Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Формальный комплекс де Рама, *ТМФ*,
2013, том 174, номер 2, 256–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:54:48

© 2013 г.

В. В. Жаринов*

ФОРМАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ДЕ РАМА

Предлагается формальная конструкция, обобщающая классический комплекс де Рама на широкий спектр моделей математической физики и анализа. Изложение разбито на ряд последовательных определений и элементарных легко проверяемых утверждений, поэтому доказательства приведены лишь в ключевых случаях. Линейные операции всюду выполняются над фиксированным числовым полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, и, хотя это явно не оговаривается, все вводимые линейные пространства, алгебры и модули по определению или по построению обладают естественными локально выпуклыми топологиями, а их морфизмы непрерывны.

Ключевые слова: комплекс де Рама, мультипликатор, дифференцирование, внешняя алгебра, граничный оператор, внешний дифференциал, комплекс, ассоциированный с алгеброй, градуировка.

DOI: 10.4213/tmf8402

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящей работе используются стандартные обозначения теории гомологий (см., например, монографию [1]).

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$. Как известно, на линейном пространстве $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ всех эндоморфизмов линейного пространства $\mathcal{A}$ (т. е. линейных отображений из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$) определены две алгебраические структуры:

- основная структура унитарной ассоциативной алгебры с умножением, заданным композицией эндоморфизмов,

$$\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \times \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}), \quad (X, Y) \mapsto X \circ Y$$

(где единица $\text{id}_{\mathcal{A}}$ – тождественное отображение), соответствующая алгебра обозначается также через $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$;

- дополнительная структура алгебры Ли со скобкой Ли, задаваемой коммутатором отображений,

$$\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \times \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}), \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X;$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

соответствующая алгебра обозначается через $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ (другими словами, $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ – присоединенная алгебра Ли ассоциативной алгебры $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$);

- причем выполнено правило согласования

$$[X \circ Y, Z] = X \circ [Y, Z] + [X, Z] \circ Y \quad \text{для всех } X, Y, Z \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}).$$

Напомним также, что *центр алгебры* $\mathcal{A}$ есть подалгебра

$$\text{cen } \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех } b \in \mathcal{A}\},$$

а *аннулятор алгебры* $\mathcal{A}$ есть идеал

$$\text{ann } \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \cdot b = b \cdot a = 0 \quad \text{для всех } b \in \mathcal{A}\}.$$

Эндоморфизм $M \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *мультипликатором алгебры* $\mathcal{A}$ (см. статью [2]), если выполняется мультипликативное правило

$$M(a \cdot b) = (Ma) \cdot b = a \cdot (Mb) \quad \text{для всех } a, b \in \mathcal{A}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ множество всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$.

- Множество $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ есть унитарная подалгебра алгебры $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.
- Для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ ядро $\ker M$ и образ $\text{Im } M$,

$$\ker M = \{a \in \mathcal{A} \mid Ma = 0\}, \quad \text{Im } M = \{a = Mb \mid b \in \mathcal{A}\},$$

суть идеалы алгебры $\mathcal{A}$.

- Имеют место включения образов $M(\text{cen } \mathcal{A}) \subset \text{cen } \mathcal{A}$ и $M(\text{ann } \mathcal{A}) \subset \text{ann } \mathcal{A}$.
- Коммутатор $[M, N] \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \text{ann } \mathcal{A})$ для всех $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.
- Алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, если $\text{ann } \mathcal{A} = 0$ (например, если алгебра $\mathcal{A}$ унитарная).
- Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра, $e \in \mathcal{A}$ – ее единица. Определено отображение

$$e^*: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}, \quad M \mapsto e^*M = Me,$$

причем $\text{Im } e^* \subset \text{cen } \mathcal{A}$, а отображение $e^*: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{cen } \mathcal{A}$ есть инъективный морфизм алгебр.

- Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра. Левое присоединенное действие в алгебре $\mathcal{A}$ индуцирует морфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned} \text{ad}: \text{cen } \mathcal{A} &\rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A}), & a &\mapsto a_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \\ & & b &\mapsto a \cdot b, \end{aligned}$$

причем $\ker \text{ad} = \text{ann } \mathcal{A}$. Если к тому же алгебра $\mathcal{A}$ унитарная, то этот морфизм есть изоморфизм, а обратный морфизм $\text{ad}^{-1} = e^*$.

- Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная ассоциативная коммутативная алгебра. Тогда присоединенное действие индуцирует естественный изоморфизм ассоциативных алгебр $\mathcal{A} \simeq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, отождествляющий алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Эндоморфизм $X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$* , если выполняется *правило Лейбница*

$$X(a \cdot b) = (Xa) \cdot b + a \cdot (Xb) \quad \text{для всех } a, b \in \mathcal{A}.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$.

- Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.
- Для любого $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ ядро $\ker X$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$.
- Для любого $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ образ $\text{Im } X$ – линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{A}$.
- Для любого $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ имеют место включения образов $X(\text{sep } \mathcal{A}) \subset \text{sep } \mathcal{A}$ и $X(\text{ann } \mathcal{A}) \subset \text{ann } \mathcal{A}$.
- Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра и $\text{as } \mathcal{A}$ – ее присоединенная алгебра Ли с коммутатором в качестве скобки Ли. Ассоциированное действие в алгебре $\mathcal{A}$ индуцирует морфизм алгебр Ли

$$\begin{aligned} \text{ad}: \text{as } \mathcal{A} &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), & a &\mapsto a_{\text{as } \mathcal{A}}: \text{as } \mathcal{A} \rightarrow \text{as } \mathcal{A}, \\ & & b &\mapsto [a, b]. \end{aligned}$$

Дифференцирования $a_{\text{as } \mathcal{A}}$, $a \in \mathcal{A}$, называются *внутренними дифференцированиями* алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, у коммутативной алгебры есть только тривиальное нулевое внутреннее дифференцирование.

- Множество $\mathfrak{D}_{\text{int}}(\mathcal{A})$ всех внутренних дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ есть идеал алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

По построению множества $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ лежат в $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, и это позволяет определить взаимные действия мультипликаторов и дифференцирований, используя композиции и коммутаторы в объемлющей алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Прежде всего, левое присоединенное действие в объемлющей алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ индуцирует следующие морфизмы ассоциативных алгебр.

- Морфизм

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})), & M &\mapsto M_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \\ & & N &\mapsto M \circ N; \end{aligned}$$

его сужение на $\text{sep } \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ есть изоморфизм $\text{sep } \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. В частности, если алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, то имеется естественный изоморфизм $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

- Морфизм

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})), & M &\mapsto M_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \\ & & X &\mapsto M \circ X. \end{aligned}$$

В частности, линейное пространство $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ имеет структуру левого $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ -модуля.

Аналогичным образом ассоциированное действие в объемлющей алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ индуцирует следующие морфизмы алгебр Ли.

- Морфизм

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})), & X &\mapsto X_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \\ & & M &\mapsto [X, M]. \end{aligned}$$

В частности, линейное пространство $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ обладает структурой модуля Ли над алгеброй $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

- Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная и коммутативная, то для любого $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{X} & \mathcal{A} \\ \text{ad} \downarrow & & \downarrow \text{ad} \\ \mathfrak{M}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{X_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}} & \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \end{array} .$$

- Морфизм

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})), & X &\mapsto X_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \\ & & Y &\mapsto [X, Y]. \end{aligned}$$

- Если алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, то справедливо *правильно ассоциативности*

$$M(X)_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})} = M_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})} \circ X_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})} \quad \text{для всех } M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Приведем два, в некотором смысле крайних, примера.

ПРИМЕР 1.1. Пусть M – вещественное гладкое конечномерное многообразие и $\mathcal{C}^\infty(M)$ – (унитальная ассоциативная коммутативная) алгебра всех $\mathbb{F}$ -значных гладких функций на M . Здесь алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{C}^\infty(M)) = \mathcal{C}^\infty(M)$ и, как можно показать (см., например, [3]), $\mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(M)) = \mathcal{T}(M)$, т. е. алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(M))$ канонически изоморфна алгебре Ли $\mathcal{T}(M)$ всех гладких касательных полей на многообразии M .

ПРИМЕР 1.2. Пусть Mat_m – (унитальная ассоциативная) алгебра всех комплексных квадратных матриц m -го порядка ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Здесь алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\text{Mat}_m) = \mathbb{C}$ (алгебра всех матриц, кратных единичной) и алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{D}(\text{Mat}_m) = \mathfrak{D}_{\text{int}}(\text{Mat}_m)$ (см., например, книги [4] или [5], где доказан гораздо более общий результат).

2. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ФОРМАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

При построении формального комплекса мы предполагаем, что заданы

- $\mathfrak{M}$ – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра,
- $\mathfrak{D}$ – алгебра Ли,
- $\mathfrak{K}$ – линейное пространство,

причем в дополнение к присоединенным действиям

- морфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}), \quad M \mapsto M_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \\ N \mapsto M \cdot N; \end{aligned} \quad (\text{M-M})$$

- морфизм алгебр Ли

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}), \quad X \mapsto X_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}, \\ Y \mapsto [X, Y]; \end{aligned} \quad (\text{D-D})$$

определены также следующие взаимные действия:

- морфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}), \quad M \mapsto M_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}, \\ X \mapsto M(X), \end{aligned} \quad (\text{M-D})$$

в частности, на $\mathfrak{D}$ определена структура $\mathfrak{M}$ -модуля;

- морфизм алгебр Ли

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}), \quad X \mapsto X_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \\ M \mapsto X(M), \end{aligned} \quad (\text{D-M})$$

в частности, на $\mathfrak{M}$ определена структура модуля Ли над алгеброй $\mathfrak{D}$, причем выполняются *правило ассоциативности* $M(X)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} \circ X_{\mathfrak{M}}$ и *правило Лейбница* $[X_{\mathfrak{D}}, M_{\mathfrak{D}}] = X(M)_{\mathfrak{D}}$;

- морфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{K}}: \mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K}), \quad M \mapsto M_{\mathfrak{K}}: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}, \\ k \mapsto M(k), \end{aligned} \quad (\text{M-K})$$

в частности, на $\mathfrak{K}$ определена структура $\mathfrak{M}$ -модуля;

- морфизм алгебр Ли

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathfrak{K}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{K}), \quad X \mapsto X_{\mathfrak{K}}: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}, \\ k \mapsto X(k), \end{aligned} \quad (\text{D-K})$$

в частности, на $\mathfrak{K}$ определена структура модуля Ли над алгеброй $\mathfrak{D}$, причем выполняются *правило ассоциативности* $M(X)_{\mathfrak{K}} = M_{\mathfrak{K}} \circ X_{\mathfrak{K}}$ и *правило Лейбница* $[X_{\mathfrak{K}}, M_{\mathfrak{K}}] = X(M)_{\mathfrak{K}}$.

Здесь всюду $M, N \in \mathfrak{M}$, $X, Y \in \mathfrak{D}$ и $k \in \mathfrak{K}$:

Выделим ряд полезных частных случаев.

ПРИМЕР 2.1. Для заданных составляющих $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям (M-D) и (D-M), можно положить $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K} = \mathfrak{D}$. В первом случае совпадают взаимные действия (M-K) и (M-M), а также (D-K) и (D-M), во втором случае – взаимные действия (M-K) и (M-D), а также (D-K) и (D-D).

ПРИМЕР 2.2. Для данной алгебры Ли $\mathfrak{D}$ можно положить $\mathfrak{M} = \mathbb{F}$. В этом случае действие (M-D) задается умножением на элементы поля $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}$ -линейном пространстве $\mathfrak{D}$, а действие (D-M) тривиальное ($\varkappa_{\mathbb{F}} = 0$). Затем можно положить $\mathfrak{K} = \mathbb{F}$ или $\mathfrak{K} = \mathfrak{D}$ (см. пример 2.1).

ПРИМЕР 2.3. Для данной алгебры $\mathcal{A}$, $\text{ann } \mathcal{A} = 0$, мы полагаем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $\mathfrak{K} = \mathcal{A}, \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Действия $\mu = \text{ad}: \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ и $\varkappa = \text{as}: \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ определены в разделе 1. Действия $\mu_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$, $\varkappa_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$, $\mu_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}$ и $\varkappa_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}$ определяются, как в примере 2.1. В случае $\mathfrak{K} = \mathcal{A}$ действия $\mu_{\mathcal{A}}$ и $\varkappa_{\mathcal{A}}$ содержатся в определении мультипликаторов и дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ (см. раздел 1).

ПРИМЕР 2.4. Пусть даны составляющие $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{K}$, удовлетворяющие условиям (M-M)–(D-K), и пусть $\mathfrak{K}' = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K}, \mathbb{F})$ – дуальное линейное пространство (пространство $\mathbb{F}$ -линейных функционалов на $\mathfrak{K}$). Требуется определить действия $\mu_{\mathfrak{K}'}: \mathfrak{M} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K}')$ и $\varkappa_{\mathfrak{K}'}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{K}')$ так, чтобы для $\mathfrak{K}'$ удовлетворялись условия, аналогичные (M-K), (D-K), правило ассоциативности и правило Лейбница. Морфизм $\mu_{\mathfrak{K}'}$ без проблем задается правилом $(M \cdot g, k) = (g, M \cdot k)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{K}'$ и $k \in \mathfrak{K}$. Ситуация с морфизмом $\varkappa_{\mathfrak{K}'}$ неоднозначная. Разумное решение существует, если $\mathfrak{M}$ -модуль $\mathfrak{D}$ свободный, имеет конечный базис $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае

$$\mathfrak{D} = \left\{ X = \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \xi^\alpha \cdot \partial_\alpha \mid \xi^\alpha \in \mathfrak{M} \right\},$$

и все условия будут выполнены, если положить $(\partial_\alpha(g), k) = -(g, \partial_\alpha(k))$ для всех $1 \leq \alpha \leq m$ и любых $g \in \mathfrak{K}'$, $k \in \mathfrak{K}$. Заметим, что это определение зависит от выбора базиса.

3. ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА $\wedge \mathfrak{D}$

Мы считаем, что даны составляющие $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{K}$, удовлетворяющие условиям (M-M)–(D-K). Пусть $\wedge \mathfrak{D} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \wedge^q \mathfrak{D}$ – внешняя алгебра $\mathfrak{M}$ -модуля $\mathfrak{D}$ (тензорное произведение берется в категории $\mathfrak{M}$ -модулей, для краткости здесь и ниже мы пишем $\wedge$ вместо $\wedge_{\mathfrak{M}}$).

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$ -модулей)

$$\begin{aligned} \lambda: \mathfrak{D} \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}), \quad X \mapsto \lambda_X: \wedge^q \mathfrak{D} \rightarrow \wedge^{q+1} \mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \\ V \mapsto \lambda_X V = X \wedge V. \end{aligned}$$

В частности, $\lambda_X M = M \cdot X$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $M \in \wedge^0 \mathfrak{D} = \mathfrak{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм λ_X есть косой (иначе говоря, $\mathbb{Z}_2$ -градуированный) мультипликатор внешней алгебры $\wedge \mathfrak{D}$, т. е.

$$\lambda_X(V \wedge W) = (\lambda_X V) \wedge W = (-1)^q V \wedge (\lambda_X W)$$

для всех $V \in \wedge^q \mathfrak{D}$, $W \in \wedge \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство

$$\lambda_X \circ \lambda_Y + \lambda_Y \circ \lambda_X = 0.$$

В частности, $\lambda_X \circ \lambda_X = 0$ для каждого $X \in \mathfrak{D}$, так что определен комплекс $\{\wedge \mathfrak{D}, \lambda_X\} = \{\wedge^q \mathfrak{D}, \lambda_X^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\lambda_X^q = \lambda_X|_{\wedge^q \mathfrak{D}}$.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$ -модулей)

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathfrak{D} &\rightarrow \text{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}), & X &\mapsto \Lambda_X: \wedge^q \mathfrak{D} \rightarrow \wedge^{q+1} \mathfrak{D}, \\ & & V &\mapsto \Lambda_X V = q \cdot X \wedge V, \end{aligned} \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, $\Lambda|_{\wedge^q \mathfrak{D}} = q \cdot \lambda|_{\wedge^q \mathfrak{D}}$ для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Справедливы равенства*

- $\Lambda_X(V \wedge W) = (\Lambda_X V) \wedge W + (-1)^q V \wedge (\Lambda_X W)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, $V \in \wedge^q \mathfrak{D}$, $W \in \wedge \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$;
- $\Lambda_X \circ \Lambda_Y + \Lambda_Y \circ \Lambda_X = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$.

В частности, Λ_X – косое дифференцирование внешней алгебры $\wedge \mathfrak{D}$ для каждого $X \in \mathfrak{D}$.

Положим $\Theta^1 = \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{D}^*$. Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$ -модулей)

$$\begin{aligned} \iota: \Theta^1 &\rightarrow \text{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D}), & \theta &\mapsto \iota_\theta: \wedge^q \mathfrak{D} \rightarrow \wedge^{q-1} \mathfrak{D}, \\ & & X_1 \wedge \cdots \wedge X_q &\mapsto \iota_\theta(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q), \end{aligned} \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

где

$$\iota_\theta(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) = \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} \theta(X_i) \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge X_q.$$

В частности, $\iota_\theta(M) = 0$ для всех $\theta \in \Theta^1$ и $M \in \mathfrak{M} = \wedge^0 \mathfrak{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и всюду ниже значок $\sim$ означает, что соответствующий аргумент пропущен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для каждого $\theta \in \Theta^1$ эндоморфизм ι_θ есть косое дифференцирование внешней алгебры $\wedge \mathfrak{D}$, т. е.*

$$\iota_\theta(V \wedge W) = (\iota_\theta V) \wedge W + (-1)^q V \wedge (\iota_\theta W)$$

для всех $V \in \wedge^q \mathfrak{D}$, $W \in \wedge \mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Для всех $\theta, \chi \in \Theta^1$ имеет место равенство*

$$\iota_\theta \circ \iota_\chi + \iota_\chi \circ \iota_\theta = 0.$$

В частности, $\iota_\theta \circ \iota_\theta = 0$ для каждого $\theta \in \Theta^1$, так что определен комплекс $\{\wedge \mathfrak{D}, \iota_\theta\} = \{\wedge^q \mathfrak{D}, \iota_\theta^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_\theta^q = \iota_\theta|_{\wedge^q \mathfrak{D}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Для любых $X \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \Theta^1$ справедливо равенство*

$$\lambda_X \circ \iota_\theta + \iota_\theta \circ \lambda_X = \theta(X) \cdot \text{id}_{\wedge \mathfrak{D}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть $X \in \mathfrak{D}$, $\theta \in \Theta^1$, причем $\theta(X) = 1_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, тогда комплексы $\{\wedge \mathfrak{D}, \lambda_X\}$ и $\{\wedge \mathfrak{D}, \iota_\theta\}$ ациклические, т. е. все их $\mathfrak{M}$ -модули когомологий тривиальны.*

Перейдем к другому классу действий. Присоединенное действие $\text{ad}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D})$, заданное как

$$X \mapsto X_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}, \quad Y \mapsto X(Y) = [X, Y] \quad \text{для всех } X, Y \in \mathfrak{D},$$

индуцирует действие (морфизм $\mathbb{F}$ -линейных пространств)

$$L: \mathfrak{D} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\wedge \mathfrak{D}), \quad X \mapsto L_X: \wedge^q \mathfrak{D} \rightarrow \wedge^q \mathfrak{D},$$

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_q \mapsto \sum_{1 \leq i \leq q} X_1 \wedge \cdots \wedge [X, X_i] \wedge \cdots \wedge X_q, \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, $L_X M = X(M)$ и $L_X Y = [X, Y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм L_X есть дифференцирование внешней алгебры $\wedge \mathfrak{D}$, т.е. для всех $V, W \in \wedge \mathfrak{D}$

$$L_X(V \wedge W) = L_X(V) \wedge W + V \wedge L_X(W).$$

В частности, $\text{Im } L \subset \mathfrak{D}(\wedge \mathfrak{D})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Действие $L: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\wedge \mathfrak{D})$ есть морфизм алгебр Ли, т.е. $L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство $\lambda_{[X, Y]} = [L_X, \lambda_Y]$.

Рассмотрим частный случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{D}$ действует на алгебре $\mathfrak{M}$ (см. условие (D–M)) тривиально, т.е. $X(M) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $M \in \mathfrak{M}$. В этой ситуации $[X, M \cdot Y] = M \cdot [X, Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$ и $M \in \mathfrak{M}$, так что определен граничный оператор $\delta \in \text{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge \mathfrak{D})$,

$$\delta: \wedge^q \mathfrak{D} \rightarrow \wedge^{q-1} \mathfrak{D}, \quad X_1 \wedge \cdots \wedge X_q \mapsto \delta(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q),$$

где

$$\delta(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge \check{X}_j \wedge \cdots \wedge X_q.$$

В частности, $\delta(M) = 0$, $\delta(X) = 0$, $\delta(X \wedge Y) = [X, Y]$ для всех $M \in \mathfrak{M}$, $X, Y \in \mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство

$$\delta \circ \lambda_X + \lambda_X \circ \delta = L_X.$$

ЛЕММА 3.1. Для данного $X \in \mathfrak{D}$ положим $F_X = \delta \circ L_X - L_X \circ \delta$, тогда для всех $Y \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство $F_X \circ \lambda_Y + \lambda_Y \circ F_X = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство

$$\delta \circ L_X - L_X \circ \delta = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует доказать, что $F_X = 0$. Для этого достаточно использовать индукцию по $q \in \mathbb{Z}_+$ и лемму 3.1.

ЛЕММА 3.2. Положим $F = \delta \circ \delta$, тогда $F \circ \lambda_X - \lambda_X \circ F = 0$ для всех $X \in \mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Справедливо равенство $\delta \circ \delta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять используем индукцию по $q \in \mathbb{Z}_+$ и лемму 3.2.

В частности, в случае тривиального действия алгебры Ли $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{M}$ определен комплекс $\{\wedge \mathfrak{D}, \delta\} = \{\wedge^q \mathfrak{D}, \delta^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\delta^q = \delta|_{\wedge^q \mathfrak{D}}$.

4. КОМПЛЕКС $\{\Omega, D\}$

Рассмотрим $\mathfrak{M}$ -модули

$$\begin{aligned}\Theta &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Theta^q, & \Theta^q &= \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}, \mathfrak{M}), \\ \Omega &= \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q, & \Omega^q &= \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}, \mathfrak{K}).\end{aligned}$$

По построению $\mathfrak{M}$ -модуль Θ обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым *стандартной формулой*

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+q}) &= \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \text{sign } \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p+q)}) = \\ &= (-1)^{pq} (\chi \wedge \omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+q})\end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Theta^q$, $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$. В свою очередь, $\mathfrak{M}$ -модуль Ω обладает структурой внешнего Θ -модуля (здесь $\mathfrak{M} = \Theta^0$ – подалгебра алгебры Θ), где для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Omega^q$ произведение $\omega \wedge \chi$ также задается стандартной формулой.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$ -модулей)

$$\begin{aligned}\lambda: \Theta^1 &\rightarrow \text{End}_{\mathfrak{M}}(\Omega), & \theta &\mapsto \lambda_\theta: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}, & q &\in \mathbb{Z}_+, \\ & & \omega &\mapsto \lambda_\theta \omega = \theta \wedge \omega.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для каждой $\theta \in \Theta^1$ эндоморфизм λ_θ есть косоуплотнитель внешней алгебры Θ и внешнего Θ -модуля Ω , т. е.

$$\lambda_\theta(\omega \wedge \chi) = (\lambda_\theta \omega) \wedge \chi = (-1)^q \omega \wedge (\lambda_\theta \chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^q$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для всех $\theta, \chi \in \Theta^1$ имеет место равенство

$$\lambda_\theta \circ \lambda_\chi + \lambda_\chi \circ \lambda_\theta = 0.$$

В частности, $\lambda_\theta \circ \lambda_\theta = 0$ для каждого $\theta \in \Theta^1$, так что определен комплекс $\mathfrak{M}$ -модулей $\{\Omega^q, \lambda_\theta^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\lambda_\theta^q = \lambda_\theta|_{\Omega^q}$.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$ -модулей)

$$\begin{aligned} \iota: \mathfrak{D} &\rightarrow \text{End}_{\mathfrak{M}}(\Omega), & X &\mapsto \iota_X: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q-1}, & q &\in \mathbb{Z}_+, \\ & & \omega &\mapsto \iota_X \omega = \omega \circ \Lambda_X, \end{aligned}$$

т. е. $(\iota_X \omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{q-1}) = q \cdot \omega(X \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{q-1})$ при всех $X_1, \dots, X_{q-1} \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. В частности, для каждого $X \in \mathfrak{D}$ имеем $\iota_X k = 0$ при всех $k \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$ и $\iota_X \omega = \omega(X)$ при всех $\omega \in \Omega^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм ι_X есть косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ -модуля Ω , т. е.

$$\iota_X(\omega \wedge \chi) = (\iota_X \omega) \wedge \chi + (-1)^q \omega \wedge (\iota_X \chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^q$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0.$$

В частности, $\iota_X \circ \iota_X = 0$ для каждого $X \in \mathfrak{D}$, так что определен комплекс $\mathfrak{M}$ -модулей $\{\Omega^q, \iota_X^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_X^q = \iota_X|_{\Omega^q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Для всех $X \in \mathfrak{D}$, $\theta \in \Theta^1$ имеет место равенство

$$\iota_X \circ \lambda_\theta + \lambda_\theta \circ \iota_X = \theta(X) \cdot \text{id}_\Omega.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $X \in \mathfrak{D}$, $\theta \in \Theta^1$, $\theta(X) = 1_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$. Тогда комплексы $\{\Omega^q, \lambda_\theta^q\}$ и $\{\Omega^q, \iota_X^q\}$ ациклические, т. е. все их $\mathfrak{M}$ -модули когомологий тривиальные.

Определено действие (морфизм $\mathbb{F}$ -линейных пространств)

$$\begin{aligned} L: \mathfrak{D} &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega), & X &\mapsto L_X: \Omega^q \rightarrow \Omega^q, & q &\in \mathbb{Z}_+, \\ & & \omega &\mapsto L_X(\omega) = X_{\mathfrak{K}} \circ \omega - \omega \circ L_X, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} L_X(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) &= \\ &= X(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q)) - \sum_{1 \leq i \leq q} \omega(X_1 \wedge \cdots \wedge [X, X_i] \wedge \cdots \wedge X_q) \end{aligned}$$

для всех $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм L_X есть дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ -модуля Ω , т. е.

$$L_X(\omega \wedge \chi) = L_X(\omega) \wedge \chi + \omega \wedge L_X(\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Действие $L: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}(\Omega)$ есть морфизм алгебр Ли, т. е. $L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство $\iota_{[X, Y]} = [L_X, \iota_Y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Существует единственный эндоморфизм $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$, где $d: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}$, такой, что $d \circ \iota_X + \iota_X \circ d = L_X$ для всех $X \in \mathfrak{D}$, и этот эндоморфизм задается формулой Картана:

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge X_q)) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge \check{X}_j \wedge \cdots \wedge X_q) \right\}$$

для всех $\omega \in \Omega^q$ и $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$. Для $q = 0$ имеем при всех $\omega \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$, $X \in \mathfrak{D}$

$$\iota_X(\omega) = 0, \quad d(\iota_X(\omega)) = 0, \quad \iota_X(d\omega) = d\omega(X), \quad L_X(\omega) = X(\omega),$$

так что $d\omega(X) = X(\omega)$, как и требуется. Пусть утверждение верно для $q - 1$, тогда для всех $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$ имеем

$$d(\iota_{X_0}\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) = \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge X_q)) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega(X_0 \wedge [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge \check{X}_j \wedge \cdots \wedge X_q).$$

Далее, $\iota_{X_0}(d\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) = (q+1) \cdot d\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_q)$ и, наконец,

$$L_{X_0}(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q) = X_0(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_q)) + \\ + \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^i \omega([X_0, X_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \check{X}_i \wedge \cdots \wedge X_q).$$

Подставляя полученные выражения в определяющую формулу для дифференциала, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения для любого $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Эндоморфизм d есть косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ -модуля Ω , т. е.

$$d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^q \omega \wedge (d\chi)$$

для всех $\omega \in \Omega^q$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Для всех $X \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство $d \circ L_X - L_X \circ d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in \mathfrak{D}$. Положим

$$F_X: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}, \quad F_X = d \circ L_X - L_X \circ d.$$

Легко проверяется, что $F_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ F_X = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$. Опираясь на это равенство, мы можем доказать требуемое утверждение индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. *Эндоморфизм d есть внешний дифференциал, т.е. справедливо равенство $d \circ d = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+2}$, $F = d \circ d$. Легко проверяется, что $F \circ \iota_X = \iota_X \circ F$ для всех $X \in \mathfrak{D}$. Как и выше, индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$ отсюда выводится требуемое равенство $d \circ d = 0$.

Таким образом, определен комплекс $\{\Omega, d\} = \{\Omega^q, d^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $d^q = d|_{\Omega^q}: \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}$.

В приложениях часто встречается ситуация, когда $\mathfrak{K}$ обладает дополнительной структурой ассоциативной алгебры, причем к соотношениям (M-K), (D-K) добавляются следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} M(k \cdot l) &= M(k) \cdot l = k \cdot M(l) && \text{для всех } M \in \mathfrak{M}, \\ X(k \cdot l) &= X(k) \cdot l + k \cdot X(l) && \text{для всех } X \in \mathfrak{D}, \quad k, l \in \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

В этом случае $\mathfrak{M}$ -модуль Ω обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым стандартной формулой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. *Если $\mathfrak{K}$ обладает согласованной структурой ассоциативной алгебры, то для любых $\omega \in \Omega^q$, $\chi \in \Omega$, $q \in \mathbb{Z}_+$*

- *для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм $\iota_X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ есть косое дифференцирование алгебры Ω , т.е.*

$$\iota_X(\omega \wedge \chi) = (\iota_X \omega) \wedge \chi + (-1)^q \omega \wedge (\iota_X \chi);$$

- *для каждого $X \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм $L_X \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ есть дифференцирование алгебры Ω , т.е.*

$$L_X(\omega \wedge \chi) = (L_X \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (L_X \chi);$$

- *эндоморфизм $d \in \text{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ есть косое дифференцирование алгебры Ω , т.е.*

$$d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^q \omega \wedge (d\chi).$$

5. КОМПЛЕКС, АССОЦИИРОВАННЫЙ С АЛГЕБРОЙ

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\text{ann } \mathcal{A} = 0$, и заданы составляющие комплекса (см. пример 2.3)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \mathfrak{K} = \mathcal{A}.$$

В этом случае $\Omega^q = \Omega^q(\mathcal{A}) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}(\wedge^q \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$, $q \in \mathbb{Z}_+$, и комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{A}), d^q\}$ называется *комплексом де Рама, ассоциированным с алгеброй $\mathcal{A}$* . Его линейные пространства когомологий суть $H^q(\mathcal{A}) = \ker d^q / \text{Im } d^{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРИМЕР 5.1. Пусть (см. пример 1.1) M – вещественное гладкое многообразие, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, $\mathfrak{M} = \mathcal{A} = C^\infty(M)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(C^\infty(M)) = \mathcal{T}(M)$. Здесь $\Omega(C^\infty(M)) = \Omega(M)$ – внешняя алгебра всех гладких дифференциальных форм на M , $\{\Omega^q(M), d^q\}$ – классический комплекс де Рама многообразия M с пространствами когомологий $H^q(M) = H^q(C^\infty(M))$.

ПРИМЕР 5.2. Пусть $M = \mathbb{R}^m$ – вещественное m -мерное евклидово пространство. Пространства когомологий $H^q(\mathbb{R}^m)$ комплекса $\{\Omega^q(\mathbb{R}^m), d^q\}$ хорошо известны. А именно,

$$H^q(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Стандартное геометрическое доказательство этого утверждения использует тот факт, что пространство $\mathbb{R}^m$ гомотопически эквивалентно точке (см., например, книгу [6]). Для обобщений на различные функциональные пространства полезнее другое, аналитическое, доказательство, опирающееся на гомотопическую формулу Пуанкаре (см., например, монографию [7]).

В принятых в теории обобщенных функций обозначениях Шварца [8] (см. также монографию [9], отметим, что в [10] используются другие обозначения) $C^\infty(\mathbb{R}^m) = \mathcal{E}$, $H^q(\mathbb{R}^m) = H^q(\mathcal{E})$.

ПРИМЕР 5.3. Пусть M – некомпактное вещественное гладкое многообразие, $C_c^\infty(M)$ – алгебра всех *финитных* (т.е. имеющих компактный носитель) гладких функций на M . В этом случае $C_c^\infty(M)$ – идеал алгебры $C^\infty(M)$, алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(C_c^\infty(M)) = \mathfrak{M}(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$, алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{D}(C_c^\infty(M)) = \mathfrak{D}(C^\infty(M)) = \mathcal{T}(M)$, комплекс де Рама есть $\{\Omega^q(C_c^\infty(M)), d^q\}$, а пространства когомологий суть $H^q(C_c^\infty(M))$.

ПРИМЕР 5.4. Пусть $M = \mathbb{R}^m$. Пространства когомологий $H^q(C_c^\infty(\mathbb{R}^m))$ комплекса $\{\Omega^q(C_c^\infty(\mathbb{R}^m)), d^q\}$ хорошо известны:

$$H^q(C_c^\infty(\mathbb{R}^m)) = \begin{cases} 0, & q \neq m, \\ \mathbb{F}, & q = m. \end{cases}$$

Стандартное геометрическое доказательство дано в книге [11], аналитическое доказательство приведено в работе [12]. В обозначениях Шварца [7] $C_c^\infty(\mathbb{R}^m) = \mathcal{D}$, $H^q(C_c^\infty(\mathbb{R}^m)) = H^q(\mathcal{D})$.

ПРИМЕР 5.5. Пусть M – некомпактное вещественное гладкое многообразие, $\mathcal{A}$ – алгебра гладких функций на M , $C_c^\infty(M) \subset \mathcal{A} \subset C^\infty(M)$. В этом случае справедливы вложения ассоциативных алгебр $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset C^\infty(M)$ и алгебр Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}(M)$, причем алгебра $\mathcal{A}$ есть идеал алгебры $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

ПРИМЕР 5.6. Пусть $M = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ – алгебра Шварца всех *гладких быстро убывающих* функций на $\mathbb{R}^m$ [8]. Здесь $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, $\mathfrak{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$ – алгебра всех *гладких медленно растущих* функций на $\mathbb{R}^m$ [12], $\mathfrak{D}(\mathcal{S}) = \mathfrak{D}(\mathcal{M})$ – свободный $\mathcal{M}$ -модуль с базисом $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\}$, а пространства когомологий суть [12]

$$H^q(\mathcal{S}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = m, \\ 0, & q \neq m; \end{cases} \quad H^q(\mathcal{M}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5.7. Пусть $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ – пространства основных функций и $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{E}'$ – их дуальные пространства (пространства обобщенных функций). Здесь

$\mathfrak{D}(\mathcal{D}) = \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ – свободные $\mathcal{E}$ -модули с базисом $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{S}) = \mathfrak{D}(\mathcal{M})$ – свободные $\mathcal{M}$ -модули с базисом $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}\}$, так что согласно примеру 2.4 определены комплексы $\{\Omega^q(\mathcal{A}'), d^q\}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{D}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{E}'$, с пространствами когомологий [13]

$$H^q(\mathcal{E}') = H^q(\mathcal{M}') = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = m, \\ 0, & q \neq m; \end{cases} \quad H^q(\mathcal{D}') = H^q(\mathcal{S}') = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

6. ГРАДУИРОВКА

Математические модели, используемые в теоретической физике, часто обладают градуировкой. В этом случае изложенная выше конструкция требует естественной модификации.

Напомним, что *градуировка* есть пара $\Gamma = (\Gamma, \mu)$, где

- Γ – аддитивная абелева группа (*градуирующая группа*),
- $\mu: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{F}$ – отображение (*градуирующий множитель*), удовлетворяющее равенствам $\mu(\alpha, \beta)\mu(\beta, \alpha) = 1$ и $\mu(\alpha + \beta, \gamma) = \mu(\alpha, \gamma)\mu(\beta, \gamma)$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Градуирующий множитель ставится при всякой перестановке двух однородных компонент градуированных объектов или морфизмов.

ПРИМЕР 6.1. Для тривиальной градуировки $\Gamma = 0$ есть только одна возможность определить градуирующий множитель: $\mu(0, 0) = 1$.

ПРИМЕР 6.2. Для популярной градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}$ существуют две возможности: $\mu(\alpha, \beta) = 1$ и $\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{\alpha\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 6.3. Для градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ при $m \geq 2$ градуирующие множители имеют вид

$$\mu(\alpha, \beta) = \prod_{1 \leq i, k \leq m} (q^{ik})^{\alpha^i \beta^k}$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^m$, где $q = \|q^{ik}\|$ – произвольная $\mathbb{F}$ -значная $(m \times m)$ -матрица такая, что $q^{ik}q^{ki} = 1$ для всех $1 \leq i, k \leq m$ (здесь $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$, $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^m)$).

ПРИМЕР 6.4. Для градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ также существуют две возможности: $\mu(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ и $\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{\alpha\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Здесь $\alpha = \alpha + 2\mathbb{Z}$, $\beta = \beta + 2\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, так что выражение $(-1)^{\alpha\beta}$ корректно определено.

Пусть $\Gamma = (\Gamma, \mu)$ – градуировка, $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}^\alpha$ – градуированная алгебра, $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \text{End}_{\mathbb{F}}^\alpha(\mathcal{A})$ – градуированная алгебра ее эндоморфизмов, $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{M}^\alpha(\mathcal{A})$ – градуированная алгебра ее мультипликаторов, $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{D}^\alpha(\mathcal{A})$ – градуированная алгебра Ли ее дифференцирований.

Градуированный коммутатор $[\cdot, \cdot]_\Gamma$ алгебры $\mathcal{A}$ задается следующим правилом:

$$[a^\alpha, a^\beta]_\Gamma = a^\alpha \cdot a^\beta - \mu(\alpha, \beta)a^\beta \cdot a^\alpha \quad \text{для всех} \quad a^\lambda \in \mathcal{A}^\lambda, \quad \lambda = \alpha, \quad \beta \in \Gamma.$$

Если $\mathcal{A}$ – градуированная алгебра Ли, то *градуированная скобка Ли* $[\cdot, \cdot]_\Gamma$ удовлетворяет равенствам

- $[a^\alpha, a^\beta]_\Gamma + \mu(\alpha, \beta)[a^\beta, a^\alpha]_\Gamma = 0$,

$$\bullet [a^\alpha, [a^\beta, a^\gamma]_\Gamma]_\Gamma + \mu(\alpha, \beta + \gamma)[a^\beta, [a^\gamma, a^\alpha]_\Gamma]_\Gamma + \mu(\alpha + \beta, \gamma)[a^\gamma, [a^\alpha, a^\beta]_\Gamma]_\Gamma = 0$$

для всех $a^\lambda \in \mathcal{A}^\lambda$, $\lambda = \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ (условиям градуированной кососимметрии и градуированному тождеству Якоби). Градуированные мультипликаторы суть эндоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$, обладающие свойством

$$M^\alpha(a^\beta \cdot a) = (M^\alpha a^\beta) \cdot a = \mu(\alpha, \beta)a^\beta \cdot (M^\alpha a)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$, $M^\alpha \in \mathfrak{M}^\alpha(\mathcal{A})$, $a^\beta \in \mathcal{A}^\beta$, $a \in \mathcal{A}$.

Градуированные дифференцирования суть эндоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющие градуированному правилу Лейбница

$$X^\alpha(a^\beta \cdot a) = (X^\alpha a^\beta) \cdot a + \mu(\alpha, \beta)a^\beta \cdot (X^\alpha a)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$, $X^\alpha \in \mathfrak{D}^\alpha(\mathcal{A})$, $a^\beta \in \mathcal{A}^\beta$, $a \in \mathcal{A}$.

Пусть $\Gamma = (\Gamma, \mu)$ – градуировка, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{K}$ – градуированные составляющие формального комплекса. Здесь $\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{M}^\alpha$ – градуированная унитарная ассоциативная коммутативная алгебра (градуированный коммутатор $[M, N]_\Gamma = 0$ для всех $M, N \in \mathfrak{M}$), $\mathfrak{D} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{D}^\alpha$ – градуированная алгебра Ли, $\mathfrak{K} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{K}^\alpha$ – градуированное линейное пространство. Градуированные условия получаются из соответствующих неградуированных условий (M–M)–(D–K) путем добавления градуирующих множителей в нужных местах. Так, в условии, соответствующем (D–D), эндоморфизм $X_\mathfrak{D}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ действует по правилу $Y \mapsto [X, Y]_\Gamma$; в случае условия, соответствующего (D–M), градуированное правило Лейбница имеет вид $[X_\mathfrak{D}, M_\mathfrak{D}]_\Gamma = X(M)_\mathfrak{D}$, а в случае условия, соответствующего (D–K), – вид $[X_\mathfrak{K}, M_\mathfrak{K}]_\Gamma = X(M)_\mathfrak{K}$, где $[X_\mathfrak{D}, M_\mathfrak{D}]_\Gamma$ и $[X_\mathfrak{K}, M_\mathfrak{K}]_\Gamma$ – градуированные коммутаторы.

Градуированное внешнее произведение в $\mathfrak{M}$ -модуле $\mathfrak{D}$ задается правилом

$$X_1 \wedge_\Gamma X_2 + \mu(\alpha_1, \alpha_2)X_2 \wedge_\Gamma X_1 = 0$$

для всех $X_i \in \mathfrak{D}^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$, и определяет градуированную внешнюю алгебру $\wedge_\Gamma \mathfrak{D} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \wedge_\Gamma^q \mathfrak{D}$. Действия $\lambda, \Lambda, \iota, L$ также требуют очевидных модификаций. Например,

$$L_X(X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q) = \sum_{1 \leq i \leq q} \mu(\alpha, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1})X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma [X, X_i]_\Gamma \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q$$

для всех $X \in \mathfrak{D}^\alpha$, $X_i \in \mathfrak{D}^{\alpha_i}$, $\alpha, \alpha_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, q$, $q \in \mathbb{Z}_+$. При этом $\mathfrak{M}$ -модули Θ и Ω биградуируются:

$$\begin{aligned} \Theta &= \bigoplus_{\alpha \in \Gamma, q \in \mathbb{Z}_+} \Theta^{\alpha q}, & \Theta^{\alpha q} &= \text{Hom}_{\mathfrak{M}}^\alpha(\wedge_\Gamma^q \mathfrak{D}, \mathfrak{M}), \\ \Omega &= \bigoplus_{\alpha \in \Gamma, q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^{\alpha q}, & \Omega^{\alpha q} &= \text{Hom}_{\mathfrak{M}}^\alpha(\wedge_\Gamma^q \mathfrak{D}, \mathfrak{K}). \end{aligned}$$

Градуированные тензорное и внешнее умножения задаются градуированными стандартными формулами. Например,

$$\begin{aligned} (\theta_1 \otimes_\Gamma \theta_2)(X_1 \otimes_\Gamma X_2) &= \mu(\alpha_2, \beta_1)\theta_1(X_1) \cdot \theta_2(X_2), \\ (\theta_1 \wedge_\Gamma \theta_2)(X_1 \wedge_\Gamma X_2) &= \frac{1}{2}(\mu(\alpha_2, \beta_1)\theta_1(X_1) \cdot \theta_2(X_2) - \mu(\alpha_2 + \beta_1, \beta_2)\theta_1(X_2) \cdot \theta_2(X_1)) \end{aligned}$$

для всех $\theta_i \in \Theta^{\alpha_i 1}$, $X_i \in \mathfrak{D}^{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$. Действия λ, ι, L и внешний дифференциал d требуют очевидных модификаций. Например,

$$\begin{aligned} (\iota_X \omega)(X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_{q-1}) &= q\mu(\alpha, \beta)\omega(X \wedge_\Gamma X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_{q-1}), \\ (L_X \omega)(X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q) &= X(\omega(X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q)) - \\ &\quad - \sum_{1 \leq i \leq q} \mu(\alpha, \beta + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1})\omega(X_1 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma [X, X_i]_\Gamma \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q), \\ (d\omega)(X_0 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q) &= \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \mu(\beta + \alpha_0 + \cdots + \alpha_{i-1}, \alpha_i) \times \right. \\ &\quad \times X_i(\omega(X_0 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma \check{X}_i \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma X_q)) + \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \mu(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{i-1}, \alpha_i) \mu(\alpha_0 + \cdots + \check{\alpha}_i + \cdots + \alpha_{j-1}, \alpha_j) \times \\ &\quad \times \omega([X_i, X_j]_\Gamma \wedge X_0 \wedge_\Gamma \cdots \wedge_\Gamma \check{X}_i \wedge_\Gamma \cdots \check{X}_j \cdots \wedge_\Gamma X_q) \left. \right\} \end{aligned}$$

для всех $X \in \mathfrak{D}^\alpha$, $\omega \in \Omega^{\beta q}$, $X_i \in \mathfrak{D}^{\alpha_i}$, $\alpha, \beta, \alpha_i \in \Gamma$, $i = 0, 1, \dots, q$.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1).

Список литературы

- [1] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.
- [2] V. V. Zharinov, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **6**:1–4 (1998), 347–356.
- [3] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
- [4] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **206**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [5] S. Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Springer, Berlin, 1971.
- [6] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, т. 3: *Теория гомологий*, Наука, М., 1984.
- [7] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971.
- [8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Tome I, Actualites scientifiques et industrielles, **1091**, Hermann & Cie., Paris, 1950; Tome II, **1121**, 1951.
- [9] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976.
- [10] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959.
- [11] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989.
- [12] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 323–334.
- [13] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 3–8.

Поступила в редакцию 20.08.2012