Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Олемской, О. В. Ющенко, А. Ю. Бадалян, Статистическая теория поля неаддитивной системы, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 3, 444–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:47:00

© 2013 г. А. И. Олемской*[†], О. В. Ющенко*, А. Ю. Бадалян*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

На основе квантово-полевых методов развита статистическая теория сложных систем, термодинамические потенциалы которых не обладают свойством аддитивности. В рамках метода Мартина–Сиггиа–Роуза найден эффективный лагранжиан системы, исходя из которого определены уравнения эволюции наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций. Показано, что деформация статистического распределения не изменяет эти уравнения, тогда как вероятность реализации различных фазовых траекторий существенно зависит от параметра неаддитивности. Найден производящий функционал неаддитивной системы и установлена его связь с корреляторами, введена пара аддитивных производящих функционалов, разложение которых дает набор многоточечных функций Грина и их собственно-энергетических частей. Найдены уравнения для производящего функционала систем, обладающих внутренней симметрией и связями. В рамках гармонического приближения определены статистическая сумма и моменты параметра порядка в зависимости от параметра неаддитивности. Развита теория возмущений, использование которой позволяет найти поправки произвольного порядка к указанным величинам.

Ключевые слова: параметр неаддитивности, производящий функционал, статистическая сумма.

DOI: 10.4213/tmf8408

1. ВВЕДЕНИЕ

Статистическая физика основывается, как известно, на предположении о перемешивании фазового пространства [1], [2]. Согласно этому предположению в ходе эволюции выделенный объем быстро сжимается по одним направлениям и расширяется по другим, приобретая с течением времени настолько разветвленную форму, что его точки можно найти в любой конечной части фазового пространства. Будучи дополненной предположением о бесконечном числе степеней свободы, гипотеза перемешивания приводит к распределению Гиббса, из которого следует аддитивность термодинамических потенциалов. При этом выполняются следующие условия [3]:

*Сумский государственный университет, Сумы, Украина

[†]Институт прикладной физики НАН Украины, Сумы, Украина.

E-mail: yushchenko@phe.sumdu.edu.ua

- кинетическое – перемешивание протекает экспоненциально быстро (это обеспечивает хорошо развитую хаотическую структуру и требует positivity наибольшего из показателей Ляпунова);
- динамическое – все силы, включая те, что обеспечивают микроскопическую память, являются короткодействующими (в результате стохастический процесс имеет марковский характер);
- геометрическое – фазовое пространство обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости и т. п.

В последнее время обнаружено множество систем, проявляющих неаддитивное поведение. К ним относятся ферромагнетики, спиновые стекла, двумерная электронная плазма в турбулентном режиме, системы с аномальной диффузией Леви, гранулированные системы, твердые тела, подвергнутые ионной бомбардировке, гравитационные системы, солнечные нейтрино, черные дыры, элементарные частицы, сталкивающиеся с высокой энергией, квантовые системы, проявляющие эффекты запутывания, и многие другие [3]. В таких системах экспоненциально быстрое перемешивание приобретает степенной характер, в результате чего происходит только слабая хаотизация фазового пространства. Кроме того, этим системам присущи эффекты дальнего действия, немарковское поведение, мультифрактальные граничные или патологические начальные условия, некоторые специальные механизмы диссипации и т. д.

С формальной точки зрения теория неаддитивных систем основывается на деформации логарифмической и экспоненциальной функций, которая модифицирует энтропию Больцмана–Гиббса таким образом, что функция распределения приобретает либо дальнедействующие степенные асимптотики [4]–[11], либо обрезается на конечных значениях энергии [12], [13]. Характерной особенностью неаддитивных систем является самоподобие их фазового пространства, объем которого остается неизменным при деформации, комбинирующей сжатие (растяжение) координаты и растяжение (сжатие) импульса [14].

С другой стороны, деформация перестановочных соотношений в квантовой теории позволила развить нетривиальные физические представления таких объектов, как черные дыры и анионные сверхпроводники [15]. Эти представления основаны на формализме квантовых групп, который сводится к так называемому q -исчислению [16]–[18], впервые введенному Хейне и Джексоном [19], [20] при изучении базово-деформированных гипергеометрических рядов [21], [22]. С математической точки зрения q -исчисление представляет собой наиболее удобный формализм для описания мультифрактальных множеств, которые образуются в результате многократного действия оператора дилатации, определяющего производную Джексона [14]. Более того, оказывается [6], [23], что для q -деформированных бозонов и фермионов естественное обобщение термостатистики основано на q -исчислении, а стационарное решение деформированного уравнения Фоккера–Планка представляет собой q -аналог экспоненциальной функции в представлении базово-деформированных гипергеометрических рядов [12], [13]. Такого рода системы обнаруживают дискретную масштабную инвариантность [24], описание которой [25] достигается использованием производной и интеграла Джексона (например, свободная энергия спиновых систем, определенных на иерархической решетке, сводится к однородной функции, представляющей q -интеграл [26]).

Следует отметить еще один пример приложения статистической теории неаддитивных систем – к описанию объектов конечного размера, важность исследования

которых возросла с развитием нанотехнологий. Действительно, при конечном числе частиц N параметр неаддитивности принимает значение [27]

$$q = \left(1 - \frac{\alpha}{d} N^{-1}\right)^{-1}, \quad (1)$$

где α – показатель подобия координатной зависимости гамильтониана (например, для гармонического осциллятора $\alpha = 2$), d – размерность системы. Короткодействующие потенциалы ($\alpha > 0$) характеризуются значениями $q \geq 1$, а дальнедействующим ($-d \leq \alpha \leq 0$) отвечает величина $q \leq 1$ (при $\alpha < -d$ применима статистика Больцмана–Гиббса [28]). В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ получаем значение $q = 1$, отвечающее обычной статистике, а со спаданием числа частиц N разность $|q - 1|$ возрастает, достигая максимальной величины $\alpha/(d - \alpha)$ при $\alpha > 0$ и $|\alpha|/(d + |\alpha|)$ при $\alpha < 0$.

Настоящая работа посвящена рассмотрению неаддитивных статистических систем в рамках полевого формализма, который, основываясь на использовании методов квантовой теории поля, представляет собой один из наиболее мощных инструментов исследования [29], [30]. Формальной основой стандартной полевой схемы является, как известно, производящий функционал, который представляет собой обобщенное преобразование Фурье–Лапласа, дающее переход от распределения флуктуирующего параметра порядка (амплитуды гидродинамической моды) к вспомогательному полю [31]. Благодаря экспоненциальному характеру этого преобразования определение корреляторов параметра порядка достигается дифференцированием производящего функционала по указанному полю.

Представленная схема становится несостоятельной при переходе к неаддитивным статистическим системам, поскольку экспонента Больцмана–Гиббса принимает биномиальную форму Цаллиса [3]. В результате построение генерирующего функционала требует деформации преобразования Фурье–Лапласа, а вместо обычного дифференцирования следует использовать оператор, относительно которого инвариантно ядро деформированного преобразования [32]. Так, например, при построении статистической теории самоподобно распределенных полей роль базисной функции играет степенная зависимость, для которой производящий функционал сводится к преобразованию Меллина статистического функционала, а оператор дифференцирования представляет собой производную Джексона [2], [33].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные соотношения теории Мартина–Сиггиа–Роуза [34], использование которой позволяет определить эффективный лагранжиан системы исходя из стохастического уравнения движения и найти пару уравнений для сопряженных координаты и импульса, роль которых играют наиболее вероятные значения амплитуд гидродинамической моды и ее флуктуаций. Раздел 3 посвящен обобщению полевой схемы для неаддитивных систем. Показано, что деформация статистического распределения не изменяет уравнения эволюции наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций, тогда как вероятность реализации различных фазовых траекторий существенно зависит от параметра неаддитивности. В разделе 4 найден производящий функционал неаддитивной системы и установлена его связь с корреляторами; введена пара аддитивных производящих функционалов, разложение которых дает набор многоточечных функций Грина и их собственно-энергетических частей; найдены уравнения для производящего функционала систем, обладающих

внутренней симметрией и связями. Центральное место занимает раздел 5, посвященный описанию термодинамических свойств неаддитивной системы: сначала используется простейшее гармоническое приближение, в рамках которого определены явные выражения для одноузельной статистической суммы и моментов параметра порядка в зависимости от параметра неаддитивности; затем развита теория возмущений, использование которой позволяет найти поправки произвольного порядка к указанным величинам. В разделе 6 содержится обсуждение полученных результатов. И наконец, приложение содержит основные сведения из q -деформированной алгебры [35], лежащей в основе неаддитивной статистики.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ СХЕМЫ

Представим поведение стохастической системы пространственно-временной зависимостью $x(\mathbf{r}, t)$ амплитуды гидродинамической моды, среднее значение которой сводится к параметру порядка. Для описания этой зависимости будем исходить из уравнения Ланжевена [36]

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) - D \nabla^2 x = -\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Здесь точка означает временную производную, $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$, D – параметр неоднородности, γ – кинетический коэффициент, $F(x)$ – свободная энергия, $\zeta(\mathbf{r}, t)$ – стохастическая добавка, определенная условиями белого шума:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{0}, 0) \rangle = \gamma T \delta(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (3)$$

где угловые скобки означают усреднение по гауссову распределению величины ζ , T – температура, задающая интенсивность шума. Далее удобно ввести единицы измерения $(\gamma T)^2/D^3$, $\gamma T/D$, $D^3/\gamma^3 T^2$, $D^3/(\gamma T)^2$ для времени t , координаты $\mathbf{r}$, плотности термодинамического потенциала F и стохастической переменной ζ соответственно (при этом подразумевается, что амплитуда гидродинамической моды x изначально принята безразмерной). В результате уравнение движения (2) принимает канонический вид

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где использована краткая форма записи вариационной производной:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} \equiv \frac{\delta \mathcal{F}\{x(\mathbf{r}, t)\}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \nabla^2 x, \quad \mathcal{F}\{x\} \equiv \int \left[F(x) + \frac{1}{2} (\nabla x)^2 \right] d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Кроме того, в формуле (3) пропадает коэффициент γT , а распределение переменной ζ приобретает стандартную гауссову форму

$$P_0\{\zeta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1/2) \int \zeta^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt}. \quad (6)$$

Статистическая теория поля основывается на методе производящего функционала [31], [34]:

$$\mathcal{Z}\{u(\mathbf{r}, t)\} = \int Z\{x\} e^{\int u x d\mathbf{r} dt} \{ \delta x \}, \quad \{ \delta x \} \equiv \prod_{\mathbf{r}, t} \delta x(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

который представляет собой функциональное преобразование Лапласа обобщенной статистической суммы

$$\mathcal{Z}\{x(\mathbf{r}, t)\} \equiv \left\langle \prod_{(\mathbf{r}, t)} \delta \left\{ \dot{x} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} - \zeta \right\} \det \left| \frac{\delta \zeta}{\delta x} \right| \right\rangle. \quad (8)$$

В ее определении δ -функционал учитывает уравнение Ланжевена (4), а детерминант определяет переход от континуального интегрирования по ζ к x .

Варьирование производящего функционала (7) по пробному полю $u(\mathbf{r}, t)$ позволяет найти корреляторы наблюдаемой величины $x(\mathbf{r}, t)$:

$$\langle x(\mathbf{r}_1, t_1) \dots x(\mathbf{r}_n, t_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}\{u=0\}} [\mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_1, t_1)} \dots \mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_n, t_n)}] \mathcal{Z}\{u(\mathbf{r}, t)\} \Big|_{u(\mathbf{r}, t)=0}, \quad (9)$$

где $\mathcal{Z}\{0\} \equiv \mathcal{Z}\{u(\mathbf{r}, t)=0\}$, $\mathcal{D}_{u(\mathbf{r}, t)} \equiv \delta/\delta u(\mathbf{r}, t)$. С учетом тождественности N частиц, составляющих систему, статистическая сумма определяется выражением

$$Z_N = \frac{1}{N!} \mathcal{Z}\{0\} = \frac{1}{N!} \int \mathcal{Z}\{x(\mathbf{r}, t)\} \{\delta x\}. \quad (10)$$

Кроме корреляторов наблюдаемых величин, использование производящего функционала (7) позволяет проследить за эволюцией наиболее вероятных значений стохастической переменной x и ее дисперсии. С этой целью представим δ -функционал в выражении (8) функциональным разложением Лапласа

$$\delta\{x(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\int p x d\mathbf{r} dt} \{\delta p\} \quad (11)$$

по полю духов $p(\mathbf{r}, t)$, физический смысл которого будет установлен ниже. Тогда после усреднения по распределению (6) статистический функционал (8) принимает стандартный вид

$$\mathcal{Z}\{x(\mathbf{r}, t)\} = \int e^{-S\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}} \{\delta p\}, \quad (12)$$

где эффективное действие $S = \int \mathcal{L} dt$ определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = p \left(\dot{x} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} \right) - \frac{p^2}{2}, \quad \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} \equiv -f - \nabla^2 x, \quad f \equiv -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \quad (13)$$

Далее следует использовать уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{x}} + \nabla^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla^2 \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{x} \equiv \{x, p\} \quad (14)$$

с диссипативной функцией $\mathcal{R} = \dot{x}^2/2$ [37]. В результате получаем уравнения для наиболее вероятных значений статистических полей $x(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$:

$$\dot{x} - \nabla^2 x = f + p, \quad (15)$$

$$\dot{p} + \dot{x} + \nabla^2 p = -f'p, \quad (16)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Сравнение уравнения (15), записанного в виде $\dot{x} = -\delta \mathcal{F}/\delta x + p$, с выражением (4) показывает, что поле $p(\mathbf{r}, t)$ представляет наиболее вероятные значения амплитуды флуктуаций $\zeta(\mathbf{r}, t)$ сопряженной силы f .

3. ЭВОЛЮЦИЯ НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Сравнение деформированной δ -функции (см. формулу (П.10) в приложении) со стандартным функциональным представлением (11) показывает, что с точностью до замены числа k на комплексное поле $ip(\mathbf{r}, t)$ эти выражения имеют одинаковую форму. Благодаря этому статистический функционал

$$\mathcal{Z}_q\{x(\mathbf{r}, t)\} = \frac{2\pi}{2-q} \int e_q^{-S_q\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}} \{\delta p\} \quad (17)$$

отличается от стандартного представления (12) несущественным множителем и заменой обычной экспоненты на деформированную (П.2) (см. приложение). В результате деформация статистической системы не влияет на форму лагранжиана (13). Поэтому варьирование функционала (17) приводит к тем же уравнениям эволюции (15), (16), что и для аддитивной статистической системы.

Таким образом, деформация фазового пространства не изменяет форму траекторий, по которым протекает эволюция неаддитивной системы. Определим плотность свободной энергии разложением Ландау

$$F = \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \quad (18)$$

с безразмерной температурой ε , отсчитанной от точки превращения; кроме того, градиентные слагаемые $\nabla^2 x$ и $\nabla^2 p$ аппроксимируем линейными функциями x/ξ^2 , p/λ^2 с масштабами ξ и λ . В результате система (15), (16) принимает вид

$$\dot{x} = -[(\varepsilon - \xi^{-2}) + x^2]x + p, \quad (19)$$

$$\dot{p} + \dot{x} = [(\varepsilon - \lambda^{-2}) + 3x^2]p. \quad (20)$$

Поскольку уравнения (19), (20) симметричны относительно одновременного обращения знаков переменных x , p , то отвечающие им фазовые портреты (рис. 1) имеют центрально-симметричную форму.

Из рис. 1а видно, что при сильной неоднородности флуктуаций выше точки перехода, когда выполняются условия $0 < \varepsilon < \lambda^{-2}$, реализуются устойчивый узел O , расположенный в начале координат $x_0 = 0$, $p_0 = 0$, и пара центрально-симметричных седел $S_{1,2}$. Очевидно, такая картина отвечает однородному неупорядоченному состоянию. С ослаблением неоднородности в распределении флуктуаций до такой степени, что нарушается неравенство $\varepsilon < \lambda^{-2}$, и усилением неоднородности распределения параметра порядка, обеспечивающим условие $\varepsilon < \xi^{-2}$ (рис. 1б), седла $S_{\pm}$ симметрично смещаются на ось абсцисс, а узел O трансформируется в фокус. Уместно предположить, что такая ситуация представляет эволюцию неупорядоченной системы через стадию гетерофазных флуктуаций. И, наконец, с размытием пространственных распределений амплитуды флуктуаций и параметра порядка, когда одновременно выполняются неравенства $\varepsilon > \lambda^{-2}$, $\varepsilon > \xi^{-2}$, происходит обратная бифуркация пары седел $S_{\pm}$ и узла O в седло S , расположенное в начале координат. Согласно рис. 1в такой случай не отвечает какому-либо стационарному состоянию.

Переход в упорядоченную фазу $\varepsilon < 0$ (рис. 1г–1е) обеспечивает выполнение условий $\varepsilon < \lambda^{-2}$, $\varepsilon < \xi^{-2}$, при которых возможные конфигурации фазовых портретов определяются наличием пяти особых точек – седла S , расположенного в начале координат, центрально-симметричных устойчивых узлов/фокусов $N_{1,2}/F_{1,2}$ и пары седел $S_{\pm}$, симметрично расположенных на оси абсцисс. Согласно рис. 1г размытие

Рис. 1. Фазовые портреты: выше точки перехода ($\varepsilon = 0.5$) при $\xi = 2, \lambda = 1$ (а), $\xi = 1, \lambda = 2$ (б), $\xi = 10, \lambda = 10$ (в) и ниже точки перехода ($\varepsilon = -0.5$) при $\xi = 2, \lambda = 1$ (г), $\xi = 1, \lambda = 2$ (д), $\xi = 1, \lambda = 1$ (е). Штриховыми линиями указаны траектории, реализуемые с малой вероятностью, пунктирные лучи отвечают постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$.

неоднородности параметра порядка за счет роста масштаба ξ приводит к ослаблению колебательного режима вблизи стационарных состояний $N_{1,2}/F_{1,2}$, а размытие неоднородности распределения флуктуаций за счет увеличения масштаба λ (рис. 1д) усиливает его. В явном виде влияние масштабов ξ, λ определяется показателями Ля-

пунова

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -(\alpha + \beta) \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha - 6x_0p_0}, \\ \alpha &\equiv (\varepsilon - \xi^{-2}) + 3x_0^2, \quad \beta \equiv \frac{1}{2}(1 + \xi^{-2} + \lambda^{-2}),\end{aligned}\quad (21)$$

где x_0, p_0 – координаты особых точек.

Как уже указывалось, деформация неаддитивной статистической системы не изменяет вид фазовых портретов. Покажем, что она существенно сказывается на вероятности реализации фазовых траекторий

$$P_q\{p(x)\} = Z_q^{-1} e_q^{-S\{p(x)\}}. \quad (22)$$

Здесь эффективное действие $S\{p(x)\} = S_{\min}\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}$ принимает минимальные значения, отвечающие оптимальным фазовым траекториям эволюции системы, а статистическая сумма определяется условием нормировки

$$Z_q = \int e_q^{-S\{p(x)\}} \{\delta p\}, \quad \{\delta p\} \equiv \prod_x \delta p(x). \quad (23)$$

Для представления функциональной зависимости (22) в графическом виде будем проводить перебор фазовых траекторий вдоль лучей, показанных на рис. 1 при постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$. В результате получаем распределения вероятностей реализации этих траекторий, показанные на рис. 2. Из них видно, что указанные вероятности определяются положениями сепаратрис на фазовых портретах (на рис. 1 траектории, отвечающие конечным вероятностям, выделены сплошными линиями). Обращает на себя внимание тот факт, что в однородном неупорядоченном состоянии (рис. 1а) с конечной вероятностью реализуются траектории, ограниченные только большими значениями параметра порядка. С другой стороны, гетерофазные флуктуации неупорядоченного состояния (рис. 1б) и изменения параметра порядка во всех режимах упорядоченного состояния (рис. 1г–1е) ограничены как сверху, так и снизу. Сравнение рис. 1г с рис. 1д, 1е показывает, что трансформация притягивающих узлов в фокусы приводит к более рельефному изменению вероятности реализации различных траекторий. С другой стороны, из рис. 3 видно, что при значительном росте параметра неаддитивности все разрешенные траектории становятся практически равновероятными.

4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Рассмотрим неаддитивный статистический ансамбль, состоящий из N частиц, распределенных по состояниям $\mathbf{q} = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$ в фазовом пространстве с координатами $\mathbf{r}_i$ и импульсами $\mathbf{p}_i$, от которых зависит гамильтониан $H = H(\mathbf{q})$. При пространственно-временной зависимости параметра порядка $x = x(\mathbf{r}, t)$ статистический функционал

$$\mathcal{Z}_q\{x\} = \int e_q^{-\beta H(\mathbf{q})} \delta[x - x(\mathbf{q})] d\mathbf{q}, \quad (24)$$

зависящий от обратной температуры $\beta \equiv T^{-1}$, связан с эффективным действием $S_q\{x\}$ определением

$$\mathcal{Z}_q\{x\} := e_q^{-S_q\{x\}}. \quad (25)$$

В согласии с деформированным преобразованием Фурье (II.8) производящий функционал представляется обобщенным преобразованием Лапласа:

$$\mathcal{Z}_q\{u(\mathbf{r}, t)\} := \int \mathcal{Z}_q\{x\} \otimes_q e_q^{u \cdot x} \{\delta x\} = \int e_q^{u \cdot x - S_q\{x\}} \{\delta x\}, \quad (26)$$

Рис. 2. Распределения вероятностей реализации различных траекторий, отвечающие изменениям параметра порядка x вдоль лучей, соответствующих постоянной амплитуде флуктуаций $p = 0.2$ при параметре неаддитивности $q = 0.4$.

где обозначено $u \cdot x \equiv \int u x \, d\mathbf{r} \, dt$. Поскольку экспонента Цаллиса e_q^x сохраняет свою форму под действием оператора $[1 + (1 - q)x]_+ d/dx$, то далее удобно ввести q -вариационную производную $\mathcal{D}_{x(\mathbf{r}, t)}^q$, действие которой на произвольный функцио-

Рис. 3. Распределения вероятностей реализации фазовых траекторий на рис. 1д при параметрах неаддитивности $q = 0.4, 1.0, 10, 100$ (кривые 1–4 соответственно).

нал $f = f\{x(\mathbf{r}, t)\}$ задается равенством

$$\mathcal{D}_{x(\mathbf{r}, t)}^q f := [e^f]^{1-q} \frac{\delta f}{\delta x(\mathbf{r}, t)}. \quad (27)$$

Тогда n -кратное варьирование производящего функционала (26) дает n -точечный коррелятор

$$\begin{aligned} \langle x(\mathbf{r}_1, t_1) \dots x(\mathbf{r}_n, t_n) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}_q\{u\}|_{u=0}} \times \\ &\times [\mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_1, t_1)}^q \dots \mathcal{D}_{u(\mathbf{r}_n, t_n)}^q] \mathcal{Z}_q\{u(\mathbf{r}, t)\}|_{u(\mathbf{r}_1, t_1), \dots, u(\mathbf{r}_n, t_n)=0}, \end{aligned} \quad (28)$$

имеющий ту же структуру, что и в стандартной теории поля [31]. С учетом тождественности N частиц, составляющих систему, ее статистическая сумма определяется выражениями

$$Z_{Nq} := \frac{1}{N!} \mathcal{Z}_q\{u = 0\} = \frac{1}{N!} \int e_q^{-S_q\{x\}} \{\delta x\}. \quad (29)$$

Как и в обычной полевой схеме [31], неудобство производящего функционала (26) состоит в его неаддитивности [38]. Для устранения этого недостатка введем функционал

$$\mathcal{G}_q\{u\} := \ln_q(\mathcal{Z}_q\{u\}), \quad (30)$$

представляющий собой деформированный логарифм (П.3) (см. приложение) выражения (26). Если в функциональной зависимости (30) удобно перейти от вспомогательного поля $u(\mathbf{r}, t)$ к параметру порядка $x(\mathbf{r}, t)$, то следует провести преобразование Лежандра

$$\Gamma_q\{x\} := u \cdot x - \mathcal{G}_q\{u\}, \quad (31)$$

приводящее к сопряженному функционалу $\Gamma_q = \Gamma_q\{x\}$. Пара функционалов $\mathcal{G}_q\{u\}$, $\Gamma_q\{x\}$ играет роль сопряженных потенциалов, вариация которых дает уравнения состояний

$$x(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}_u^q \mathcal{G}_q\{u\} \Leftrightarrow u(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}_x^q \Gamma_q\{x\}. \quad (32)$$

Первое из них представляет собой обобщение термодинамического определения параметра порядка, второе следует из преобразования Лежандра (31) после его вариации по параметру порядка. Являясь аналитическими функционалами, потенциалы $\mathcal{G}_q\{u\}$, $\Gamma_q\{x\}$ представляются следующими рядами:

$$\mathcal{G}_q\{u\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{1, \dots, n} \mathcal{G}_{1, \dots, n}^{(n)} u_1 \dots u_n, \quad (33)$$

$$\Gamma_q\{x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{1, \dots, n} \Gamma_{i, \dots, n}^{(n)} \eta_1 \dots \eta_n, \quad \eta_i \equiv x_i - \mathcal{G}_i^{(1)}. \quad (34)$$

Здесь $[n]_q!$ – факториалы q -деформированных чисел $[n]_q = [1 + (1 - q)(n - 1)]_+^{-1} n = (e_q^n)^{-(1-q)} n$, индексы $i = 1, \dots, n$ означают координаты $\mathbf{r}_i$, t_i пространства-времени, ядра $\mathcal{G}_{1, \dots, n}^{(n)}$, $\Gamma_{1, \dots, n}^{(n)}$ сводятся к n -частичным функциям Грина и их неприводимым частям соответственно.

Подобно стандартной полевой схеме [31] производящий функционал (26) удовлетворяет некоторым формальным соотношениям. Первое из них отображает симметрию системы по отношению к вариации $\delta x_i = \epsilon f_i\{x\}$, заданной аналитическим функционалом $f_i = f_i\{x\}$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. При варьировании последнее подынтегральное выражение в функционале (26) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} e_q^{-S\{x+\delta x\}+u(x+\delta x)} &\simeq \\ &\simeq \left[(1 + (1 - q)(-S\{x\} + u \cdot x)) + (1 - q) \left(-\frac{\partial S}{\partial x_i} + u_i \right) \delta x_i \right]_+^{1/(1-q)} = \\ &= e_q^{-S\{x\}+u \cdot x} \left[1 + \frac{(1 - q)(-\partial S/\partial x_i + u_i)}{1 + (1 - q)(-S\{x\} + u \cdot x)} \delta x_i \right]_+^{1/(1-q)} \simeq \\ &\simeq e_q^{-S\{x\}+u \cdot x} \left[1 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_i} + u_i \right) \delta_q x_i \right]_+, \end{aligned} \quad (35)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам и введен q -вириал (ср. с (27))

$$\delta_q x_i := [e_q^{-S\{x\}+u \cdot x}]^{q-1} \delta x_i. \quad (36)$$

С другой стороны, якобиан перехода от x к $x + \delta_q x$ дает множитель $1 + (\partial f_i / \partial_q x_i) \epsilon$, определенный оператором q -дифференцирования $(\partial f / \partial_q x) = (e_q^f)^{1-q} (\partial f / \partial x)$ типа (27). Собирая слагаемые, пропорциональные бесконечно малой величине ϵ , из свойства инвариантности производящего функционала (26) получаем

$$\left[f_i\{\mathcal{D}_u^q\} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \{\mathcal{D}_u^q\} - u_i \right) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \{\mathcal{D}_u^q\} \right] \mathcal{Z}_q\{u\} = 0. \quad (37)$$

Здесь использовано первое уравнение состояний (32) для операторного представления

$$f_i\{x\}e_q^{-S\{x\}+u\cdot x} = f_i\{\mathcal{D}_u^q\}e_q^{-S\{x\}+u\cdot x}.$$

При $f_i\{x\} = \text{const}$ выражение (37) принимает упрощенный вид, следующий непосредственно из производящего функционала (26) после его варьирования по полю x .

Второе из упомянутых соотношений позволяет учесть наличие произвольных связей $F_j\{x\} = 0$, $j = 1, 2, \dots$, для искомого набора значений поля $x = x(\mathbf{r}, t)$. Учет этих связей достигается подстановкой δ -функционала $\delta_q\{F\}$ в подынтегральное выражение (26), что приводит к удлинённому производящему функционалу

$$\mathcal{Z}_q^{(F)}\{u, v\} := \int e_q^{-S\{x\}+u\cdot x+v\cdot F}\{\delta x\}\{\delta v\}. \quad (38)$$

Его варьирование по вспомогательному полю $v = v\{\mathbf{r}, t\}$ дает искомый результат

$$F_i\{\mathcal{D}_v^q\}\mathcal{Z}_q^{(F)}\{u, v\} = 0. \quad (39)$$

В сравнении со стандартной полевой схемой [31] главная особенность выражений (37), (39) состоит в том, что они содержат q -вариационную производную (27).

5. ТЕРМОДИНАМИКА НЕАДДИТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим сначала гармоническое приближение, в рамках которого эффективное действие $S_q^{(0)}\{x\} = \int \mathcal{L}_q^{(0)}(x(t)) dt$ определяется суммой

$$\mathcal{L}_q^{(0)} = \sum_{i=1}^N \lambda_q^{(0)}(x_i), \quad \lambda_q^{(0)}(x) = \frac{x^2}{[2]_q \Delta^2}, \quad [2]_q \equiv \frac{2}{[2-q]}. \quad (40)$$

Здесь каждое слагаемое задается обратной кривизной Δ^2 и параметром неаддитивности q (ср. с работой [38]). С учетом правил (II.4), (II.5) производящий функционал (26) представляется деформированным произведением

$$\mathcal{Z}_q^{(0)}\{u\} = z_q^{(0)}(u_1) \otimes_q \dots \otimes_q z_q^{(0)}(u_N) \quad (41)$$

одночастичных составляющих

$$z_q^{(0)}(u) = \int \exp_q \left[\int \left(ux - \frac{x^2}{[2]_q \Delta^2} \right) d\mathbf{r} dt \right] \delta x. \quad (42)$$

При нахождении статистической суммы $Z_{qN}^{(0)}$ следует учесть тождественность частиц, число перестановок которых равно q -факториалу (II.6) при $n = N$. В результате приходим к определению

$$Z_{qN}^{(0)} := \mathcal{Z}_q^{(0)}\{u = 0\} \oslash_q N!_q, \quad (43)$$

где q -деформированный факториал $N!_q$ числа $N \gg 1$ определяется формулой Стирлинга (II.7) (см. приложение), которой удобно придать вид¹⁾

$$N!_q \simeq \exp_q \left[\frac{N}{[2-q]} \ln_q(N \oslash_q e_q) \right], \quad q \neq 2. \quad (44)$$

¹⁾ Отметим, что при определении деформированного произведения в работе [39] упускалось условие положительности выражения, стоящего в квадратных скобках в формулах (II.4) (см. приложение). Поэтому для больших чисел $n \gg 1$ q -логарифм $\ln_q(n!_q)$ в формуле (II.7) может принимать отрицательные значения при $q > 2$. Во избежание этого следует брать разность $q - 2$ по абсолютному значению.

Здесь $e_q \equiv |2 - q|^{1/(1-q)}$ – q -деформированное основание натурального логарифма, принимающее обычное значение $e_1 \equiv e \simeq 2.718$ при $q = 1$. Из формул (44), (П.7) (см. приложение) с использованием производящего функционала (41) находим

$$Z_{qN}^{(0)} = \underbrace{z_q^{(0)}(0) \otimes_q \cdots \otimes_q z_q^{(0)}(0)}_N \otimes_q \exp_q \left[\frac{N}{|2 - q|} \ln_q(N \otimes_q e_q) \right], \quad (45)$$

где обозначено $z_q^{(0)}(0) \equiv z_q^{(0)}(u_i = 0)$. Проводя q -логарифмирование, приводим равенство (45) к аддитивной форме $\ln_q(Z_{qN}^{(0)}) = N \ln_q(z_q^{(0)})$, где одночастичная статистическая сумма определяется выражением

$$z_q^{(0)} := \exp_q \left\{ \ln_q[z_q^{(0)}(0)] - \frac{1}{|2 - q|} \ln_q(N \otimes_q e_q) \right\}, \quad (46)$$

в котором величина $z_q^{(0)}(0)$ задается равенством (42).

Для вычисления удельной статистической суммы удобно ввести переменную

$$y = \frac{|(1 - q)(2 - q)|}{2\Delta^2} x^2, \quad (47)$$

переход к которой приводит к удвоению интеграла в формуле (42). В результате получаем выражение

$$z_q^{(0)} = \exp_q \left\{ \ln_q \left[Q\Delta B \left(Q_0, \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{1}{|2 - q|} \ln_q(N \otimes_q e_q) \right\}, \quad (48)$$

где бета-функция определена стандартным образом [40], а функции параметра неаддитивности $Q = Q(q)$ и $Q_0 = Q_0(q)$ заданы равенствами

$$Q = \sqrt{\frac{2}{|(1 - q)(2 - q)|}}, \quad Q_0 = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} + 1, & q \notin (1, 2), \\ \frac{1}{q - 1} - \frac{1}{2}, & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (49)$$

В явном виде q -логарифм статистической суммы (48) записывается следующим образом:

$$\ln_q(z_q^{(0)}) = \frac{|2 - q|[z_q^{(0)}(0)]^{1-q} - N^{1-q}}{(1 - q)|2 - q|}, \quad z_q^{(0)}(0) = Q\Delta B \left(Q_0, \frac{1}{2} \right). \quad (50)$$

Это выражение принимает скейлинговую форму $\ln_q(z_q^{(0)}) \propto N^{1-q}$ при условии $\Delta = \Delta_1 N$, где параметр Δ_1 не зависит от числа частиц. Это условие подтверждается примером аддитивных систем, где для d -мерного идеального газа параметр $\Delta_1 = (mT/(2\pi\hbar^2))^{d/2} n^{-1}$ определяется плотностью $n = N/V$; V – объем [37].

Моменты свободного поля определяются выражением

$$\langle x^m \rangle_q^{(0)} := \frac{1}{z_q^{(0)}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e_q^{-x^2/[2]_q \Delta^2} dx. \quad (51)$$

Для нечетных порядков $m = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, имеем $\langle x^{2n-1} \rangle_q^{(0)} = 0$, а моменты четных порядков $m = 2n$, $n = 1, 2, \dots$, принимают вид

$$\langle x^{2n} \rangle_q^{(0)} = \frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)} B \left[Q_0(n), n + \frac{1}{2} \right], \quad Q_0(n) = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} + 1, & q \notin (1, 2); \\ \frac{1}{q - 1} - \left(n + \frac{1}{2} \right), & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (52)$$

При учете ангармонизма $V(x)$ производящий функционал представляется деформированным произведением типа (41), где одночастичная составляющая имеет вид (ср. с формулой (42))

$$z_q(u) = \int \exp_q \left\{ \int \left[ux - \left(\frac{x^2}{[2]_q \Delta^2} + V(x) \right) \right] d\mathbf{r} dt \right\} \delta x. \quad (53)$$

Проводя разложение экспоненты Цаллиса (II.2) (см. приложение) по степеням возмущения $V(x)$, находим $z_q(0) = z_q^{(0)}(0) + z'_q(0)$, где добавка к гармоническому приближению представляется рядом теории возмущений:

$$z'_q(0) = Q\Delta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C(q, n) \int_0^{\infty} V^n(y) (1 \mp y)_+^{1/(1-q)-n} y^{-1/2} dy \quad (54)$$

с коэффициентами

$$C(q, n) = (1-q)^n \prod_{m=1}^n \frac{(2-q)/(1-q) - m}{m}. \quad (55)$$

При $q \notin (1, 2)$ в бинOME подынтегрального выражения (54) следует взять верхний знак, при котором ограничение, наложенное нижним индексом, сводит верхний предел интегрирования к единице; в интервале $q \in (1, 2)$ берется нижний знак, и указанное ограничение снимается.

В первом порядке поправка $z'_q(0)$ составляет

$$z_q^{(1)}(0) = -Q\Delta \int_0^{\infty} V(y) (1 \mp y)_+^{q/(1-q)} y^{-1/2} dy. \quad (56)$$

Соответственно во втором порядке имеем

$$z_q^{(2)}(0) = \frac{Qq}{2} \Delta \int_0^{\infty} V^2(y) (1 \mp y)_+^{(2q-1)/(1-q)} y^{-1/2} dy. \quad (57)$$

Для стандартного возмущения

$$V = \frac{\lambda_1}{3} x^3 + \frac{\mu_1}{4} x^4, \quad (58)$$

определенного параметрами λ_1, μ_1 , поправка первого порядка (56) не содержит кубического ангармонизма, поскольку он приводит к подынтегральной функции, антисимметричной относительно переменной x , от которой совершается переход к y согласно (47). В результате получаем

$$z_q^{(1)}(0) = -\frac{\mu(Q\Delta_1)^5}{4} B\left(Q_1, \frac{5}{2}\right) N, \quad \mu \equiv \mu_1 N^4, \quad Q_1 = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \notin (1, 2), \\ \frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}, & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (59)$$

Кубический ангармонизм проявляется только в слагаемом (57) второго порядка, где он дает вклад

$$z_q^{(2)}(0) = \frac{\lambda^2 q (Q\Delta_1)^7}{18} B\left(Q_2, \frac{7}{2}\right) N, \quad \lambda \equiv \lambda_1 N^3, \quad Q_2 = \begin{cases} \frac{1}{1-q} - 1, & q \notin (1, 2), \\ \frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}, & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (60)$$

Подстановка поправок (59), (60) в квадратные скобки выражения (50) приводит к уточнению величины одночастичной статистической суммы z_q .

С учетом возмущения $V(x)$ момент порядка m определяется выражением (ср. с формулой (51))

$$\langle x^m \rangle_q = \frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q(0)} \int_0^\infty [(1 \mp y) - (1 - q)V(y)]_+^{1/(1-q)} y^{(m-1)/2} dy. \quad (61)$$

Подобно (54) здесь при $q \notin (1, 2)$ следует взять верхний знак, при котором верхний предел интегрирования сводится к единице; в интервале $q \in (1, 2)$ берется нижний знак. Далее в подынтегральном выражении (61) следует провести разложение по $V(x)$ и учесть подобную поправку (54) для производящей функции $z_q(0) = z_q^{(0)}(0) + z_q'(0)$. В результате изменение момента $\langle x^m \rangle'_q = \langle x^m \rangle_q - \langle x^m \rangle_q^{(0)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle'_q = & -\frac{z_q'(0)}{z_q^{(0)}(0)} \langle x^m \rangle_q^{(0)} + \frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n C(q, n) \times \\ & \times \int_0^\infty V^n(y) (1 \mp y)_+^{1/(1-q)-n} y^{(m-1)/2} dy, \end{aligned} \quad (62)$$

где в отличие от формулы (54) последний множитель содержит степень $(m-1)/2$ вместо $-1/2$. Комбинируя выражение (62) с равенствами (48), (52) и (54), находим

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle'_q = & \frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n C(q, n) \int_0^\infty V^n(y) (1 \mp y)_+^{1/(1-q)-n} \times \\ & \times \left\{ y^{m/2} - \frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0 \left(\frac{m}{2} \right), \frac{m+1}{2} \right] \right\} y^{-1/2} dy. \end{aligned} \quad (63)$$

Как показывает пример определения поправок (59), (60), в силу связи (47) слагаемые ряда (63), содержащие множитель $y^{(m-1)/2}$ с нечетным m , дают нулевой вклад. С учетом формулы (58) поправка первого порядка принимает вид

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_q^{(1)} = & -\frac{(Q\Delta)^{m+1}}{z_q^{(0)}(0)} \int_0^\infty (1 \mp y)_+^{q/(1-q)} \left(\frac{\lambda}{3} y^{3/2} + \frac{\mu}{4} y^2 \right) \times \\ & \times \left\{ y^{m/2} - \frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0 \left(\frac{m}{2} \right), \frac{m+1}{2} \right] \right\} y^{-1/2} dy. \end{aligned} \quad (64)$$

Опуская антисимметричные подынтегральные слагаемые, при нечетных показателях $m = 2n - 1$ находим

$$\langle x^{2n-1} \rangle_q^{(1)} = -\frac{(Q\Delta)^{2n}}{z_q^{(0)}(0)} \int_0^\infty (1 \mp y)_+^{q/(1-q)} \left\{ \frac{\lambda}{3} y^{n+1/2} - \frac{\mu}{4} \frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0 \left(n - \frac{1}{2} \right), n \right] y^{3/2} \right\} dy. \quad (65)$$

Отсюда окончательно следует

$$\langle x^{2n-1} \rangle_q^{(1)} = \frac{(Q\Delta)^{2n}}{z_q^{(0)}(0)} \left\{ \frac{\mu}{4} \frac{Q\Delta B[Q_{\text{odd}}(1), 5/2]}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0 \left(n - \frac{1}{2} \right), n \right] - \frac{\lambda}{3} B \left[Q_{\text{odd}}(n), n + \frac{3}{2} \right] \right\}, \quad (66)$$

где обозначено

$$Q_{\text{odd}}(n) = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \notin (1, 2), \\ \frac{1}{q-1} - \left(n + \frac{1}{2} \right), & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (67)$$

Соответственно моменты четного порядка $m = 2n$ записываются в форме

$$\langle x^{2n} \rangle_q^{(1)} = -\frac{\mu}{4} \frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)} \int_0^\infty (1 \mp y)_+^{q/(1-q)} \left\{ y^{n+3/2} - \frac{Q\Delta}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0(n), n + \frac{1}{2} \right] y^{3/2} \right\} dy. \quad (68)$$

В результате получаем

$$\langle x^{2n} \rangle_q^{(1)} = \frac{\mu}{4} \frac{(Q\Delta)^{2n+1}}{z_q^{(0)}(0)} \left\{ \frac{Q\Delta B[Q_{\text{even}}(0), 5/2]}{z_q^{(0)}} B \left[Q_0(n), n + \frac{1}{2} \right] - B \left[Q_{\text{even}}(n), n + \frac{5}{2} \right] \right\}, \quad (69)$$

где

$$Q_{\text{even}}(n) = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \notin (1, 2), \\ \frac{1}{q-1} - \left(n + \frac{3}{2} \right), & q \in (1, 2). \end{cases} \quad (70)$$

Как показывают выражения (66), (69), поправки к статистической сумме (54) приводят к положительным вкладам в моменты (61). С другой стороны, в моменты нечетного порядка (66) дают вклады как кубический, так и биквадратный ангармонизмы, тогда как при четном порядке сказывается только последний.

Везде выше мы пренебрегали вкладом градиентных слагаемых и межчастичным взаимодействием, благодаря чему наиболее удобным было использование одноузельного приближения. Для учета указанных эффектов следует перейти к волновому представлению, в рамках которого лагранжиан свободного неоднородного поля принимает вид (ср. с формулой (40))

$$\mathcal{L}_q^{(0)} := \frac{2}{[2]_q} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\Delta^2} + \alpha \mathbf{k}^2 \right) |x_{\mathbf{k}}|^2, \quad (71)$$

где $\alpha > 0$ – параметр неоднородности. Соответственно двухчастичное взаимодействие определяется вкладом

$$W_q := \frac{2}{[4]_q N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} x_{\mathbf{k}}^* x_{-\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}^* x_{-\mathbf{k}+\mathbf{k}''} x_{\mathbf{k}}, \quad (72)$$

интенсивность которого задается ядром $w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ при $x_{\mathbf{k}}^* = x_{-\mathbf{k}}$.

В рамках волнового представления поведение системы определяется N степенями свободы, интенсивности которых задаются величинами $x_{\mathbf{k}}$. Статистическая сумма каждой из этих мод задается теми же формулами (50), (54), (56), (57), (59) и (60), в которых, как показывает сравнение равенств (71) и (40), следует заменить Δ на $\Delta/\sqrt{1 + \alpha \Delta^2 \mathbf{k}^2}$; такую же замену следует провести и в равенствах (52), (61)–(66), (68) и (69), определяющих моменты наблюдаемых величин. Что касается межчастичного взаимодействия, то наиболее простым образом его учет достигается в приближении среднего поля, в рамках которого в равенстве (72) следует пренебречь суммой по волновому вектору $\mathbf{k}''$, ядро $w_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ положить равным постоянному значению w_0 , отвечающему $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, а произведения типа $x_{\mathbf{k}}^* x_{-\mathbf{k}}$ заменить средним значением $\rho \equiv N^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \langle x_{\mathbf{k}}^* x_{-\mathbf{k}} \rangle$. В результате выражение (72) принимает квадратичную форму

$$W_q \simeq \frac{4w_0\rho}{[4]_q} \sum_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}}^* x_{-\mathbf{k}}, \quad (73)$$

подобную выражению (71).

Таким образом, учет пространственной неоднородности (71) и межчастичного взаимодействия (72) оставляет неизменной форму равенств (50), (52), (54), (56), (57), (59)–(66), (68) и (69), определяющих статистическую сумму и моменты наблюдаемых величин для каждой из степеней свободы, отвечающих волновому вектору $\mathbf{k}$. При этом в указанных равенствах под параметром Δ следует понимать диспергирующее значение

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{\sqrt{(1 + (2[2]_q/[4]_q)\Delta^2 w_0 \rho) + \alpha \Delta^2 \mathbf{k}^2)}}. \quad (74)$$

С учетом аддитивности q -логарифмов статистических сумм $z_{q\mathbf{k}}$, приходящихся на каждую степень свободы $\mathbf{k}$, полное значение Z_{qN} для N частиц определяется равенством

$$\ln_q(Z_{qN}) = \sum_{\mathbf{k}} \ln_q(z_{q\mathbf{k}}). \quad (75)$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенное рассмотрение показывает, что деформация статистического распределения, приводящая к неаддитивности термодинамических потенциалов, не требует принципиальных изменений при использовании квантово-полевых методов [29]–[31] для описания сложных систем. В частности, оказывается, что эволюция наиболее вероятных значений параметра порядка и амплитуды его флуктуаций вообще не испытывает изменений, тогда как вероятности реализации различных фазовых траекторий зависят от параметра неаддитивности. При этом полевой формализм, основанный на методе производящего функционала [31], модифицируется в том же духе, что и статистика Цаллиса [3].

Термодинамические свойства неаддитивной системы, состоящей из N частиц, определяются q -деформированной свободной энергией $F_{qN} := -T \ln_q(Z_{qN})$. Поскольку q -логарифм статистической суммы сохраняет свою аддитивность, то определенный таким образом термодинамический потенциал может быть представлен в стандартной форме $F_{qN} = N f_q$, где удельная свободная энергия $f_q := -T \ln_q(z_q)$ задается статистической суммой z_q , приходящейся на частицу. При $q \neq 1$ величина z_q зависит от числа частиц N , благодаря чему нарушается условие аддитивности $F_{qN} \propto N$ полной свободной энергии.

Следуя рассмотрению, проведенному в предыдущем разделе, представим зависимость удельной статистической суммы z_q от параметра неаддитивности q . Из рис. 4 видно, что в гармоническом приближении с ростом q в интервале $q \in (0, 2)$ величина $\ln_q(z_q^{(0)})$ монотонно возрастает от конечного значения $\ln_0(z_0^{(0)}) = ((4/3)\Delta_1 - 1/2)N$ до бесконечности (формулы (43), (44) показывают, что расходимость q -логарифма статистической суммы при $q = 2$ обусловлена бесконечным возрастанием q -факториала $N!_q$, учитывающего тождественность частиц). При этом реализуются асимптотики

$$N^{q-1} \ln_q(z_q^{(0)}) \simeq \begin{cases} \left[\ln(\sqrt{2\pi}\Delta_1) + \frac{1}{|2-q|} \right] + \left[\frac{7}{8} - \frac{1}{2} \ln^2(\sqrt{2\pi}\Delta_1) \right] (q-1), & |q-1| \ll 1; \\ \frac{1}{|2-q|}, & |2-q| \ll 1. \end{cases} \quad (76)$$

Согласно рис. 4б ангармонизм очень слабо влияет на статистическую сумму свободного поля.

Рис. 4. Зависимость q -логарифма одночастичной статистической суммы (50) от параметра неаддитивности, на врезке использованы полулогарифмические координаты (а); та же зависимость для статистической суммы (б) в случае свободного поля (штриховая линия) и с учетом ангармонизма при $\lambda = \mu = 12$ (сплошная).

Рис. 5. Зависимость моментов $\langle x^{2n-1} \rangle_q$ (а) и $\langle x^{2n} \rangle_q$ (б) от параметра неаддитивности при $\lambda, \mu = 12$ (кривые 1, 2 отвечают $n = 1, 2$ соответственно).

Представим поведение моментов наблюдаемых величин в зависимости от параметра неаддитивности. Поскольку для свободного поля моменты нечетных порядков равны нулю, то на рис. 5 приведены данные для больших значений параметров ангармонизма $\lambda = \mu = 12$. Обращает на себя внимание тот факт, что при фиксированном порядке m момент $\langle x^m \rangle_q$ масштабируется числом частиц N^m , взятым в той же степени. Кроме того, оказывается, что моменты $\langle x^{2n-1} \rangle_q$ нечетного порядка принимают отрицательные значения, а $\langle x^{2n} \rangle_q$ – положительные. Из сравнения кривых, отвечающих различным степеням ангармонизма, на рис. 6 видно, что его рост приводит к увеличению абсолютных значений моментов нечетного порядка, тогда как для четных ангармонизм размывает особенность, наблюдающуюся для моментов $\langle x^{2n} \rangle_q^{(0)}$ свободного поля при $q = 2$. Подобно удельной статистической сумме (76)

Рис. 6. Зависимость среднего значения $\langle x \rangle_q$ от параметра неаддитивности и ангармонизма: кривые 1, 2, 3 отвечают $\lambda, \mu = 0, 1, 12$ соответственно (а); та же зависимость для дисперсии $\langle x^2 \rangle_q$: кривые 1, 2, 3 отвечают $\lambda, \mu = 0.0, 0.1, 1.0$ соответственно (б).

с ростом параметра неаддитивности q в интервале $q \in (0, 2)$ четные моменты $\langle x^{2n} \rangle_q^{(0)}$ монотонно возрастают от конечного значения $\langle x^{2n} \rangle_0^{(0)} = 3\Delta_1^{2n} N^{2n} / (2n+1)(2n+3)$ до бесконечности. При этом вблизи значений $q = 1$ и $q = 2$ реализуются асимптотики

$$\frac{\langle x^{2n} \rangle_q^{(0)}}{N^{2n}} \simeq \begin{cases} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{\Delta_1^2}{2} \right)^n \left[1 + \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{3}{2} \right) (q-1) \right], & |q-1| \ll 1, \\ \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{\Delta_1^2}{2} \right)^n |2-q|^{-n}, & |2-q| \ll 1. \end{cases} \quad (77)$$

При интерпретации найденных зависимостей статистической суммы и моментов наблюдаемых величин от параметра неаддитивности следует иметь в виду, что в самоподобных системах его значение q не является свободным. Это связано с тем, что при деформации фазового пространства, растягивающей одну из осей x, p в λ раз и сжимающей другую в той же степени (в результате фазовый объем не изменяется), должно выполняться условие самоподобия распределения состояний x, p . Это выражается в том, что физические значения величин задаются не исходной вероятностью $p(x)$, а эскортной (см. формулу (II.1)), представляющей степенную функцию $p(x)$. Исследование условий самоподобия показывает, что их выполнение обеспечивается уравнением [41]

$$(\lambda^q - 1)(\lambda^{q-1} - 1) = (\lambda - 1)^2, \quad (78)$$

определяющим связь параметра неаддитивности q и деформации λ . В результате получаем зависимость, приведенную на рис. 7.

Этот рисунок показывает, что изменение деформации λ от нуля до единицы приводит к спадаанию параметра неаддитивности от $q = 2$ до золотого сечения $q = 1.618$, а при дальнейшем росте λ до бесконечности параметр q медленно уменьшается до $q = 1.5$. Согласно рис. 4–6 при этом удельная статистическая сумма также уменьшается, а моменты наблюдаемых величин могут изменяться немонотонным образом.

Рис. 7. Зависимость параметра неаддитивности q от деформации λ самоподобной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формализм неаддитивной статистической системы

В отличие от обычного статистического ансамбля неаддитивная система подчиняется статистике Цаллиса [3], [38], в рамках которой состояния распределены не по Гиббсу, а согласно эскортной вероятности [7]

$$P_q(x) = \frac{p^q(x)}{\int p^q(x) dx}, \quad p(x) = Z_q^{-1} e_q^x, \quad (\text{П.1})$$

где статистическая сумма Z_q определяется условием нормировки исходной вероятности $p(x)$. Последняя, в свою очередь, задается деформированной экспонентой Цаллиса

$$e_q^x := [1 + (1 - q)x]_+^{1/(1-q)}, \quad [y]_+ \equiv \max(y, 0), \quad (\text{П.2})$$

которая в пределе $q \rightarrow 1$ сводится к обычной экспоненте $e^x = e_1^x$. Соответственно логарифм Цаллиса, играющий роль функции, обратной экспоненте (П.2), определяется равенством

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (\text{П.3})$$

Кроме того, сумма, разность, произведение и частное положительных величин x, y принимают вид [35]

$$\begin{aligned} x \oplus_q y &:= x + y + (1 - q)xy, & x \ominus_q y &:= \frac{x - y}{1 + (1 - q)y}, \\ x \otimes_q y &:= [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{1/(1-q)}, & x \oslash_q y &:= [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{1/(1-q)}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

При этом функции (П.2), (П.3) удовлетворяют правилам

$$\begin{aligned} \ln_q(x \otimes_q y) &= \ln_q x + \ln_q y, & \ln_q(x \oslash_q y) &= \ln_q x - \ln_q y, \\ e_q^x \otimes_q e_q^y &= e_q^{x+y}, & e_q^x \oslash_q e_q^y &= e_q^{x-y}, \\ \ln_q(xy) &= \ln_q x \oplus_q \ln_q y, & \ln_q\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln_q x \ominus_q \ln_q y, \\ e_q^x e_q^y &= e_q^{x \oplus_q y}, & \frac{e_q^x}{e_q^y} &= e_q^{x \ominus_q y}, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

а q -факториал

$$n!_q := 1 \otimes_q 2 \otimes_q \cdots \otimes_q n \quad (\text{П.6})$$

натурального числа $n \gg 1$ выражается формулой Стирлинга [39]

$$\ln_q(n!_q) \simeq \begin{cases} \left(\frac{n}{2-q} + \frac{1}{2}\right) \ln_q n - \frac{n-1}{2-q}, & 0 < q \neq 2, \\ \left[n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] - \ln n, & q = 2. \end{cases} \quad (\text{П.7})$$

Фурье-образ функции $f(x)$ определяется равенствами

$$F_q[f](k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \otimes_q e_q^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{ikx + \ln_q(f(x))} dx, \quad (\text{П.8})$$

в первом из которых использовано деформированное произведение, а во втором – правила (П.5). С учетом (П.2), (П.4) подынтегральное выражение в первом из равенств (П.8) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} e_q^{ikx} \otimes_q f(x) &= \{[1 + (1-q)ikx] + [f(x)]^{1-q} - 1\}_+^{1/(1-q)} = \\ &= f(x) \{1 + (1-q)ikx[f(x)]^{q-1}\}_+^{1/(1-q)} = f(x) e_q^{ikx[f(x)]^{q-1}}. \end{aligned}$$

В результате приходим к выражению [42]

$$F_q[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_q^{ikx[f(x)]^{q-1}} dx, \quad (\text{П.9})$$

где переход от деформированного произведения к обычному достигается за счет введения степени исходной функции $f(x)$ в показатель экспоненты. При этом δ -функция представляется равенством [43]

$$\delta_q(x) = \frac{2\pi}{2-q} \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{ikx} dk, \quad q \in [1, 2]. \quad (\text{П.10})$$

Список литературы

- [1] Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, М., 1978.
- [2] А. И. Олемской, *Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория*, КРАСАНД, М., 2009.
- [3] С. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*, Springer, New York, 2009.
- [4] С. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52**:1–2 (1988), 479–487.
- [5] Е. М. Curado, С. Tsallis, *J. Phys. A*, **24**:2 (1991), L69–L72.

- [6] S. Abe, *Phys. Lett. A*, **224**:6 (1997), 326–330.
- [7] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica A*, **261**:3–4 (1998), 534–554.
- [8] G. Kaniadakis, *Phys. Rev. E*, **66**:5 (2002), 056125, 17 pp., arXiv: cond-mat/0210467.
- [9] G. Kaniadakis, M. Lissia, A. M. Scarfone, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 41–49; *Phys. Rev. E*, **71**:4 (2005), 046128, 12 pp., arXiv: cond-mat/0409683.
- [10] J. Naudts, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 32–40.
- [11] A. M. Scarfone, T. Wada, *Phys. Rev. E*, **72**:2 (2005), 026123, 13 pp., arXiv: cond-mat/0504117.
- [12] A. Lavagno, A. M. Scarfone, N. P. Swamy, *Eur. Phys. J. B*, **50**:1–2 (2006), 351–354, arXiv: cond-mat/0509477.
- [13] A. Lavagno, A. M. Scarfone, N. P. Swamy, *Phys. A*, **40**:30 (2007), 8635–8654, arXiv: 0706.0426.
- [14] G. Vitiello, *Topological defects, fractals and the structure of quantum field theory*, arXiv: 0807.2164.
- [15] F. Wilczek, *Fractional statistics and anyon superconductivity*, World Sci., Singapore, 1990.
- [16] L. C. Biedenharn, *Phys. A*, **22**:18 (1989), L873–L878.
- [17] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22**:21 (1989), 4581–4588.
- [18] E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:16 (1991), 2056–2059.
- [19] E. Heine, *J. reine angew. Math.*, **32** (1846), 210–212; **34** (1847), 285–328.
- [20] F. H. Jackson, *Amer. J. Math.*, **38** (1909), 26; *Mess. Math.*, **38** (1909), 57.
- [21] H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications*, Ellis Horwood, New York, 1983.
- [22] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer, New York, 1995.
- [23] A. Lavagno, N. P. Swamy, *Phys. Rev. E*, **61**:2 (2000), 1218–1226, arXiv: quant-ph/9912111; **65**:3 (2002), 036101, 5 pp.
- [24] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Springer, Berlin, 2006.
- [25] A. Erzan, J.-P. Eckmann, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:17 (1997), 3245–3248.
- [26] A. Erzan, *Phys. Lett. A*, **225**:4–6 (1997), 235–238.
- [27] A. B. Adiba, A. A. Moreirab, J. S. Andrade Jr., M. P. Almeida, *Phys. A*, **322** (2003), 276–284.
- [28] S. Abe, Y. Okamoto (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, Papers from the IMS Winter School on Statistical Mechanics: Nonextensive Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistical Mechanics and its Applications (Okazaki, February 15–18, 1999), Lecture Notes in Physics, **560**, Springer, Berlin, 2001.
- [29] А. А. Абрикосов, А. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, М., 1962.
- [30] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния*, Физматлит, М., 2002.
- [31] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [32] A. I. Olemskoi, S. S. Borysov, I. A. Shuda, *Eur. Phys. J. B*, **77**:2 (2010), 219–231.
- [33] A. I. Olemskoi, I. A. Shuda, *Phys. Lett. A*, **373**:44 (2009), 4012–4016.
- [34] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437.
- [35] E. P. Borges, *Phys. A*, **340**:1–3 (2004), 95–101, arXiv: cond-mat/0304545.
- [36] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer, Berlin, 1984.
- [37] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Ч. 1, Физматлит, М., 2002.
- [38] Ю. Г. Рудой, *ТМФ*, **135**:1 (2003), 3–54.

- [39] H. Suyari, *q-Stirling's formula in Tsallis statistics*, [arXiv: cond-mat/0401541](#).
- [40] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [41] A. I. Olemskoi, A. S. Vaylenko, I. A. Shuda, *Phys. A*, **388**:9 (2009), 1929–1938, [arXiv: 0810.1189](#).
- [42] S. Umarov, C. Tsallis, S. Steinberg, *Milan. J. Math.*, **76** (2008), 307–308.
- [43] M. Jauregui, C. Tsallis, *J. Math. Phys.*, **51** (2010), 063304.

Поступила в редакцию 31.08.2012