Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Рубаков, М. Ю. Кузнецов, Фермионы и распад вакуума Калуцы–Клейна: упрощенная модель, *ТМФ*, 2013, том 175, номер 1, 50–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:04:22

© 2013 г.

В. А. Рубаков^{*†}, М. Ю. Кузнецов^{*‡}

ФЕРМИОНЫ И РАСПАД ВАКУУМА КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА: УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

Изучается вопрос о подавлении квазиклассического распада вакуума теории Калуцы–Клейна с топологией $M^4 \times S^1$ фермионами с твистованными условиями периодичности. Рассмотрена упрощенная $(1+1)$ -мерная модель и вычислен определитель твистованных фермионов на многообразии, имеющем форму сигары, с евклидовой метрикой. Вопреки ожиданиям данный определитель оказывается конечным. Это рассматривается как указание на то, что твистованные фермионы не стабилизируют вакуум Калуцы–Клейна.

Ключевые слова: теория Калуцы–Клейна, квазиклассический распад вакуума, твистованные фермионы, двумерная модель.

DOI: 10.4213/tmf8405

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что вакуум теории Калуцы–Клейна с топологией $M^4 \times S^1$ нестабилен [1]. Распад вакуума описывается евклидовым отскоковым решением, которое имеет метрику

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{1 - R^2/\xi^2} + \xi^2 d\Omega^2 + R^2 \left(1 - \frac{R^2}{\xi^2}\right) d\theta^2, \quad (1)$$

где $R < \xi < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ и $d\Omega^2$ – метрика трехмерной сферы единичного радиуса. При больших ξ это решение имеет геометрию $\mathbb{R}^4 \times S^1$, причем при $\xi \rightarrow R$ геометрия стремится к $\mathbb{R}^2 \times S^3$. Это можно увидеть, сделав замену переменных $\xi = R + r^2/2R$, которая дает вблизи $r = 0$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + R^2 d\Omega^2.$$

После продолжения в пространство-время с сигнатурой Минковского отскоковое решение (1) описывает распад пространства $M^4 \times S^1$ в ничто [1]. Распад вакуума

^{*}Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия.
E-mail: rubakov@inr.ac.ru, mkuzn@inr.ac.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская область, Россия

Калуцы–Клейна и подобные процессы интересны с различных точек зрения, разнообразные вариации этого явления широко обсуждались в литературе [2]–[14].

В работе [1] были приведены аргументы в пользу того, что вакуум Калуцы–Клейна $M^4 \times S^1$ стабилизируется в теории, содержащей фермионы с твистованным условием периодичности по компактной координате,

$$\psi(\theta) = e^{-2i\pi q} \psi(\theta + 2\pi). \quad (2)$$

Аргумент состоит в том, что на фоне отскокового решения (1) это условие имеет смысл вдали от точки $\xi = R$, но для произвольного q оно оказывается сингулярным при $\xi = R$. Влияние фермионов на распад вакуума Калуцы–Клейна можно исследовать путем вычисления отношения фермионных определителей на фоне метрики (1) и на фоне исходной метрики Калуцы–Клейна, наложив в обоих случаях условие периодичности (2):

$$\Lambda(q) \equiv \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}}}{\det \mathcal{D}_q^{\text{vacuum}}}, \quad (3)$$

где $\mathcal{D}$ – оператор Дирака, а индекс q соотносится с условием (2). Если данное отношение стремится к нулю, то вакуум действительно стабилизируется.

В настоящей статье мы рассматриваем упрощенную модель данной ситуации. А именно, вместо изучения пятимерной теории с метрикой (1) мы рассматриваем двумерную теорию с метрикой, описывающей пространство в форме сигары,

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{1 - R^2/\xi^2} + R^2 \left(1 - \frac{R^2}{\xi^2}\right) d\theta^2. \quad (4)$$

Другими словами, мы пренебрегаем S^3 -частью геометрии. Сходным образом вместо пятимерного вакуума Калуцы–Клейна мы рассматриваем $(1+1)$ -мерную теорию с пространственным измерением, компактифицированным на окружность; евклидов аналог этой теории имеет метрику

$$ds_{\text{vac}}^2 = d\xi^2 + R^2 d\theta^2. \quad (5)$$

Метрики (4) и (5) совпадают при $\xi \rightarrow \infty$, но геометрия (4) имеет гладкое окончание при $\xi = R$, как и в случае пятимерного отскокового решения. Мы налагаем на двумерные фермионы условие периодичности (2), которое также имеет смысл вдали от точки $\xi = 0$, но оказывается сингулярным при $\xi = R$. Таким образом, мы утверждаем, что наша упрощенная модель обладает основными свойствами пятимерной теории Калуцы–Клейна, существенными для описания распада вакуума. Наша цель заключается в вычислении отношения (3) в данной упрощенной модели. В этом вычислении мы рассматриваем интервал

$$R < \xi < T, \quad (6)$$

где T предполагается устремить к бесконечности в самом конце вычисления. Мы делаем это как для метрики “отскокового решения” (4), так и для “вакуумной” метрики (5). Выбор одного и того же инфракрасного масштаба обрезания T в этих двух случаях воспроизводит пятимерную ситуацию, где ξ однозначно определено как радиус трехмерной сферы и для отскокового решения, и для метрики Калуцы–Клейна.

Для большей простоты задачи мы будем рассматривать *безмассовые* фермионы. Мотивация заключается в том, что возможные особенности в поведении фермионов на фоне метрики (4), вероятно, возникают из малой окрестности точки $\xi = R$, в то же время свойства фермионов на малых расстояниях не должны зависеть от наличия у них массы. Преимущество состоит в том, что мы можем использовать конформную инвариантность безмассовых двумерных фермионов (за вычетом конформной аномалии, которая является локальной и, таким образом, не зависит от q). Действительно, наша метрика (4), как и любая другая двумерная метрика, является конформно плоской, $ds^2 = \Phi^2(r)[dr^2 + r^2 d\theta^2]$, где

$$r = 2\sqrt{\frac{\xi - R}{\xi + R}} e^{(\xi - R)/R}, \quad \Phi = R \frac{\xi + R}{2\xi} e^{-(\xi - R)/R}. \quad (7)$$

Таким образом, вместо вычисления фермионного определителя на фоне метрики (4) мы собираемся провести вычисления на плоскости, по-прежнему налагая условие периодичности (2).

Заслуживает упоминания то, что вычисление $\det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}}$ эквивалентно вычислению определителя для обыкновенных (периодических) безмассовых фермионов с зарядом $-q$ на фоне инстантона в двумерной абелевой модели Хиггса в пределе нулевого размера инстантона. Если фермионы не взаимодействуют со скалярным полем, то фермионная часть лагранжиана в данной модели имеет вид

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iqeA_\mu)\psi,$$

в то время как в пределе нулевого размера инстантона поле инстантона – вихрь Абрикосова–Нильсена–Олсена [15], [16] – имеет форму Ааронова–Бома, $A_\mu = e^{-1}\partial_\mu\theta$. Поле ψ подчиняется условию периодичности $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, так что замена переменных $\psi \rightarrow e^{iq\theta}\psi$ сводит задачу к вычислению фермионного определителя на $\mathbb{R}^2$ в отсутствие калибровочного поля, но с твистованным условием (2).

Определители на фоне инстантонов в $(1+1)$ -мерных моделях хорошо изучены. Например, для скалярных и векторных полей вычисления были произведены в работе [17], а для фермионов – в работах [18], [19]. В работах [20], [21] были выполнены вычисления для киральных фермионов с полуцелым зарядом, взаимодействующих со скалярным полем. Интересно, что определители для фермионов с полуцелым зарядом не содержат дополнительных особенностей [20], [21].

В настоящей работе мы показываем что, весьма неожиданно, подобный результат остается в силе и для нашей задачи: фермионный определитель на фоне упрощенного “отскокового решения” конечен для произвольного¹⁾ $q \neq \pm 1/2$. Мы рассматриваем это как указание на то, что твистованные фермионы на самом деле не стабилизируют вакуум Калудцы–Клейна $M^4 \times S^1$.

¹⁾ Антипериодические фермионы ($q = \pm 1/2$) являются особым случаем (см. далее) и не изучаются в настоящей работе.

2. ФЕРМИОННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

Удобно разбить интересующую нас величину, логарифм отношения (3), следующим образом:

$$\ln \Lambda(q) = \ln \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}}} - \ln \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{vacuum}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{vacuum}}} + \ln \frac{\det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{vacuum}}}. \quad (8)$$

Согласно вышеприведенному рассуждению мы собираемся вычислять $\det \mathcal{D}^{\text{bounce}}$ на плоскости, а $\det \mathcal{D}^{\text{vacuum}}$ – на цилиндре (5). Очевидно, что при $q = 0$ поведение фермионов на фоне метрики (4) регулярно, поэтому последнее слагаемое должно быть конечным. Явное доказательство данного факта оказывается достаточно тонким; мы проводим соответствующий анализ в приложении.

Сконцентрируемся на первых двух слагаемых в правой части равенства (8). Заметим, что отношение $\Lambda(q)$ периодически по q с периодом единица, таким образом, мы можем без потери общности рассматривать область значений $-1/2 < q \leq 1/2$. Более того, благодаря C -инвариантности выражение $\Lambda(q)$ симметрично относительно замены $q \rightarrow -q$. Таким образом, достаточно изучить теорию при $0 \leq q \leq 1/2$. Мы собираемся провести вычисления для

$$0 \leq q < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Случай $q = 1/2$ содержит тонкости, смысл которых прояснится позднее, мы оставляем его для будущих исследований.

2.1. Вакуумный вклад. Начнем со второго слагаемого (vacuum–vacuum) в (8). Вспомним, что

$$\ln \det \mathcal{D}_q^{\text{vacuum}} = -E_q T, \quad (10)$$

где T – нормировочное время и E_q – энергия Казимира для фермионов с твистованным условием периодичности в теории с геометрией $\mathbb{R}^1 \times S^1$. Данная энергия Казимира была вычислена в работе [22], однако полученный в этой работе результат имеет весьма неявный вид. Поэтому мы проведем вычисление заново. Запишем энергию Казимира в виде суммы по энергиям уровней моря Дирака:

$$E_q = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(q),$$

где n – угловое спектральное число и $\omega_n = |n + q|/R$. Мы регуляризуем эту сумму, умножая каждый член на $e^{-\varepsilon|\omega_n(q)|}$, где ε – малый параметр, который мы устремим к нулю в конце вычисления. Получаем

$$E_q - E_0 = -\frac{1}{R} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n + q| e^{-\varepsilon|n+q|} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| e^{-\varepsilon|n|} \right). \quad (11)$$

В области (9) значений q эта сумма легко вычисляется, и в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем

$$\ln \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{vacuum}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{vacuum}}} = -(E_q - E_0)T = -\frac{T}{R}(q^2 - q). \quad (12)$$

Мы численно сравнили это простое выражение с результатом вычислений работы [22] и убедились, что они совпадают.

2.2. Вклад отскокового решения. Перейдем к вычислению первого слагаемого (bounce–bounce) в (8). Оно включает в себя отношение определителей на диске $r \leq a$, где a – инфракрасный масштаб обрезания в терминах координаты r , ср. соотношение (6). Поскольку оператор $\mathcal{D}^{\text{bounce}}$ антиэрмитов, его собственные значения чисто мнимые:

$$\ln \det \mathcal{D}^{\text{bounce}} = \sum_{l,m} \ln(i\lambda_{l,m}),$$

где l и m – радиальное и угловое спектральные числа соответственно, а $\lambda_{l,m}$ – собственные значения оператора $\mathcal{D}^{\text{bounce}}$,

$$\mathcal{D}^{\text{bounce}} \psi_{l,m} = \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{l,m} = i\lambda_{l,m} \psi_{l,m}. \quad (13)$$

Будем использовать евклидовы γ -матрицы и спиноры вида

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

и наложим граничное условие Дирихле по радиальной координате:

$$\phi(a, \theta) = 0. \quad (14)$$

Собственные функции $\psi_{l,m}$ должны быть квадратично-интегрируемы²⁾.

Компонента χ связана с ϕ следующим образом:

$$\chi = \frac{1}{i\lambda} (\partial_0 \phi + i\partial_1 \phi), \quad (15)$$

тогда как для ϕ выполняется уравнение $\Delta \phi = -\lambda^2 \phi$. Собственные функции имеют вид $\phi_{l,m}(r, \theta) = e^{im\theta} \phi_{l,m}(r)$, где $m = n + q$, причем n – целое число. Функция $\phi_{l,m}(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$r^2 \phi_{l,m}'' + r \phi_{l,m}' + (\lambda_{l,m}^2 r^2 - m^2) \phi_{l,m} = 0.$$

Легко видеть, что собственные значения представлены парами $\pm \lambda_{l,m}$, где $\lambda_{l,m} > 0$. Заметим, что $\mathcal{D}^{\text{bounce}}$ не имеет нулевой моды: хотя для $\lambda = 0$ как ϕ , так и χ могут быть квадратично-интегрируемыми, граничное условие (14) при этом не удовлетворяется. Таким образом, мы имеем

$$\ln \det \mathcal{D}^{\text{bounce}} = \sum_{\lambda_{l,m} > 0} \ln \lambda_{l,m}^2.$$

²⁾ Это требование подразумевает, как обычно, что разложение фермионного поля в функциональном интеграле, $\psi = \sum_{l,m} a_{l,m} \psi_{l,m}$, где $a_{l,m}$ – набор переменных интегрирования, дает диагональное фермионное действие с конечными коэффициентами,

$$S_F = \int d^2 x \psi^\dagger \mathcal{D}^{\text{bounce}} \psi = \sum_{l,m} i\lambda_{l,m} a_{l,m}^\dagger a_{l,m} \int d^2 x \psi_{l,m}^\dagger \psi_{l,m}.$$

Заметим, что оператор $\mathcal{D}^{\text{bounce}}$ действительно антиэрмитов на квадратично-интегрируемых решениях, подчиняющихся условию (14), т. е. граничные члены, возникающие при интегрировании по частям в $(\int d^2 x \psi_1^\dagger \mathcal{D}^{\text{bounce}} \psi_2)^*$, равны нулю.

Квадратично-интегрируемые решения записываются как

$$\phi_{l,m} = \begin{cases} J_m(r\lambda_m), & n \geq 0, \\ J_{-m}(r\lambda_{-m}), & n \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} J_{n+q}(r\lambda_{n+q}), & n \geq 0, \\ J_{-n-q}(r\lambda_{-n-q}), & n \leq -1. \end{cases}$$

Решение при $n \leq -1$ удобно переписать в виде $J_{n'-q}(r\lambda_{n'-q})$, где $n' \geq 1$; в дальнейшем m_q будет означать $n+q$ или $n'-q$. Нетрудно увидеть, что для данных решений компоненты χ , определяемые формулой (15), также являются квадратично-интегрируемыми.

Укажем на сложность, возникающую для антипериодических фермионов, т. е. при $q = 1/2$. В этом случае решение уравнения (13) при $n = -1$ не является квадратично-интегрируемым: либо ϕ , либо χ ведет себя как $r^{-1/2}$ вблизи начала координат. Мы оставляем анализ этого случая на будущее и продолжаем исследовать модель для значений $0 \leq q < 1/2$.

2.2.1. Сумма по радиальным спектральным числам. Радиальный спектр собственных значений определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} J_{n+q}(a\lambda_{l,n+q}) &= 0, & n \geq 0, \\ J_{n'-q}(a\lambda_{l,n'-q}) &= 0, & n' \geq 1. \end{aligned}$$

Вычислим сумму по радиальным числам l для фиксированного n , используя метод ζ -функции,

$$\sum_l (\ln \lambda_{l,m_q}^2 - \ln \lambda_{l,m_0}^2) = -\frac{d}{ds} Z_m(s) \Big|_{s=0},$$

где

$$Z_m(s) \equiv \zeta_{m_q}(s) - \zeta_{m_0}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_{l,m_q}^{-2s} - \lambda_{l,m_0}^{-2s}).$$

Прямое вычисление этой суммы осложняется тем, что неизвестно аналитическое выражение для собственных значений.

В данном случае удобно использовать формализм Гельфанда–Яглома [23]–[26], который уже успешно применялся для вычисления других функциональных определителей. Кратко опишем этот метод. Если нам известна функция $F(z)$, имеющая нули в интересующих нас собственных значениях, которые предполагаются положительными, то ее логарифмическая производная имеет в данных точках простые полюсы с вычетами, равными единице, и мы можем записать ζ -функцию в виде

$$\zeta(s) = \sum_l \text{Res} \left[z^{-s} \frac{d}{dz} \ln F(z) \right].$$

Полагая что функция $F(z)$ не сингулярна везде, кроме, возможно, отрицательной части действительной оси и точки $z = \infty$, мы можем преобразовать данную сумму в контурный интеграл (см. рис. 1):

$$\zeta(s) = \zeta_\gamma(s) + \zeta_\Omega(s), \quad (16)$$

Рис. 1. Контур интегрирования в плоскости z . Сумма вычетов (интеграл по маленьким кругам) равна интегралу по контуру (16).

где

$$\zeta_\gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dz z^{-s} \frac{d}{dz} \ln F(z), \quad (17)$$

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega dz z^{-s} \frac{d}{dz} \ln F(z). \quad (18)$$

Контур γ окружает отрицательную часть действительной оси, а контур Ω – это большой круг. Интегрирование ведется по часовой стрелке в (17) и против часовой стрелки в (18).

На первый взгляд, в нашем случае следует выбрать функцию $F(z) = J_m(az)$, имеющую нули при $z = \lambda_{l,m}$. Однако в действительности нам необходимы нули при $z = \lambda_{l,m}^2$. Также мы должны избежать нуля при $z = 0$. Этим условиям удовлетворяет следующая функция:

$$F(z) = \frac{J_{m_q}(a\sqrt{z})}{(a\sqrt{z})^{m_q}}.$$

Сначала мы хотим вычислить интеграл по большому кругу:

$$Z_{m,\Omega}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega dz z^{-s} \left(\frac{d}{dz} \ln \frac{J_{m_q}(a\sqrt{z})}{J_{m_0}(a\sqrt{z})} + \frac{d}{dz} \ln(a^{m_0-m_q} z^{(m_0-m_q)/2}) \right). \quad (19)$$

Чтобы оценить поведение слагаемого, содержащего функции Бесселя, воспользуемся “приближением тангенсами” [27] для больших $|z|$ и, возможно, больших значений

индекса m :

$$J_m(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z^2 - m^2}}} \left[\left(1 - \frac{9}{128(z^2 - m^2)}\right) \cos\left(\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{z} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{8\sqrt{z^2 - m^2}} + \frac{5m^2}{24(z^2 - m^2)^{3/2}}\right) \sin\left(\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{z} - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Можно увидеть, что первое подынтегральное слагаемое в (19) ведет себя как $|z|^{-3/2}$ на комплексной бесконечности. Таким образом, его вклад в интеграл (19) стремится к нулю при $s \rightarrow 0$. Вклад второго слагаемого легко вычисляется и оказывается равным

$$Z'_{m,\Omega}(0) = \frac{m_q - m_0}{2} \ln L, \quad (20)$$

где L – радиус большого круга.

Вернемся к оставшейся части, интегралу $Z_{m,\gamma}(s)$. Напомним, что

$$J_m(e^{\pm i\pi/2}x) = e^{\pm i\pi m/2} I_m(x) \quad \text{при} \quad \arg x = 0.$$

Получаем

$$Z_{m,\gamma}(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^L dx x^{-s} \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{I_{m_q}(a\sqrt{x})}{I_{m_0}(a\sqrt{x})} + \frac{d}{dx} \ln(a^{m_0 - m_q} x^{(m_0 - m_q)/2}) \right).$$

Мы видим, что $Z'_{m,\gamma}(0)$ оказывается интегралом от полной производной. Вклад за счет верхнего предела $x = L$ пропорционален $\ln L$ и в точности сокращается с выражением (20). Учитывая, что $\ln[I_{m_q}(a\sqrt{x})/I_{m_0}(a\sqrt{x})] \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, мы в конечном счете получаем

$$Z'_m(0) = - \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[\frac{I_{m_q}(a\sqrt{x})}{I_{m_0}(a\sqrt{x})} x^{(m_0 - m_q)/2} \right] = - \ln \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{m_q - m_0} \frac{\Gamma(m_0 + 1)}{\Gamma(m_q + 1)} \right]. \quad (21)$$

2.2.2. Сумма по угловым спектральным числам. Теперь мы можем вычислить отношение определителей. Регуляризуем сумму по угловым спектральным числам, умножая определители на $e^{i\varepsilon|\partial_\theta|}$, ср. формулу (11), и записываем в явном виде

$$\begin{aligned} & \ln \det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}} \cdot e^{i\varepsilon|\partial_\theta|} - \ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}} \cdot e^{i\varepsilon|\partial_\theta|} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{n+q-1} \Gamma^{-1}(n+q) \right] e^{-\varepsilon(n+q-1)} + \ln \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{-(n-1)} \Gamma(n) \right] e^{-\varepsilon(n-1)} \right\} + \\ & + \sum_{n'=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{n'-q} \Gamma^{-1}(n'-q+1) \right] e^{-\varepsilon(n'-q)} + \ln \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{-n'} \Gamma(n'+1) \right] e^{-\varepsilon n'} \right\}; \end{aligned} \quad (22)$$

здесь мы сдвинули аргумент суммирования в первой сумме, $n \rightarrow n-1$. Правая часть равенства (22) содержит зависящую и не зависящую от a части:

$$\ln \det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}} \cdot e^{i\varepsilon|\partial_\theta|} - \ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}} \cdot e^{i\varepsilon|\partial_\theta|} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(n, q) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}(n, q, a),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta(n, q) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln \Gamma(n) e^{-\varepsilon n} + \ln \Gamma(n+1) e^{-\varepsilon(n+1)} - \ln \Gamma(n+q) e^{\varepsilon(n+q)} - \ln \Gamma(n+1-q) e^{\varepsilon(n+1-q)}], \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}(n, q, a) = \ln \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(n+q-1) e^{-\varepsilon(n+q-1)} - (n-1) e^{-\varepsilon(n-1)} + (n-q) e^{-\varepsilon(n-q)} - n e^{-\varepsilon n}]. \quad (24)$$

Зависящая от a величина (24) совпадает с соответствующим слагаемым, выписанным в п. 2.1, и мы немедленно находим, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ это слагаемое равно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}(n, q, a) = (q - q^2) \ln \frac{a}{2}. \quad (25)$$

Напомним, что $r = a$ есть масштаб обрезания на плоскости, связанный с масштабом обрезания $\xi = T$ посредством первого из равенств (7), т.е. $\ln(a/2) = T/R$. Таким образом, вклад (25) сокращается со вторым слагаемым в (8), которое дается выражением (12). Как и ожидалось, результат для $\ln \Lambda(q)$ оказывается инфракрасно-конечным.

Интересующая нас величина $\ln \Lambda(q)$, таким образом, полностью определяется не зависящей от a суммой (23) (за вычетом последнего, не зависящего от q слагаемого в (8)). Чтобы извлечь часть, которая может расходиться в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, воспользуемся приближением Стирлинга $\ln \Gamma(n) = [\ln \Gamma(n)]_{\text{St}} + O(n^{-3})$, где

$$[\ln \Gamma(n)]_{\text{St}} = n \ln n - n - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12n}.$$

Здесь и далее индекс St обозначает величины, вычисленные в рамках приближения Стирлинга. Поскольку $\Delta(n) - \Delta_{\text{St}}(n)$ убывает как n^{-3} при больших n , потенциально опасными являются суммы, возникающие из приближения Стирлинга для $\ln \Gamma(n)$. Они сводятся к выражениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} n \ln n = -\frac{d}{ds} \text{Li}_s(e^{-\varepsilon}) \Big|_{s=-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} \ln n = -\frac{d}{ds} \text{Li}_s(e^{-\varepsilon}) \Big|_{s=0}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon n}}{n} = -\ln(1 - e^{-\varepsilon}),$$

где $\text{Li}_s(z)$ – полилогарифм. Мы обнаруживаем, что слагаемые, расходящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$, в действительности сокращаются благодаря тождеству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{ds} \text{Li}_s(e^{-\varepsilon}) \Big|_{s=-1} - 2\varepsilon \frac{d}{ds} \text{Li}_s(e^{-\varepsilon}) \Big|_{s=0} + \ln(1 - e^{-\varepsilon}) \right) = -1 - \gamma,$$

 Рис. 2. Логарифм фермионного определителя как функция “твиста” q .

где γ – постоянная Эйлера–Маскерони. Таким образом, отношение фермионных определителей конечно, что является нашим основным результатом. Явное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{bounce}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}}} - \ln \frac{\det \mathcal{D}_q^{\text{vacuum}}}{\det \mathcal{D}_0^{\text{vacuum}}} &= \\ &= \gamma(q - q^2) + \frac{1}{12}(2\gamma - 1 + \psi(1 + q) + \psi(2 - q)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta(n, q) - \Delta_{\text{St}}(n, q)) \end{aligned}$$

за вычетом конечной и не зависящей от q константы. Лидирующий вклад в это выражение дается его аналитической частью. Данная функция изображена на рис. 2.

Итак, мы обнаружили, что все возможные расходимости сокращаются и определитель твистованных фермионов на фоне нашего “отскокового решения” конечен. Если подобная ситуация реализуется в пятимерной теории, то вакуум Калуцы–Клейна будет нестабильным даже в присутствии твистованных фермионов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем что последнее слагаемое в формуле (8), соответствующее периодическим фермионам, конечно. Начнем с вакуумного слагаемого, снова используем соотношение (10), но теперь при $q = 0$. Запишем

$$E = -\frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n},$$

где ε – параметр регуляризации. Легко получаем, что

$$E = -\frac{2}{R\varepsilon^2} + \frac{1}{6R}.$$

Первое, расходящееся, слагаемое интерпретируется как величина, соответствующая плотности вакуумной энергии прямой, которая должна исчезнуть после перенормировки. Действительно, физически осмысленный масштаб обрезания по энергии

равен $e^{-\omega_n/\Lambda}$. Поскольку $\omega_n = |n|/R$, мы полагаем $\varepsilon = (\Lambda R)^{-1}$, и первое слагаемое принимает вид $E = -2\Lambda^2 R$. Соответствующая плотность энергии E/R не зависит от R , так что это действительно плотность энергии прямой. Таким образом, энергия Казимира периодических безмассовых фермионов равна $E = 1/6R$.

Теперь рассмотрим слагаемое, соответствующее отскоковому решению. Введем обозначение $\omega(r; R) = \ln \Phi(r; R)$ и рассмотрим вариацию определителя при изменении значения R . Конформная аномалия дает [28], [29]

$$\begin{aligned} \delta_R \ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}} &= -\frac{1}{6\pi} \int d^2x \delta_R \omega \cdot \square \omega = \\ &= \frac{1}{6\pi} \int d^2x \partial_\mu \delta_R \omega \cdot \partial_\mu \omega - \frac{1}{6\pi} \int d\theta a \delta_R [\omega(r)]|_{r=a} \partial_r \omega(r)|_{r=a}. \end{aligned}$$

Тонкость здесь заключается в том, что граничный член не стремится к нулю и в действительности необходим для сокращения инфракрасной расходимости. При больших r мы имеем $\omega = -\ln(r/R)$, $\partial_r \omega(a) = -1/a$ и

$$\omega(r)|_{r=a} = -\ln a + \ln R = -\frac{T}{R} + \dots,$$

где мы учли, что $\ln(a/2) = T/R$ и опустили члены, конечные в пределе $T \rightarrow \infty$, здесь и в последующих формулах эти члены обозначены многоточием. Мы немедленно получаем

$$\ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}} = \frac{1}{12\pi} \int d^2x \partial_\mu \omega \cdot \partial_\mu \omega - \frac{T}{3R} + \dots$$

Это выражение показывает что в $\ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}}$ нет ультрафиолетовой расходимости, как и ожидалось. Инфракрасно расходящаяся часть первого слагаемого равна здесь $(\ln a)/6 = T/6R + \dots$. Таким образом, $\ln \det \mathcal{D}_0^{\text{bounce}} = -T/6R + \dots$. Инфракрасно расходящаяся часть этого выражения равна $\ln \det \mathcal{D}_0^{\text{vacuum}} = -ET$, поэтому последнее слагаемое в формуле (8) в самом деле конечно.

Благодарности. Мы благодарим А. А. Белавина, А. С. Горского, С. М. Сибирякова, Е. А. Зенкевича, Д. В. Кирпичникова, А. Г. Панина и Э. Я. Нугаева за плодотворные обсуждения. Мы особенно признательны П. С. Сатунину за указание на формализм Гельфанда–Яглома. Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 12-02-00653 (В. Р.) и 12-02-31595 (М. К.)), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5590.2012.2) и Министерством образования и науки РФ (грант № 8412), а также Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-3344.2011.2 (М. К.)).

Список литературы

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **195**:3 (1982), 481–492.
- [2] F. Dowker, J. P. Gauntlett, G. W. Gibbons, G. T. Horowitz, *Phys. Rev. D*, **52**:12 (1995), 6929–6940, arXiv: hep-th/9507143.
- [3] V. Balasubramanian, S. F. Ross, *Phys. Rev. D*, **66**:8 (2002), 086002, 9 pp., arXiv: hep-th/0205290.
- [4] D. Birmingham, M. Rinaldi, *Phys. Lett. B*, **544**:3–4 (2002), 316–320, arXiv: hep-th/0205246.

- [5] V. Balasubramanian, K. Larjo, J. Simon, *Class. Quant. Grav.*, **22**:19 (2005), 4149–4169, arXiv: hep-th/0502111.
- [6] O. Aharony, M. Fabinger, G. T. Horowitz, E. Silverstein, *JHEP*, **07** (2002), 007, 35 pp., arXiv: hep-th/0204158.
- [7] J. He, M. Rozali, *JHEP*, **09** (2007), 089, 15 pp., arXiv: hep-th/0703220.
- [8] G. T. Horowitz, J. Orgera, J. Polchinski, *Phys. Rev. D*, **77**:2 (2008), 024004, 9 pp., arXiv: 0709.4262.
- [9] D. Astefanesei, R. B. Mann, C. Stelea, *JHEP*, **01** (2006), 043, 31 pp., arXiv: hep-th/0508162.
- [10] J. J. Blanco-Pillado, B. Shlaer, *Phys. Rev. D*, **82**:8 (2010), 086015, 8 pp., arXiv: 1002.4408.
- [11] J. J. Blanco-Pillado, H. S. Ramadhan, B. Shlaer, *JCAP*, **10** (2010), 029, 26 pp., arXiv: 1009.0753.
- [12] A. R. Brown, A. Dahlen, *Phys. Rev. D*, **84**:4 (2011), 043518, 10 pp., arXiv: 1010.5240.
- [13] A. R. Brown, A. Dahlen, *Phys. Rev. D*, **85**:10 (2012), 104026, 14 pp., arXiv: 1111.0301.
- [14] S. Stotyn, R. B. Mann, *Phys. Lett. B*, **705**:3 (2011), 269–272, arXiv: 1105.1854.
- [15] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Nucl. Phys. B*, **61** (1973), 45–61.
- [16] А. А. Абрикосов, *ЖЭТФ*, **32**:6 (1957), 1442–1452.
- [17] J. Baacke, T. Daiber, *Phys. Rev. D*, **51**:2 (1995), 795–801, arXiv: hep-th/9408010.
- [18] N. K. Nielsen, B. Schroer, *Nucl. Phys. B*, **120**:1 (1977), 62–76.
- [19] N. K. Nielsen, B. Schroer, *Nucl. Phys. B*, **127**:3 (1977), 493–508.
- [20] Y. Burnier, M. Shaposhnikov, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 065011, 17 pp., arXiv: hep-ph/0507130.
- [21] F. Bezrukov, Y. Burnier, M. Shaposhnikov, *Phys. Rev. D*, **73**:4 (2006), 045008, 12 pp., arXiv: hep-th/0512143.
- [22] J. E. Hetrick, Y. Hosotani, *Phys. Rev. D*, **38**:8 (1988), 2621–2624.
- [23] I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom, *J. Math. Phys.*, **1**:1 (1960), 48–69.
- [24] G. V. Dunne, *J. Phys. A*, **41**:30 (2008), 304006, 15 pp., arXiv: 0711.1178.
- [25] K. Kirsten, A. J. McKane, *Ann. Phys.*, **308**:2 (2003), 502–527, arXiv: math-ph/0305010.
- [26] K. Kirsten, P. Loya, *Amer. J. Phys.*, **76**:1 (2008), 60–64, arXiv: 0707.3755.
- [27] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
- [28] J. Polchinski, *String Theory*, v. 1: *An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [29] А. А. Белавин, Г. М. Тарнопольский, *ЯФ*, **73**:5 (2010), 879–908.

Поступила в редакцию 24.08.2012