Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Васин, Е. Е. Тареева, Т. И. Щелкачёва, Н. М. Щелкачёв, Ультраметричность пространства состояний в стеклах, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 228–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:40:08

© 2013 г. М. Г. Васин*, Е. Е. Тареева[†], Т. И. Щелкачева[†],
Н. М. Щелкачев^{†‡§}

УЛЬТРАМЕТРИЧНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В СТЕКЛАХ

Дается обзор результатов, связанных с понятием ультраметричности в стеклах. Приведено доказательство ультраметричности пространства реплик для произвольной модели спинового стекла с отражательной симметрией. Задача описания динамики систем с ультраметрическим пространством состояний решается с помощью функционального метода Келдыша неравновесной динамики, в котором квазиинергодичность системы учитывается посредством введения иерархического спектра времен релаксации.

Ключевые слова: стекла, ультраметричность, неравновесная динамика.

DOI: 10.4213/tmf8400

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы хотим дать краткий обзор некоторых результатов по теории спиновых и структурных стекол, полученных нами в последнее время, а именно тех из них, которые связаны с вопросом об ультраметричности пространства основных состояний в стеклах и следствиями, вытекающими из этого факта. Кроме того, мы представим наши новые результаты по доказательству ультраметричности пространства реплик в случае гамильтониана с взаимодействием двух произвольных операторов, для которых выполняются условия инвариантности относительно обращения времени (отражательной симметрии) (раздел 2). Важное место занимает раздел 3, посвященный проблемам динамики стекол. В нем с помощью развития техники Келдыша для неравновесных функций Грина показано, в частности, к каким физическим результатам приводит учет ультраметричности множества времен релаксации.

*Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия. E-mail: dr_vasin@mail.ru

[†]Институт физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина РАН, Троицк, Московская обл., Россия

[‡]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

[§]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия

Приведем некоторые основные представления о спиновых стеклах и ультраметричности в них. Первое упоминание понятия ультраметричности в физической литературе, насколько нам известно, относится к 1984 г. [1] и связано с низкотемпературной иерархической структурой пространства состояний (и пространства реплик), обнаруженной несколько ранее Паризи для модели спинового стекла Шеррингтона–Киркпатрика (ШК) (подробно история вопроса изложена, например, в обзоре [2]). Позднее было установлено, что ультраметрическая структура пространства состояний может иметь место и в некоторых других моделях с фрустрацией и беспорядком, в том числе в структурных стеклах. Кроме того, была обнаружена так называемая динамическая ультраметричность – ультраметричность времен релаксации, обуславливающая целый ряд физических явлений в динамике стекол и объясняющая многие феноменологические законы для нее.

Модель ШК [3] – модель Изинга со случайными дальнедействующими связями, так что среднеполевое приближение является точным в пределе $N \rightarrow \infty$. Гамильтониан ШК имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j, \quad (1)$$

где S_i – изинговские спины ($S_i = \pm 1$), расположенные в узлах i, j произвольной кристаллической решетки ($1 \leq i \leq N$). Все они связаны друг с другом статистически независимыми элементами случайной симметрической матрицы J_{ij} , распределенными по Гауссу с вероятностью

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J}} e^{-(J_{ij} - J_0)^2 / (2J^2)}. \quad (2)$$

Для обеспечения правильного термодинамического предела в модели $J = \tilde{J}/\sqrt{N}$, $J_0 = \tilde{J}_0/N$.

Беспорядок в рассматриваемой модели является, таким образом, замороженным; каждый конкретный набор J_{ij} отвечает определенному “экземпляру” (или “реплике”) системы. При этом нас интересует объективное термодинамическое поведение невыделенного образца, что означает необходимость усреднения свободной энергии $F = \ln Z$, а не самой статистической суммы Z . Для проведения этого усреднения авторы работы [4] предложили воспользоваться первыми членами разложения

$$\overline{\ln Z} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\overline{Z^n} - 1}{n} \quad (3)$$

и вычислять для целых n величину Z^n как произведение статистических сумм n копий (реплик) системы. Поскольку затем приходится делать аналитическое продолжение в область $n < 1$ и брать предел $n \rightarrow 0$, этот метод реплик часто называют “replica trick”. После взятия гауссова интеграла все члены становятся одноузельными, и окончательно свободная энергия представляется функцией параметра порядка $Q_{\alpha\beta}$, зависящего от индексов двух разных реплик α, β :

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^\alpha S_i^\beta. \quad (4)$$

Заметим, что $Q_{\alpha\beta} \in [-1, 1]$. Система, определяемая гамильтонианом (1), инвариантна относительно отображения $S_i \rightarrow -S_i$. В системе могут происходить стандартные фазовые переходы (типа ферромагнитного), когда эта симметрия нарушается.

Такого рода переходы не имеют ничего общего с переходом в состояние стекла, поэтому для исключения их из рассмотрения введем бесконечно малое внешнее поле такое, чтобы рассматривать в духе квазисредних Боголюбова [5] лишь $Q_{\alpha\beta} \in [0, 1]$ ¹⁾. Легко видеть, что величина $Q_{\alpha\beta}$ измеряет перекрытие реплик системы, их “сходство”, и может служить основой для понятия расстояния между репликами.

Полученная свободная энергия инвариантна относительно группы перестановок из n элементов. Случай репличной симметрии $Q_{\alpha\beta} = Q$ рассматривался в работах [3], однако полученный результат неустойчив относительно нарушения репличной симметрии. В работах Паризи [6], [7] (см. также [8]) был предложен эффективный способ поэтапного нарушения репличной симметрии, когда матрица $Q_{\alpha\beta}$ имеет блочную структуру со все более и более мелкими блоками. Анзац Паризи заключается в ограничении: ищется минимум свободной энергии по переменным $Q_{\alpha\beta}$ при условии инвариантности относительно только подгруппы группы перестановок. Первый этап заключается в предположении, что

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= q_1, & I\left(\frac{\alpha}{m}\right) &= I\left(\frac{\beta}{m}\right), \\ Q_{\alpha\beta} &= q_0, & I\left(\frac{\alpha}{m}\right) &\neq I\left(\frac{\beta}{m}\right), \end{aligned}$$

где $I(x)$ обозначает целую часть x .

Продолжая такое деление до бесконечности, мы в конце концов получаем функцию $q(x)$, причем обратная ей функция $x(q)$, $0 \leq x \leq 1$, дает долю пар реплик, величина перекрытия которых меньше q . Заметим, что написанные соотношения можно удобно записать в p -адических числах [9] (подробнее по этому вопросу см. работу [10]).

Иерархический анзац Паризи содержит еще два условия. Первое – эквивалентность реплик: наблюдаемые, которые включают только одну реплику, должны быть репликосимметричными. В частности, величины вида

$$\sum_{\beta} f(Q_{\alpha\beta}) \tag{5}$$

не должны зависеть от α . При выполнении этого условия входящие в свободную энергию члены вида $\sum_{\alpha,\beta} f(Q_{\alpha\beta})/n$ автоматически оказываются конечными при $n \rightarrow 0$. Условие эквивалентности реплик непосредственно связано с тем фактом, что интенсивные (J -независимые) величины не меняются от одного состояния к другому. Эквивалентность реплик соответствует свойству стохастической стабильности, введенному в работах [11], [12]: свойства случайных систем, для которых выполняются условия стохастической стабильности, являются гладкими функциями любых внешних случайных возмущений.

Второе условие, называемое сепарабельностью или невырожденностью, связано на самом деле с эквивалентностью перекрытий [13]. Оно означает, что в случае нарушенной репличной симметрии, когда все перекрытия флуктуируют в обычном термодинамическом ансамбле, такие флуктуации отсутствуют в ансамбле с фиксированным q . Это, в свою очередь, означает, что q является хорошим параметром порядка.

¹⁾Это замечание мы будем считать остающимся в силе и при нашем доказательстве в случае гамильтониана общего вида с отражательной симметрией, даваемом в разделе 2.

Пространство реплик для гамильтониана (1) с нарушенной по правилам Паризи симметрией и расстоянием между репликами, определенным как $r_{\alpha\beta} = 1 - Q_{\alpha\beta}$, где $Q_{\alpha\beta}$ дается формулой (4), оказывается ультраметрическим. В разделе 2 будет приведено подобное же доказательство для более общего случая.

Нарушение репличной симметрии логически эквивалентно нарушению эргодичности. Действительно, если взять две разные реплики (две различные реализации системы), то при нетривиальной (т. е. не δ -образной) функции $x(q)$ очевидно, что две системы придут в конце концов с конечной вероятностью в два разных состояния. Ультраметричность пространства реплик приводит к ультраметричности пространства состояний.

При рассмотрении динамики неравновесной системы вместо термина “реплики” правильнее было бы использовать термин “долины”. В отличие от реплик долины имеют вполне определенный физический смысл.

Появление долин в пространстве состояний системы проще всего проиллюстрировать на примере системы, испытывающей фазовый переход II рода. В критической точке вместо одного равновесного состояния в системе возникает несколько равновесных состояний, разделенных высокими энергетическими барьерами. Другими словами, происходит вырождение равновесного состояния. При фазовом переходе происходит спонтанное нарушение симметрии, и система “выбирает” то состояние, в котором она будет находиться впоследствии. Другие состояния становятся при этом недоступными, в результате чего в пространстве всех возможных состояний система “выбирает” только одну его часть, которую принято называть “долиной”. Физический смысл имеют только термодинамические средние внутри долины. В долине выполняется термодинамический предел $N \rightarrow \infty$, поэтому в ней выполняются законы равновесной термодинамики, что позволяет использовать для теоретического описания обычные методы статистической физики.

В случае стекольного перехода физическая картина усложняется. Предполагается, что, как и при фазовом переходе II рода, существует некоторая T_c , выше которой эргодичность системы не нарушена [14]. В случае понижения температуры ниже T_c происходят фазовый переход и нарушение эргодичности, при котором фазовое пространство разделяется не на две, как при фазовом переходе, а на много (бесконечно много в макроскопической системе) долин, разделенных энергетическими барьерами. Количество долин становится бесконечно большим в результате каскада фазовых переходов, вызванного индуцируемой беспорядком фрустрацией системы. В результате каждого такого фазового перехода пространство состояний очередной долины делится на несколько долин следующей генерации и т. д. Как и при фазовом переходе второго рода, только термодинамические средние внутри долины имеют физический смысл.

Таким образом, при низких температурах пространство энергетических состояний спинового стекла представляет собой ультраметрическое пространство бесконечного числа долин с близкими энергиями; эти долины разделены бесконечными (в случае среднего поля) барьерами.

Скажем теперь несколько слов о моделях типа спинового стекла, в которых присутствуют беспорядок и фрустрация, однако нет отражательной симметрии (см., например, работу [15]). Принято считать, что в таких системах не может происходить бесконечного нарушения репличной симметрии по Паризи, однако в общем случае доказательства этого факта не существует. Возможно, что в некоторых из

таких моделей разные этапы нарушения репличной симметрии происходят не в самой точке первого нарушения (как в модели ШК), а разнесены по температуре (см., например, работы [16], [17], где исследуется модель Поттса). Строго доказано, что первый этап нарушения репличной симметрии дает решение, устойчивое относительно дальнейших этапов, только для сферической p -спиновой модели, в которой в отличие от (1) взаимодействуют сразу p спинов и наложено дополнительное сферическое условие в виде $\sum_i S_i^2 = N$ (см., например, работу [18]).

2. УЛЬТРАМЕТРИЧНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА РЕПЛИК ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО СПИНОВОГО СТЕКЛА С ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим обобщение модели ШК, заменив в гамильтониане (1) спины Изинга на произвольные нормированные на единицу диагональные операторы $\hat{U}$. Физический смысл операторов $\hat{U}$ может быть различным и зависит от рассматриваемой задачи. Например, это могут быть мультипольные моменты молекул, если целью исследования является описание замерзания ориентационного порядка (см., например, работы [15], [19]–[21]). Ниже мы будем рассматривать операторы, обладающие отражательной симметрией. Тогда

$$\text{Tr } \hat{U}^{(2k+1)} = 0 \quad (6)$$

для любых целых k . Используя репличный подход, запишем стандартным образом свободную энергию, усредненную по беспорядку, в виде

$$\frac{\langle F \rangle_J}{NkT} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \max \left\{ \frac{t^2}{4} \sum_{\alpha} (w^{\alpha})^2 + \frac{t^2}{2} \sum_{\alpha > \beta} (q^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\{U^{\alpha}\}} e^{\hat{\theta}} \right\},$$

где

$$\hat{\theta} = t^2 \sum_{\alpha > \beta} (q^{\alpha\beta}) \hat{U}^{\alpha} \hat{U}^{\beta} + \frac{t^2}{2} \sum_{\alpha} (w^{\alpha}) (\hat{U}^{\alpha})^2, \quad (7)$$

$t = J/kT$.

Свободная энергия (7) берется в седловой точке статистической суммы, что дает определения физических параметров порядка: параметра порядка стекла $q^{\alpha\beta}$

$$q^{\alpha\beta} = \frac{\text{Tr}(\hat{U}^{\alpha} \hat{U}^{\beta} e^{\hat{\theta}})}{\text{Tr } e^{\hat{\theta}}}, \quad (8)$$

вспомогательного параметра порядка w^{α} и регулярного параметра порядка x^{α} :

$$w^{\alpha} = \frac{\text{Tr}[(\hat{U}^{\alpha})^2 e^{\hat{\theta}}]}{\text{Tr } e^{\hat{\theta}}}, \quad x^{\alpha} = \frac{\text{Tr}(\hat{U}^{\alpha} e^{\hat{\theta}})}{\text{Tr } e^{\hat{\theta}}}. \quad (9)$$

В репликосимметричном приближении (RS) из уравнений для экстремума, соответствующего выражению (7) функционала свободной энергии, получаем уравнения

$$q_{\text{RS}} = \int dz^G \left[\frac{\text{Tr}(\hat{U} e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}} \right]^2, \quad w_{\text{RS}} = \int dz^G \frac{\text{Tr}(\hat{U}^2 e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr } e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}}. \quad (10)$$

Здесь

$$\hat{\theta}_{\text{RS}} = zt\sqrt{q_{\text{RS}}}\hat{U} + t^2 \frac{[w_{\text{RS}} - q_{\text{RS}}]}{2}\hat{U}^2, \quad (11)$$

$$\int dz^G = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (12)$$

Из формулы (6) очевидно, что уравнение для параметра порядка стекла всегда имеет тривиальное решение $q_{\text{RS}} = 0$, описывающее аналог парамагнитной фазы. В рассматриваемом случае отражательной симметрии это решение является единственным при высоких температурах. При понижении температуры, в частности, возникает решение с первым нарушением репличной симметрии (1RSB). Из уравнения для соответствующего параметра порядка стекла получаем условие бифуркации

$$1 - t_c^2 w_{\text{RS}}^2(t_c) = 0. \quad (13)$$

Это уравнение совпадает с уравнением $\lambda_{\text{repl(RS)}} = 0$, которое определяет границу устойчивости репликосимметричного решения [22]. При $T < T_c$ возникают, в частности, нетривиальные решения, но они не стабильны. Для случая 1RSB-решения это показано в работе [23].

Будем последовательно производить нарушения симметрии реплик 1RSB, 2RSB, 3RSB, ..., n RSB и т. д. Оказывается, что уравнения для параметров порядка стекла всегда содержат выражение

$$\frac{\text{Tr}[Ue^{\theta_{n\text{RSB}}}]}{\text{Tr} e^{\theta_{n\text{RSB}}}}. \quad (14)$$

Здесь $\theta_{n\text{RSB}}$ является аналогом (11) для последующих стадий нарушения репличной симметрии (подробнее см. работу [24]). Следовательно, одно из решений этих уравнений всегда является тривиальным на каждой стадии нарушения симметрии реплик, и появление n RSB-решения может рассматриваться как бифуркация тривиального $(n-1)$ RSB-решения. При этом уравнение $\lambda_{n\text{RSB}} = 0$ совпадает с соответствующим условием ветвления (13). Таким образом, нетривиальные n RSB-решения на любой стадии нарушения симметрии всегда существуют только при температуре $T < T_c$, определяемой этим бифуркационным условием, и мы можем искать решение с полным нарушением симметрии реплик (FRSB). Именно это решение должно быть стабильным.

Чтобы описать FRSB-решение вблизи точки бифуркации T_c , в которой оно сливается с репликосимметричным решением (т.е. в окрестности T_c), разложим свободную энергию (7) до четвертого порядка включительно, предполагая, что отклонения $\delta q^{\alpha\beta}$ от q_{RS} малы. Мы пренебрегаем изменениями параметра порядка w_{RS} (см. работу [23], где это строго показано для 1RSB). Мы получаем следующее выражение для отклонения ΔF от ее репликосимметричной части:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{NkT} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \frac{t^2}{4} [\lambda_{\text{repl(RS)}}] \sum'_{\alpha, \beta} (\delta q^{\alpha\beta})^2 - t^6 B_3 \sum'_{\alpha, \beta, \gamma} \delta q^{\alpha\beta} \delta q^{\beta\gamma} \delta q^{\gamma\alpha} + \right. \\ \left. + t^8 \left[D_2 \sum'_{\alpha, \beta} (\delta q^{\alpha\beta})^4 + D_{32} \sum'_{\alpha, \beta, \delta} (\delta q^{\alpha\beta})^2 (\delta q^{\alpha\delta})^2 + D_{47} \sum'_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \delta q^{\alpha\beta} \delta q^{\beta\gamma} \delta q^{\gamma\delta} \delta q^{\delta\alpha} \right] \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $t = t_c + \Delta t$. Штрих над знаком суммы означает, что только индексы, принадлежащие одной и той же δq , обязательно различны в $\sum'$. Все коэффициенты

зависят только от тривиального RS-решения в точке T_c . Выпишем коэффициенты, входящие в окончательный результат:

$$B_3 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\text{Tr}(\hat{U}^2 e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr} e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}} \right\}^3 \geq 0, \quad (16)$$

$$-D_2 = \frac{1}{48} \left\{ \frac{\text{Tr}(\hat{U}^4 e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr} e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}} - 3 \left[\frac{\text{Tr}(\hat{U}^2 e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr} e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}} \right]^2 \right\}^2 \geq 0, \quad (17)$$

$$-D_{47} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{\text{Tr}(\hat{U}^2 e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}})}{\text{Tr} e^{\hat{\theta}_{\text{RS}}}} \right\}^4 \geq 0. \quad (18)$$

Чтобы выписать свободную энергию (15) как функционал $q(x)$, мы используем стандартные правила Паризи [7]. Уравнение для параметра порядка следует из условия $(\delta/\delta q(x))\Delta F = 0$. Для упрощения полученного уравнения следует применить дифференциальный оператор

$$\hat{O} = \frac{1}{q'} \frac{d}{dx} \frac{1}{q'} \frac{d}{dx},$$

где $q' = dq(x)/dx$. В результате получаем

$$-t^6 B_3 x + t^8 \left\{ D_{47} \left[-4q(x)x^2 - 4x\langle q \rangle + 4x \int_0^x dy q(y) \right] - 4D_2 q(x) \right\} = 0, \quad (19)$$

где $\langle q \rangle = \int_0^1 dy q(y)$.

Дифференцируя уравнение (19), получаем в главном приближении

$$q' = \frac{B_3}{t_c^2 4[-D_2 - D_{47}x^2]} \geq 0. \quad (20)$$

Область, в которой $q(x)$ зависит от x , мала, и мала функция $q(x) \sim \tau = (T_c - T)/T_c$.

Построение непрерывной неубывающей функции $q(x)$ позволяет так же, как и в спиновом ШК-стекле, ввести неотрицательную функцию $P(q) = dx/dq$, которая дает вероятность найти в системе два чистых состояния, имеющих перекрытие, равное q , при условии, что эти состояния берутся с вероятностями их появления в статистическом ансамбле.

Расстояние между состоянием α и состоянием β определяется, например, следующим образом [2], [14], [25]:

$$d_{\alpha\beta} = 2(q_{\text{EA}} - q_{\alpha\beta}), \quad (21)$$

где q_{EA} описывает самоперекрытие.

Функция $P(q_1, q_2, q_3)$ описывает распределение вероятности того, что для произвольных трех чистых состояний α , β и γ три их взаимных парных перекрытия $q_{\alpha\beta}$, $q_{\beta\gamma}$ и $q_{\gamma\alpha}$ равны q_1 , q_2 и q_3 . Поскольку имеет место полное нарушение симметрии реплик, легко показать, аналогично тому, как это делается для случая спинового стекла [2], [14], [25], что $P(q_1, q_2, q_3)$ не равна нулю, только если по крайней мере два из трех перекрытий равны между собой и при этом не больше, чем треть:

$$\begin{aligned} P(q_1, q_2, q_3) = & \frac{1}{2} P(q_1) x(q_1) \delta(q_1 - q_2) \delta(q_1 - q_3) + \frac{1}{2} P(q_1) P(q_2) \theta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \\ & + \frac{1}{2} P(q_2) P(q_3) \theta(q_2 - q_3) \delta(q_3 - q_1) + \frac{1}{2} P(q_3) P(q_1) \theta(q_3 - q_1) \delta(q_1 - q_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Рис. 1. Эволюция пространства состояний квазиэргодической системы во времени: Δt – время наблюдения (характерный масштаб времени эксперимента), $\tau_{\max}$ – максимальное время релаксации, $\tau_{\max} \rightarrow \infty$. “Треугольник” $\alpha\beta\kappa$ равнобедренный, так как $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\kappa} > \tau_{\beta\kappa}$.

Отсюда следует, что пространство состояний стекла ультраметрично, т. е. таково, что для любых трех точек a , b и c расстояния между этими точками удовлетворяют неравенству $d_{ab} \leq \max(d_{bc}, d_{ca})$.

Таким образом, нам удалось распространить доказательство ультраметричности пространства реплик для гамильтониана ШК на более общий случай. Необходимым для нашего доказательства является выполнение условия отражательной симметрии, понимаемое в смысле (6).

3. ДИНАМИКА СИСТЕМ С УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ

Как было сказано ранее, в пространстве состояний стекол долины образуют иерархическую структуру, обладающую фрактальными и даже мультифрактальными свойствами. Чтобы не усложнять систему и продемонстрировать основные идеи, представим эту иерархическую структуру в виде простого генеалогического дерева, дерева Кейли (рис. 1). Естественно полагать, что релаксационные процессы в такой иерархической системе будут характеризоваться иерархически устроенным набором времен релаксации. При этом соответствующее какой-либо долине время релаксации равно времени наступления теплового равновесия в этой долине после объединения более мелких долин предыдущего поколения, которое также можно интерпретировать как время перехода между этими долинами. Заметим, что температура каждой отдельной долины не совпадает с наблюдаемой (термодинамической) температурой всей системы. При исследовании неравновесной динамики неэргодической (или квазиэргодической, т. е. являющейся неэргодической в течение макроскопического, но конечного промежутка времени) системы такую иерархическую структуру долин и набора времен релаксации удобнее всего представить в виде

ультраметрической структуры [26]. Ее отличительной особенностью является существование только равнобедренных треугольников, т. е. если, например, рассмотреть три произвольные долины с индексами α , β , κ , то времена релаксации между ними всегда будут удовлетворять равенству $\tau_{\alpha\beta} = \max\{\tau_{\alpha\kappa}, \tau_{\kappa\beta}\}$ (либо $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\kappa}$, либо $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\kappa\beta}$, либо $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\kappa} = \tau_{\kappa\beta}$).

Для того чтобы описывать кинетические свойства таких систем, надо найти временные корреляционные функции. Основной проблемой здесь является определение корреляционной функции квазинезергодической системы [27]. Это в корне отличает задачу от равновесной, в которой обычно рассматривается статический предел. В этом случае пространство времен релаксации является ультраметричным, а величина кинетического коэффициента зависит от характерного временного масштаба, на котором проводится измерение или вычисление этой величины, что приводит к возникновению трудностей при попытке сформулировать кинетику (динамику) стекольных систем традиционными методами, когда динамические переменные делятся на два класса: “быстрые” и “медленные”, и по быстрым переменным происходит “интегрирование”, а для медленных переменных пишется кинетическое уравнение. Кроме того, задача усложняется тем, что приходится усреднять по беспорядку и по пространству состояний. Решаются эти проблемы разными способами. Наиболее общий подход основан на суперсимметричной технике, в которой динамические уравнения типа Ланжевена записываются в виде функционального интеграла с комплексными и грассмановыми полями, учитывающими детерминант динамических уравнений (см., например, монографию [26]). К сожалению, этот подход не получил широкого распространения из-за нефизичности грассмановых полей и громоздкости метода. Поэтому обычно при решении большинства динамических задач используются численные методы, основанные на “приближении связанных мод” [26], [28], которое имеет обоснование лишь в некоторых предельных случаях (например, в рамках суперсимметричного метода [26], [29]–[31]). К настоящему времени практически не существует аналитических решений кинетики стекольных систем, существенно выходящих за рамки приближения среднего поля, а нахождение аналитических непертурбативных решений кинетики стекольных систем остается фундаментальной задачей теории неравновесных систем.

Мы рассмотрим подход, основанный на методе Келдыша описания динамики неравновесной системы, являющемся развитием техники функции Грина [32]. Известно, что метод Келдыша в принципе описывает любую неравновесную систему [33], [34]. Можно попытаться адаптировать метод Келдыша к описанию кинетики сильнонеупорядоченных систем типа спинового стекла и, в частности, описать кинетику стеклования. В отличие от суперсимметричного метода этот подход позволяет обойтись без дополнительных грассмановых полей и проследить нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) в явном виде. Обычно при описании динамики реплики или долины не рассматриваются [29]. Но для (микроскопического) учета ультраметрического характера множества времен релаксации все же необходимо ввести долины в динамику, в нашем случае – в технику Келдыша.

Покажем, как можно описать динамику с помощью функциональной техники Келдыша. Рассмотрим диссипативную динамику скалярного поля $m(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – пространственная координата (скалярное поле m может соответствовать, например, спиновой переменной в мягкой модели, основанной на гамильтониане типа ШК). Для того чтобы рассмотреть диссипативную динамику данной системы, посту-

ним стандартным образом [34]: будем считать, что скалярное поле взаимодействует с тепловым резервуаром, например, в виде упругой струны $\phi(x)$. Тогда келдышевская статистическая сумма для этой системы может быть представлена в форме функционального интеграла:

$$Z = \int Dm D\phi \exp \left\{ i \int_C dt \int d\mathbf{r} \left((\partial_t m)^2 - H[m] + \sqrt{\gamma} \int m (\partial_x \phi)_{x=0} \right) + i S_{\text{osc}}[\phi] \right\}, \quad (23)$$

где H – гамильтониан скалярного поля, C – келдышевский контур, S_{osc} – келдышевское действие струны, γ – константа взаимодействия нашей системы и теплового резервуара. Важно, что производящий функционал $Z = 1$ (в отсутствии внешних полей-источников, имеющих разное значение на верхней и нижней частях келдышевского контура), так как интегрирование по времени на верхней и нижней частях келдышевского контура производится в противоположных направлениях [34]. Это свойство позволяет усреднять Z по беспорядку, не вводя реплики.

Произведем келдышевский поворот переменных, введя так называемые “квантовые” и “классические” степени свободы, полуразность и полусумму значений m на верхней и на нижней частях контура соответственно, $\vec{m} = \{m^{(q)}, m^{(cl)}\}$. Проинтегрировав по степеням свободы, связанным с резервуаром, получим эффективное действие, описывающее диссипативную динамику нашей системы [33], [34]:

$$Z = \int D\vec{m} e^{i S_{\text{eff}}[m]}, \quad (24)$$

$$S_{\text{eff}} = \int dt d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \vec{m}^T \begin{pmatrix} 0 & \gamma \partial_t \\ -\gamma \partial_t & i 4 \gamma T \end{pmatrix} \vec{m} - H[m^{(cl)} + m^{(q)}] + H[m^{(cl)} - m^{(q)}] \right], \quad (25)$$

где T – температура термостата-струны. Данная техника позволяет описывать динамику любых, даже сильно неравновесных, систем.

Функции Грина классических и квантовых переменных имеют стандартный матричный вид [33]:

$$G_{ab} = -i \langle m^a(t) m^b(t') \rangle = \begin{pmatrix} G^K & G^R \\ G^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где a и b – индексы классических и квантовых компонент, индексы R, A и K, как обычно, обозначают запаздывающую, опережающую и келдышевскую функции Грина соответственно. Рассматриваемая система находится в термодинамическом равновесии и, следовательно, справедлива ФДТ, которая на языке функций Грина формулируется в фурье-пространстве следующим образом:

$$G^K(\omega) = [G^R(\omega) - G^A(\omega)] \coth \frac{\omega}{2T}. \quad (27)$$

Мы рассматриваем классический предел техники Келдыша, и поэтому достаточно разложить H до первого порядка по $m^{(q)}$. Это аналогично методу динамического производящего функционала [35]–[38]. Можно показать, что седло действия (24) соответствует стандартному уравнению Ланжевена:

$$\frac{\gamma}{2} \partial_t m = - \frac{\delta H}{\delta m(\mathbf{r}, t)} + \xi(\mathbf{r}, t), \quad (28)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r}', t') \rangle = \gamma T \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (29)$$

где $m = m^{(cl)}$, а гауссовы случайные силы ξ пропорциональны $m = m^{(q)}$.

Рис. 2. Схематическое представление контура интегрирования по времени: для того чтобы учесть бифуркации, приводящие к неэргодичности системы, мы изобразили этот контур в виде дерева Кэли.

Ниже будет рассмотрено обобщение изложенной техники на исследование ультраметрической динамики стекольных систем в области выше T_g . В этой области состояние системы еще нельзя отождествлять со стеклом, но ее динамика уже сильно замедляется, например, следует закону типа Фогеля–Фулчера–Таммана. В некотором смысле можно сказать, что в этой области в среднем стекла нет, но термодинамические флуктуации – стеклообразующие, с ультраметрической иерархией времен релаксации. В этом случае естественным обобщением динамических уравнений (28) было бы введение долинных индексов у m и случайных сил, соответствующих динамическим долинам. Температура в этом случае служит параметром, описывающим междолинную и внутрислоинную релаксацию: $T \rightarrow T_{\alpha\beta}$, где α, β – репличные индексы. В результате динамика поля m описывается нелокальным по времени действием $S_{\text{nonloc}}[m^{(\text{cl})}, m^{(\text{q})}]$, параметризуемым $T_{\alpha\beta}$. Эффективно такое нелокальное действие приводит к нелокальности корреляций случайных сил $m^{(\text{q})}$. Ниже обсуждаются способы микроскопического вывода нелокального действия и поясняется, как эффективные температуры $T_{\alpha\beta}$ связаны с ультраметрическим пространством времен релаксации. Система, описываемая нелокальным действием, не может характеризоваться гиббсовской матрицей плотности с некоторой температурой. Вследствие этого нарушается ФДТ.

Рассмотрим простейший пример многочастичной системы: система бозе-частиц, заполняющих единственный квантовый уровень с собственной энергией ω_0 . Предположим, что эта система квазиэргодическая. В неэргодической системе траектории ее движения заключены в замкнутой области пространства состояний – долине. Принято полагать, что у стекла количество этих долин является бесконечно большим. Мы будем обозначать их греческими буквами: α, β и т. д. Мы предполагаем, что квазиэргодическая система заключена в долине и не выходит из этой области пространства состояний за определенное конечное “время наблюдения” τ . Геометрические структурные фрустрации ведут к попаданию системы в одну из долин, однако при вычислении статистически средних величин необходимо учитывать все возможные конфигурации пространства состояний и, как следствие, возможность нахождения системы в каждой из долин. В технике Келдыша это можно сделать, модифицировав контур интегрирования по времени (см. рис. 2).

Поскольку долины возникают в системе вследствие включения взаимодействия между ее элементами, естественно полагать, что первоначальное состояние системы единственно,

$$\langle m_\alpha(t) | m_{\beta \equiv \alpha}^\dagger(t) \rangle \big|_{t=-\infty} \equiv 1. \quad (30)$$

Это позволяет использовать технику Келдыша так же, как и в случае теории без нарушения эргодичности.

Динамика квазиэргодической системы характеризуется наличием ультраметричности множества времен релаксации [26], которая может быть представлена в следующем виде: если в некоторый начальный момент времени состояния системы находятся в различных долинах α и β и являются взаимно независимыми, то корреляция полей параметра порядка m_α и m_β отсутствует. Тем не менее по истечении времени порядка времени релаксации $\tau_{\alpha\beta}$, необходимого для того, чтобы долины α и β пришли в равновесие, т. е. состояния, принадлежащие этим долинам, перестали быть независимыми, коррелятор принимает некоторое конечное значение $\langle m_\alpha m_\beta^\dagger \rangle \neq 0$. Время релаксации $\tau_{\alpha\beta}$ определяется расстоянием $x_{\alpha\beta}$ между долинами α и β в ультраметрическом пространстве.

Покажем, как можно учесть ультраметричность пространства времен релаксации на примере корреляционной функции $\langle m_+^\alpha(t) m_-^{\dagger\beta}(t') \rangle = iG_{\alpha\beta}^<(t, t')$, связывающей поле $m_+(t)$ на “верхней” части контура интегрирования по времени с полем $m_-(t')$ на “нижней” части контура. В эргодическом случае, когда $\alpha = \beta$, $\langle m_+^\alpha(t) m_-^{\dagger\alpha}(t') \rangle = iG_{\alpha\alpha}^<(t, t') = iG^<(t, t') = ne^{-i\omega_0(t-t')}$, где n – число заполнения Планка. Формально можно представить эту корреляционную функцию в виде функции модуля временного интервала $|t - t'|$: $iG^<(t, t') = \theta(|t - t'|)ne^{-i\omega_0(t-t')}$.

Принимая во внимание ультраметричность пространства времен релаксации, функцию Грина свободного поля m можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle m_+^\alpha(t) m_-^{\dagger\beta}(t') \rangle &= iG_{\alpha\beta}^<(t, t') = \theta(|t - t'| - \tau_{\alpha\beta})n_{\alpha\beta}e^{-i\omega_0(t-t')}; \\ \langle m_-^\alpha(t) m_+^{\dagger\beta}(t') \rangle &= iG_{\alpha\beta}^>(t, t') = \theta(|t - t'| - \tau_{\alpha\beta})(n_{\alpha\beta} + 1)e^{-i\omega_0(t-t')}; \\ \langle m_+^\alpha(t) m_+^{\dagger\beta}(t') \rangle &= iG_{\alpha\beta}^T = \theta((t - t') - \tau_{\alpha\beta})(n_{\alpha\beta} + 1)e^{-i\omega_0(t-t')} + \\ &\quad + \theta((t' - t) - \tau_{\alpha\beta})n_{\alpha\beta}e^{-i\omega_0(t-t')}; \\ \langle m_-^\alpha(t) m_-^{\dagger\beta}(t') \rangle &= iG_{\alpha\beta}^{\bar{T}} = \theta((t - t') - \tau_{\alpha\beta})(n_{\alpha\beta} + 1)e^{-i\omega_0(t-t')} + \\ &\quad + \theta((t' - t) - \tau_{\alpha\beta})n_{\alpha\beta}e^{-i\omega_0(t-t')}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее удобно произвести келдышевский поворот [33], $(m_+, m_-) \rightarrow (m_{cl}, m_q)$, где $m_{cl} = (m_+ + m_-)/\sqrt{2}$ и $m_q = (m_+ - m_-)/\sqrt{2}$ называются классической и квантовой частями поля $\bar{m} = \{m_{cl}, m_q\}$ соответственно. В результате опережающая и запаздывающая части функции Грина [34], действующей в пространстве (m_{cl}, m_q) , имеют вид

$$G_{\alpha\beta}^R(t, t') = \frac{1}{2}[G_{\alpha\beta}^T - G_{\alpha\beta}^{\bar{T}} - G_{\alpha\beta}^< + G_{\alpha\beta}^>] = -i\theta((t - t') - \tau_{\alpha\beta})e^{-i\omega_0(t-t')}, \quad (32)$$

$$G_{\alpha\beta}^A(t, t') = \frac{1}{2}[G_{\alpha\beta}^T - G_{\alpha\beta}^{\bar{T}} + G_{\alpha\beta}^< - G_{\alpha\beta}^>] = i\theta((t' - t) - \tau_{\alpha\beta})e^{-i\omega_0(t-t')}. \quad (33)$$

Для вывода келдышевской части функции Грина предположим, что при $T \gg \tau_{\alpha\beta}$ долины α и β находятся в тепловом равновесии, тогда можно ввести в теорию эффективную температуру $T_{\alpha\beta}$, которая характеризует состояние системы в замкнутой области пространства состояний, объединяющей долины α и β . Тогда в частотном представлении келдышевская часть функции Грина будет иметь вид

$$G_{\alpha\beta}^K(\omega) = \text{cth} \frac{\omega}{T_{\alpha\beta}} (G_{\alpha\beta}^R(\omega) - G_{\alpha\beta}^A(\omega)).$$

В случае высоких температур ($T \gg 0$) $\text{cth}(\omega/T_{\alpha\beta}) \rightarrow T_{\alpha\beta}/\omega$, и мы получаем

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^K(\omega) &= \frac{T_{\alpha\beta}}{\omega} \left[\frac{e^{i\tau_{\alpha\beta}(\omega-\omega_0)} - e^{-i\tau_{\alpha\beta}(\omega-\omega_0)}}{(\omega - \omega_0)} - i2\pi\delta(\omega - \omega_0) \right] = \\ &= i2\pi \frac{T_{\alpha\beta}}{\omega} \left[\frac{\sin(\tau_{\alpha\beta}(\omega - \omega_0))}{\pi(\omega - \omega_0)} - \delta(\omega - \omega_0) \right]. \end{aligned}$$

Во временном представлении

$$G_{\alpha\beta}^K(t, t') = -i\theta(|t' - t| - \tau_{\alpha\beta}) \frac{T_{\alpha\beta}}{\omega_0} e^{-i\omega_0|t-t'|}.$$

Таким образом, оператор корреляционной функции квазинезергодической многочастичной системы бозонов представляется в виде

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(t) = \theta(|t| - \tau_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} -i \frac{T_{\alpha\beta}}{\omega_0} e^{-i\omega_0|t|} & -i\theta(t) e^{-i\omega_0|t|} \\ i\theta(-t) e^{i\omega_0|t|} & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Полученное выражение представляет собой произведение функции Грина эргодической системы $G(t)$ и тета-функции Хевисайда $\theta(|t| - \tau_{\alpha\beta})$. Матричной функции Грина соответствует нелокальное по времени действие

$$iS_{\text{nonloc}} = \int dt dt' \bar{m}_{\alpha}(t) \hat{G}_{\alpha\beta}^{-1}(t - t') \bar{m}_{\beta}(t'), \quad (35)$$

не удовлетворяющее ФДТ, поскольку величины $T_{\alpha\beta}$ в общем случае не совпадают с термодинамической температурой T , определяемой при условии $t \rightarrow \infty$. В работах [39]–[41] было показано, что кинетика релаксации такой системы вблизи стекольного перехода T_g , удовлетворяет закону Фогеля–Фулчера–Таммана. Существенной особенностью рассматриваемой теории и одним из ключевых результатов является появление в процессе перенормировки эффективных температур $T_{\alpha\beta}$, характеризующих состояния, в которых долины (реплики) α и β находятся в равновесии между собой. Только в случае, когда $\alpha = \beta$, ФДТ будет выполняться. Динамика типа Фогеля–Фулчера–Таммана развивается тогда, когда в репличном пространстве в процессе динамической перенормировки келдышевского действия полностью нарушается ФДТ.

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ (гранты № 11-02-00341, 10-02-00700, 10-02-00882, 12-03-00757) и Российскую академию наук (программа 12-П-3-1013), при частичной поддержке которых выполнена работа.

Список литературы

- [1] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, M. Virasoro, *Phys. Rev. Lett.*, **52**:13 (1984), 1156–1159.
- [2] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, *Rev. Modern Phys.*, **58**:3 (1986), 765–788.
- [3] D. Sherrington, S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:26 (1975), 1792–1796; S. Kirkpatrick, D. Sherrington, *Phys. Rev. B*, **17**:11 (1978), 4384–4403.
- [4] S. F. Edwards, P. W. Anderson, *J. Phys. F*, **5**:5 (1975), 965–974.
- [5] Н. Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, Препринт ОИЯИ Д-781, ОИЯИ, Дубна, 1961; *Собрание научных трудов в 12 томах, т. 6: Статистическая механика. Равновесная статистическая механика*. 1945–1986, Наука, М., 2006.
- [6] G. Parisi, *J. Phys. A*, **13**:4 (1980), L115, 8 pp.
- [7] G. Parisi, *J. Phys. A*, **13**:5 (1980), 1887–1895.
- [8] G. Parisi, *Glasses, replicas and all that*, arXiv:cond-mat/0301157.
- [9] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [10] G. Parisi, N. Sourlas, *P-adic numbers and replica symmetry breaking*, arXiv:cond-mat/9906095.
- [11] F. Guerra, *Internat. J. Modern Phys. B*, **10**:13–14 (1996), 1675–1684.
- [12] M. Aizenman, P. Contucci, *J. Statist. Phys.*, **92**:5–6 (1998), 765–783, arXiv:cond-mat/9712129.
- [13] G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, *J. Phys. A*, **33**:1 (2000), 113–129, arXiv:cond-mat/9905189.
- [14] В. С. Доценко, *УФН*, **163**:6 (1993), 1–37.
- [15] Е. Е. Тареева, Т. И. Щелкачева, Н. М. Щелкачев, *ТМФ*, **160**:2 (2009), 385–400.
- [16] D. J. Gross, I. Kanter, H. Sompolinsky, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:3 (1985), 304–307.
- [17] N. V. Gribova, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *Phys. Rev. E*, **68**:6 (2003), 067103.
- [18] A. Crisanti, H.-J. Sommers, *Z. Phys. B*, **87**:3 (1992), 341–354.
- [19] E. A. Lutchinskaia, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, *J. Phys. C*, **17**:26 (1984), L665–L667; E. A. Lutchinskaia, E. E. Tareyeva, *Phys. Rev. B*, **52**:1 (1995), 366–373.
- [20] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, *Phys. Rev. E*, **79**:2 (2009), 021105, 7 pp., arXiv:0809.0877.
- [21] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, *Phys. Rev. B*, **76**:19 (2007), 195408, 7 pp., arXiv:cond-mat/0610310.
- [22] J. R. L. de Almeida, D. J. Thouless, *J. Phys. A*, **11**:5 (1978), 983–990.
- [23] T. I. Schelkacheva, N. M. Chtchelkatchev, *J. Phys. A*, **44**:44 (2011), 445004.
- [24] T. I. Schelkacheva, E. E. Tareyeva, N. M. Chtchelkatchev, *Phys. Lett. A*, **358**:3 (2006), 222–226, arXiv:cond-mat/051159.
- [25] M. Mézard, G. Parisi, M. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific Lecture Notes in Physics, **9**, World Scientific, Singapore, 1987.
- [26] С. Л. Гинзбург, *Необратимые явления в спиновых стеклах*, Современные проблемы физики, **79**, Наука, М., 1989.
- [27] И. Я. Коренблит, Е. Ф. Шендер, *УФН*, **157**:2 (1989), 267–310.
- [28] D. R. Reichman, P. Charbonneau, *J. Statist. Mech.*, **05** (2005), 05013, 24 pp., arXiv:cond-mat/0511407.
- [29] L. F. Cugliandolo, *Dynamics of glassy systems*, arXiv:cond-mat/0210312.
- [30] G. Parisi, N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:11 (1979), 744–745.
- [31] J. Kurchan, *J. Phys. I (France)*, **2**:7 (1992), 1333–1352.
- [32] В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, *Метод функций Грина в статистической механике*, Физматлит, М., 1961.

- [33] Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ*, **47**:4 (1964), 1515–1527.
- [34] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, *Nanophysics: Coherence and Transport*, eds. H. Bouchiat, Y. Gefen, S. Gueron, G. Montambaux, J. Dalibard, Elsevier, Amsterdam, 2005, 177–246.
- [35] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437; C. De Dominicis, *J. Physique Colloques*, **37**:C1 (1976), C1-247–C1-253.
- [36] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 435–479.
- [37] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [38] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, М., 1982.
- [39] М. Г. Васин, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 328–336.
- [40] М. Г. Васин, Н. М. Щелкачёв, В. М. Винокур, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 163–176.
- [41] M. G. Vasin, *Phys. Rev. B*, **74**:21 (2006), 214116, 5 pp.

Поступила в редакцию 14.08.2012