq 1.67$, $j_1 = 0$, $j_2 = 1$ и $j_3 = 1$ (в точках самопересечения различные отрезки струны вида (1.1) не взаимодействуют).

Кривые 4–6 на рис. 3 представляют различные экзотические состояния системы с одинаковыми массами кварков $m_1 = m_2 = m_3$, удовлетворяющие условию (3.3). При этом кривые 4 и 6 описывают симметричные (условие (3.4) выполнено) движения типа $(1, 1, 1)$ различной конфигурации. Симметричный криволинейный шестиугольник 4

характеризуется значениями $G_1 = G_2 = G_3 = G = 0$, $\theta = 5\pi/2$, $\omega \simeq 1.35$. У этой кривой “массивные” вершины (с кварками, движущимися со скоростью $v \simeq 0.742$) чередуются с безмассовыми, движущимися со скоростью света. Кривая 6 с самопересечениями определяется значениями $G = -1$, $\theta = \pi$, $\omega \simeq 1.27$. Кривая 5 имеет тип $(0, 1, 2)$, соответствует одинаковым значениям $G_1 = G_2 = G_3 = 1.5$, $m_1 = m_2 = m_3 \simeq 0.4$ и иллюстрирует недостаточность выполнения условия (3.3) для симметричности движения. Величины $\delta_0 \simeq 17.7\pi$, $\delta_2 \simeq 9.4\pi$, $\omega \simeq 0.12$ и $\theta \simeq 5.31$ в этом случае обеспечивают различное число особенностей на сторонах “треугольника”.

Семиугольная звездчатая кривая 7 имеет тип $(1, 3, 0)$ и характеризуется значениями $G_1 = G_2 = 2$, $G_3 = 1.5$, $\omega \simeq 1.27$, $\theta \simeq 1.82$, $j_2 = -3$.

Криволинейный “треугольник” 8 соответствует симметричному решению с $G = 0.9$, $\theta \simeq 6.11$, $\omega \simeq 2.276$ и имеет по две особенности на каждой из струн, соединяющих кварки. При изменении σ от $-\pi$ до 2π эта замкнутая кривая обходится трижды, три кварка совмещены в нижней из вершин, каждый отрезок данной кривой образован тремя совмещенными струнами.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТИПОВ РОТАЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Перейдем к упорядочению представленного в предыдущем разделе обширного набора различных в топологическом смысле состояний вращающейся релятивистской струны, нагруженной тремя материальными точками. В основу классификации положим исследование предельных конфигураций мировых поверхностей и их сечений $t = \text{const}$ в случае, когда массы кварков стремятся к нулю. При непрерывном изменении значений масс m_i рассматриваемое движение остается в рамках одного и того же топологического класса. В пределе $m_i \rightarrow 0$ каждому такому классу будет соответствовать некоторое ротационное движение (вращение) замкнутой безмассовой релятивистской струны, имеющей, как будет показано ниже, форму гипоциклоиды.

Рассмотрим предельный переход $m_i \rightarrow 0$. Анализ выражений (2.9)–(2.15), (3.7), (3.9) показывает, что в этом пределе независимо от отношений масс m_i параметры простого или экзотического состояния типа (n_1, n_2, n_3) стремятся к следующим значениям: $v_i \rightarrow 1$, $h_i \rightarrow 0$, $|\omega|\delta_i \rightarrow \pi(1 + n_i) - 0$, $|\theta| \rightarrow \pi k - 0$, k – целое. Введем на мировой поверхности (2.1) новые координаты τ , σ (отличающиеся от старых домножением на константу $1 + n_1$), в которых условие (1.6) заменено более общим: $\sigma_2 = \delta_1 = \pi(1 + n_1)$. В таких координатах предел $m_i \rightarrow 0$ соответствует $\omega \rightarrow 1 - 0$. Вводя малые отклонения величин ω , θ , δ_0 , δ_2 от предельных значений

$$\omega = 1 - \varepsilon, \quad \delta_0 = \pi(1 + n_3) - \Delta_0, \quad \delta_2 = \pi(1 + n_2) - \Delta_2 \quad (4.1)$$

и подставляя эти выражения в (2.9)–(2.15), (3.7), находим, что при $m_i \rightarrow 0$

$$\theta = \pi k \left(1 - \varepsilon - \frac{\Delta_0 + \Delta_2}{\pi n} \right), \quad \lim_{m_i \rightarrow 0} 2K = \frac{n}{k}. \quad (4.2)$$

С учетом (2.11) приходим к следующему предельному выражению для мировой поверхности (2.1), описывающему все отрезки струны:

$$X^\mu = \tilde{B} \{ n\tau + k\sigma; k \sin \sigma \cos \tau + n \cos \sigma \sin \tau; k \sin \sigma \sin \tau - n \cos \sigma \cos \tau \}. \quad (4.3)$$

Здесь $\sigma \in [0, \pi n]$, зафиксирована “калибровка” $A = 0$, а целочисленные параметры n и k , фигурирующие в (4.2) и (4.3), определяются и ограничены в своих значениях следующим образом:

$$n = \lim_{m_i \rightarrow 0} \omega \frac{D}{\pi}, \quad k = \lim_{m_i \rightarrow 0} \frac{\theta}{\pi}, \quad n \geq 3, \quad |k| \leq n - 2, \quad n - k \text{ чётно}. \quad (4.4)$$

В частности, для простых состояний имеем $n = 3$, $|k| = 1$; сечение соответствующей поверхности (4.3) плоскостью $t = \text{const}$ – дельтоида вида (3.11).

Эти поверхности с точностью до масштабирования и движений в пространстве Минковского определяются двумя параметрами n и k и замечаются вращающейся релятивистской струной, имеющей форму гипоциклоиды [12]

$$\begin{aligned} x &= B \left(k \sin \sigma \cos \frac{k}{n} \sigma - n \cos \sigma \sin \frac{k}{n} \sigma \right), \\ y &= -B \left(k \sin \sigma \sin \frac{k}{n} \sigma + n \cos \sigma \cos \frac{k}{n} \sigma \right), \quad \sigma \in [0, \pi n], \end{aligned} \quad (4.5)$$

с n точками возврата $\sigma = \pi j$, которые движутся со световой скоростью. Гипоциклоида (4.5), являющаяся сечением поверхности (4.3) плоскостью $t = \text{const}$, характеризуется рациональным отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей

$$\frac{R}{r} = \frac{2n}{n - |k|}. \quad (4.6)$$

В случае $|k| = n - 2$ это отношение равно n и кривая не имеет самопересечений. Случаю $|k| \leq n - 4$ соответствует звездобразная гипоциклоида с самопересечениями.

Числа особенностей на сторонах “треугольника” n_1, n_2, n_3 удовлетворяют предельным соотношениям

$$n_1 + 1 = \lim_{m_i \rightarrow 0} \omega \delta_1 / \pi, \quad n_2 + 1 = \lim_{m_i \rightarrow 0} \omega \delta_2 / \pi, \quad n_3 + 1 = \lim_{m_i \rightarrow 0} \omega \delta_0 / \pi.$$

Отсюда следует связь между значением параметра n , определенного в (4.4), и числом особенностей $n_1 + n_2 + n_3$ исследуемого состояния системы:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + 3. \quad (4.7)$$

Это означает, что в ультрарелятивистском пределе $v \rightarrow 1$ или $m_i \rightarrow 0$ состояние типа (n_1, n_2, n_3) стремится к вращающейся гипоциклоиде вида (4.5), причем к $n_1 + n_2 + n_3$ особым точкам добавляются три бывшие “массивные”.

Отметим, что мировые поверхности (4.3) можно связать, абстрагировавшись от исходной модели, с движениями замкнутой безмассовой релятивистской струны. Нетрудно проверить, что в рамках этой модели выражение (4.3) является решением уравнения (1.4), удовлетворяет условиям ортонормальности (1.3) и условию замыкания вида (1.2) $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau - \pi k, \pi n)$ при $n \geq 2$ и указанных в (4.4) значениях k .

Параметр k в (4.3)–(4.5) может принимать значения $n - 2, n - 4, \dots, -(n - 2)$, однако состояния, получающиеся заменой k на $-k$, отличаются лишь направлением обхода кривой (4.5) и должны быть отнесены к одному топологическому типу. Это связано с инвариантностью типа движения (2.1) относительно замены θ на $-\theta$. Топологические типы с совпадающими значениями n , но различными $k \geq 0$ различны.

Состояния системы с одинаковыми числами n_1, n_2, n_3, k , а также в силу (4.7) и n относятся к одному и тому же топологическому типу. Напротив, состояния относятся к различным топологическим типам, если у них не совпадают значения n , или $k \geq 0$, или соответствующие тройки n_1, n_2, n_3 не получаются друг из друга перестановкой, которая эквивалентна перенумерации кварков.

Таким образом, для исчерпывающей классификации типов ротационных движений исследуемой системы достаточно указать все возможные наборы целочисленных параметров $(n, k; n_1, n_2, n_3)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям. Удобно указывать все пять параметров, имея в виду, что в силу (4.7) можно ограничиться четырьмя, опустив n или один из n_i .

Порядок перечисления топологических типов может быть следующим. Выбираем $n \geq 3$, затем неотрицательное значение k из набора $n - 2, n - 4, \dots$ – всего $[n/2]$ возможных значений k для данного n . Далее следует выбрать любым способом три точки возврата гипоциклоиды (4.5) и “поместить” в них точечные массы m_1, m_2, m_3 (порядок их размещения в данном случае не важен, т.к. в определение топологического типа была заложена возможность непрерывного изменения масс кварков). Это равносильно выбору тройки чисел (n_1, n_2, n_3) . Тем самым будет зафиксирован один из топологических типов состояния системы.

Применим введенную здесь классификацию к примерам, рассмотренным в предыдущем разделе. Простые движения, показанные на рис. 1 и 2, очевидно, характеризуются набором $(3, 1; 0, 0, 0)$. Экзотические состояния на рис. 3 имеют следующие типы: 1 – $(4, 2; 1, 0, 0)$, 2 – $(5, 3; 1, 0, 1)$, 3 – $(5, 1; 1, 0, 1)$ (для случая $n = 5$ представлены оба возможных значения $k = 1$ и $k = 3$), 4 – $(6, 4; 1, 1, 1)$, 5 – $(6, 4; 0, 1, 2)$, 6 – $(6, 2; 1, 1, 1)$, 7 – $(7, 1; 1, 3, 0)$ и 8 – $(9, 3; 2, 2, 2)$. Состояния 6 и 8 в пределе $m_i \rightarrow 0$ переходят в гипоциклоиду (4.5), имеющую вид дельтоиды, которая, однако, обходится соответственно два и три раза. Эти примеры подчеркивают тот факт, что для классификации топологических типов состояний задавать отношение радиусов (4.6) или, что эквивалентно, отношение k/n недостаточно. Следует указывать оба параметра k и n .

В то же время движения, отвечающие значению $k = 0$ и имеющие место при четных $n = 4, 6, 8, \dots$, на рис. 1–3 не показаны. Они устроены достаточно просто: система имеет вид равномерно вращающегося прямолинейного отрезка, составленного из n отрезков сложенной n раз замкнутой струны. Кварки и “безмассовые” особенности $\dot{X}^2 = 0$ на-

ходятся в точках сгиба. В этом случае в уравнении (2.1) $b = \theta = 0$, $\tilde{u}(\sigma) = u(\sigma) \cdot \text{const}$. Состояния данного вида имеют близкие аналоги в струнной модели мезона – вращения сложной n раз открытой струны с массами на концах [8, 11].

Завершая классификацию топологических типов ротационных движений в модели “треугольник”, отметим возможность существования прямолинейных конфигураций с одним или более кварками, покоящимися в центре вращения. Пример такого движения – предел при $v_1 \rightarrow 0$ или $R_1 \rightarrow 0$ на рис. 1. В этом случае при анализе следует, исключив покоящиеся кварки, заменить систему более простой и описывать ее предельное состояние тем же выражением (4.3) с $n \geq 2$, $k = 0$.

5. ЭНЕРГИЯ И МОМЕНТ РАССМАТРИВАЕМЫХ СОСТОЯНИЙ

В данном разделе коротко обсудим возможность приложения полученных решений для струнной модели “треугольник” к описанию барионных состояний, лежащих на некоторой траектории Редже. Эти состояния являются частицами с одинаковым кварковым составом, у которых совпадают почти все квантовые числа [13].

Траектория Редже представляет собой линейную зависимость (не имеющую пока удовлетворительного теоретического объяснения) $J = \alpha' E^2 + \alpha_0$ между квадратом массы или энергии покоя $M^2 = E^2$ частицы и ее спином J .

В работе [7] для струнной модели бариона “треугольник” на классическом уровне были найдены выражения для энергии

$$E = \gamma D \frac{a^2 - b^2}{a} + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \gamma D a \left[1 - \left(\frac{\theta}{D\omega} \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} \quad (5.1)$$

и углового момента

$$J = \int_{\sigma_0}^{\sigma_3} (X P_y - Y P_x) d\sigma = \frac{a}{2\omega} \left(E - \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{1 - v_i^2} \right) \quad (5.2)$$

состояния (2.1). Параметры D , b , a и v_i определяются соответственно формулами (2.6), (3.6) и (3.7). Соотношение между E , J и частотой вращения $\Omega = \omega/a$ имеет практически такой же вид, как и в струнной модели мезона [4].

Выражения (5.1) и (5.2) неявным образом задают нелинейную связь между энергией и моментом рассматриваемой системы. Вид этой связи определяется не только непрерывными параметрами Ω , ω или θ , характеризующими скорость вращения, но и топологическим типом $(n, k; n_1, n_2, n_3)$ данного состояния системы. При изменении топологического типа величины E и J меняются скачкообразно.

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов зависимости J от E^2 для различных состояний системы с $m_2 = m_3 = 1$, $\gamma = 1$. Кривые 1, 2 и 3 описывают простые движения системы соответственно с $m_1 = 0.2$, $m_1 = 1$ и $m_1 = 3$, кривые 4 и 5 – экзотические движения в случае одинаковых масс кварков $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Кривая 4 соответствует состоянию типа $(4, 2; 1, 0, 0)$ (“четыреугольник” 1 на рис. 3), а кривая 5 – состоянию типа $(6, 2; 1, 1, 1)$ (линия 6 на рис. 3). На кривой 3, которая представляет

Рис. 4

ту же систему, что и рис. 1, символом “Т” отмечена точка перехода системы из состояния криволинейного треугольника в состояние вращающегося прямолинейного отрезка с натяжением 2γ и массой m_1 , покоящейся в центре вращения. Эта точка характеризуется обращением в нуль параметров R_1, v_1, θ ; тип движения системы в ней меняется с $(3, 1; 0, 0, 0)$ на $(2, 0; 0, 0, 0)$. Как видим, характер зависимости J от E^2 в этой точке качественно не меняется.

Исследуем асимптотики соотношения между E и J . В ультрарелятивистском пределе $v_i \rightarrow 1$, $E \rightarrow \infty$, $J \rightarrow \infty$ зависимость J от E^2 для состояния произвольного типа $(n, k; n_1, n_2, n_3)$ стремится к виду, близкому к стандартному:

$$J \simeq \alpha' E^2 + \alpha_1 E^{0.5}, \quad \alpha' = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{n}{n^2 - k^2}, \quad v_i \rightarrow 1, \quad (5.3)$$

причем коэффициент наклона реджевских траекторий отличается от значения Намбу $\alpha' = 1/(2\pi\gamma)$ множителем $n/(n^2 - k^2)$. Для простых движений этот множитель достигает максимального при допустимых n и k значения $3/8$. Следующее из экспериментальных данных примерное равенство наклонов мезонных и барионных траекторий Редже [13] приводит к требованию приблизительно вдвое меньшего значения эффективного натяжения γ в барионной модели “треугольник” по сравнению со струнной моделью мезона [4].

Асимптотика (5.3) может быть получена с помощью (4.1). При $\varepsilon \rightarrow 0$ или $v_i \rightarrow 1$ первое слагаемое в (5.1) пропорционально ε^{-2} , второе — ε^{-1} , следовательно, первое доминирует. Другими словами, доля в (5.1) кинетической энергии кварков при $v_i \rightarrow 1$ стремится к нулю, и это относится к произвольным состояниям системы.

Нерелятивистский предел для простых движений характеризуется неравенствами $v_i \ll 1$, $|\omega| \ll 1$, $|\theta| \ll 1$. Используя малый параметр ω в выражениях (5.1), (5.2), (3.6), (3.7), (3.9), найдем в случае, когда справедливы отношения (3.10), асимптотику

$$J \simeq q \left(E - \sum_{i=1}^3 m_i \right)^{3/2},$$

где $q = (2/3)^{3/2} \gamma^{-1} \sqrt{m_1 m_2 m_3} / (m_1 + m_2 + m_3)$, $v_i \ll 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе семейство ротационных движений системы исследовано на классическом уровне. Трудности в переходе к квантованию имеют место и для мезонной модели релятивистской струны с массами на концах [1, 8]. Возможно, разработка барионной модели поможет преодолеть эти трудности.

Приложение полученных в разделах 2 и 3 решений к описанию барионных состояний требует более детального анализа, выходящего за рамки поставленной здесь задачи. В частности, сравнение с экспериментальными данными выражений (5.1)–(5.3) и их близких аналогов в струнной модели мезона [4] открывает возможность определения модельно-зависимых значений масс кварков m_i и других параметров. В данной работе эта цель не ставилась, поэтому выбор значений m_i и γ для графиков на рис. 4 был продиктован лишь соображениями иллюстративности.

Список литературы

- [1] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] A. Chodos, C. B. Thorn. Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. № 3. P. 509.
- [3] В. В. Нестеренко. ТМФ. 1987. Т. 71. № 2. С. 238.
- [4] B. M. Barbashov. Classical dynamics of rotating relativistic string with massive ends: the Regge trajectories and quark masses. In: Strong Interactions at Long Distances. Palm Harbor: Hadronic Press, 1995. P. 257.
- [5] X. Artru. Phys. Rep. C. 1983. V. 97. № 2, 3. P. 147.
- [6] М. С. Плющай, Г. П. Пронько, А. В. Разумов. ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 97–112; С. В. Клименко, В. Н. Кочин, М. С. Плющай, Г. П. Пронько, А. В. Разумов, А. В. Самарин. ТМФ. 1985. Т. 64. № 2. С. 245.
- [7] Г. С. Шаров. ТМФ. 1997. Т. 113. № 1. С. 68.
- [8] Г. С. Шаров. ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 86.
- [9] Б. М. Барбашов, Г. С. Шаров. ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 253.
- [10] Дж. Ф. Трауб. Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985.
- [11] В. П. Петров, Г. С. Шаров. ТМФ. 1996. Т. 109. № 2. С. 187.
- [12] В. Ю. Ровенский. Теория кривых. Красноярск: КГПУ, 1996.
- [13] С. Огава, С. Савада, М. Накагава. Составные модели элементарных частиц. М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 16.VII.1997 г.