Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гущин, L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 243–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:03:06

© 2013 г.

А. К. Гуцин*

L_p -ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка установлен аналог теоремы Карлесона об L_p -оценках. Этот критерий справедливости оценки норм решений в пространстве L_p с мерой доказан при тех же условиях на коэффициенты, при которых известна однозначная разрешимость рассматриваемой задачи. Требуется их непрерывность по Дини на границе, внутри рассматриваемой области предполагается только их измеримость и ограниченность.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Дирихле, граничное значение, некасательная максимальная функция, меры Карлесона.

DOI: 10.4213/tmf8410

1. ВВЕДЕНИЕ

Известные работы Карлесона [1], [2], посвященные проблеме интерполяции ограниченными аналитическими функциями одного комплексного переменного и доказательству теоремы о короне, основываются на следующей оценке аналитической в единичном круге $Q \subset \mathbb{C}$ функции.

Пусть неотрицательная борелевская мера μ (с носителем в $\overline{Q}$) удовлетворяет следующему условию: существует такая постоянная C_μ , что для любой точки $z^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{z^0}(r)) \leq C_\mu r,$$

где $B_{z^0}(r)$ – круг с центром в точке z^0 радиуса r . Тогда для любой аналитической в Q функции u с граничным значением $u_0 = u|_{\partial Q}$ справедлива оценка

$$\iint_Q |u|^p d\mu \leq C \int_{\partial Q} |u_0|^p dS, \quad (1)$$

где $p > 0$, $C = C(p)C_\mu$, $C(p)$ – положительная постоянная, S – мера Лебега на окружности ∂Q .

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: akg@mi.ras.ru

Приведенное условие для меры является и необходимым для справедливости оценки (1) для всех аналитических в Q функций u .

В работе Хермандера [3] аналогичный результат был доказан для гармонических функций в ограниченной области Q с дважды гладкой границей ($\partial Q \in C^2$). Чтобы оценка (1) была справедлива для всех гармонических в Q функций с граничным значением u_0 из $L_p(\partial Q)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера μ , $\text{supp } \mu \subset \bar{Q}$, удовлетворяла следующему условию: существует такая постоянная C_μ , что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq C_\mu r^{n-1}; \quad (2)$$

здесь и всюду далее $B_{x^0}(r)$ – шар в $\mathbb{R}_n$ с центром в точке x^0 радиуса r , $B_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n: |x - x^0| < r\}$.

Удовлетворяющие условию (2) борелевские меры принято называть мерами Карлесона (см., например, монографии [4], [5]). Наименьшую из постоянных C_μ , при которых выполняется неравенство (2), будем называть нормой меры Карлесона μ .

Целью настоящей работы является доказательство аналогичного утверждения для решений следующей задачи Дирихле для линейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q, \quad (3)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0. \quad (4)$$

Здесь Q – ограниченная область n -мерного пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, с гладкой (класса C^1) границей ∂Q , $u_0 \in L_p(\partial Q)$, $1 < p < \infty$, а коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in Q$, уравнения (3) являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяющими с некоторой положительной постоянной γ условию

$$\gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad (5)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\xi| = 1$, и п. в. $x \in Q$.

Далее симметрическую матрицу $a_{ij}(x)$ мы будем для краткости обозначать через $A(x)$.

В “гильбертовом” случае $p = 2$ обсуждаемая теорема карлесоновского типа известна. В нашей работе [6], посвященной описанию поведения решения задачи Дирихле вблизи границы и принятия им своего граничного значения, было доказано утверждение о достаточности для справедливости оценки (1) следующего более жесткого условия для меры: существует такая постоянная C_μ , что для любых $x^0 \in \bar{Q}$ и $r > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq C_\mu r^{n-1} \quad (6)$$

(неравенство (2) выполняется не только для x^0 из ∂Q , но и для всех $x^0 \in \bar{Q}$). При этом предполагалось, что граница области принадлежит классу C^1 , нормаль ν к ней (единичная и внутренняя) непрерывна по Дини:

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \quad (7)$$

а коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q \quad (8)$$

(значения функций $a_{ij}(x)$, $x \in \bar{Q}$, можно так изменить на множестве нулевой меры, что будет выполнено условие (8)). Здесь ω – такая монотонная функция, что $\int_0^\infty \omega(t)/t \, dt < \infty$. Внутри области Q коэффициенты уравнения, как и в случае решения из $W_2^1(Q)$, измеримы и ограничены. Отказаться от условия (8) для коэффициентов нельзя, иначе нарушается единственность решения. Соответствующий пример приведен в работе [6]. Далее мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, выполнение условий (5), (7), (8).

Описание граничного поведения решения в работе [6] дается в терминах пространства $(n-1)$ -мерно-непрерывных функций – пополнения пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функций с нормой

$$\sup \left(\frac{1}{\|\mu\|'} \iint_{\bar{Q}} v^2(x) \, d\mu(x) \right)^{1/2},$$

где точная верхняя грань берется по мерам μ , удовлетворяющим условию (6), а $\|\mu\|'$ – наименьшая из постоянных C_μ , при которых неравенство (6) выполняется. Пространство $(n-1)$ -мерно-непрерывных функций близко к обычному пространству непрерывных функций, но вместо значений функции в точке следует рассматривать ее следы на удовлетворяющих условию (6) мерах μ – элементы пространства $L_2(\bar{Q}, \mu)$. Близким в специальной метрике мерам (в качестве одной из них можно взять S – меру Лебега на границе) соответствуют близкие в специальном смысле значения (они являются элементами различных пространств). Свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности позволяет дать определение решения, не использующее (как и определение классического решения) гладкость границы: уравнение выполняется в смысле равенства обобщенных функций (см., например, монографию [7]), а след решения на границе (на мере S) равен u_0 . В обычной постановке задачи Дирихле с $u_0 \in L_2(\partial Q)$ принятие граничного значения понимается как предел в L_2 следов решения на “параллельных границе” поверхностях (см. работы [8], [9] в случае $\partial Q \in C^2$ и [6], [10] для $\partial Q \in C^1$).

В работе [11] обсуждаемый ослабленный вариант теоремы Карлесона был доказан для решений общего эллиптического уравнения второго порядка при некоторых естественных ограничениях на рост коэффициентов при младших членах вблизи границы.

Теорема о достаточности для справедливости оценки (1) при $p = 2$ для решения задачи Дирихле (3), (4) с произвольной $u_0 \in L_2(\partial Q)$ более слабого условия (2) была доказана в работе [12], посвященной исследованию разрешимости нелокальных задач, в которых значения решения в граничных точках выражаются через его значения во внутренних точках области. Использование этого утверждения позволило предложить новый подход к исследованию разрешимости нелокальных задач и существенно расширить класс поддающихся изучению задач (см. также работы [13]–[16]).

Кроме того, утверждение о достаточности в обсуждаемой теореме карлесоновского типа позволяет получить характеризующее граничное поведение свойство решения, включающее в себя и его непрерывность внутри области. Дальнейшее развитие

этого направления, объединяющее в терминах принадлежности одному функциональному пространству и известное свойство внутренней непрерывности решения по Гёльдеру [17]–[19], и его принадлежность соответствующему задаче весовому соболевскому пространству, было проведено в наших работах [20]–[22]. При этом принадлежность функции введенному пространству не следует из объединяемых свойств.

Более простое утверждение о необходимости условия (2) в случае $p = 2$ приведено в работе [23].

Не возникает сомнений в том, что доказанный Карлесоном для аналитических и Хермандером для гармонических функций критерий справедливости оценки (1) верен и для решений уравнения (3) при всех $p > 1$. Однако совсем не очевидно, выполнение каких условий на коэффициенты уравнения при этом необходимо. Достаточно ли, как в случае $p = 2$, предполагать выполнение условия (8), или нужны дополнительные требования гладкости коэффициентов внутри области? Нетривиальность этого вопроса видна уже на первом этапе исследования при изучении однозначной разрешимости рассматриваемой задачи Дирихле (3), (4), которая, очевидно, необходима для справедливости обсуждаемой теоремы карлесоновского типа.

Так как граничная функция принадлежит $L_p(\partial Q)$, то и принятие граничного значения следует понимать в этом пространстве. Для этого необходима принадлежность решения пространству в L_p на лежащих в Q “параллельных границе” поверхностях. Обычно (см. работы [10], [24] и [25]) для обеспечения этого свойства рассматриваются решения из пространства $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Но это предположение приводит к необходимости наложения дополнительных ограничений на коэффициенты уравнения. Хорошо известно, что при $p > 2$ решение уравнения (1) с измеримыми и ограниченными коэффициентами не обязано принадлежать $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Тем самым в этом случае без дополнительных условий нельзя гарантировать существование решения задачи Дирихле из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ даже с гладкой граничной функцией u_0 . А при $1 < p < 2$ не является справедливой (даже при выполнении условия (8)) теорема о единственности решения из $W_p^1(Q)$ и тем более из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$; соответствующий пример приводится в работе [26]. Отметим, что разрешимость задачи Дирихле в пространстве $W_p^1(Q)$ достаточно хорошо изучена, наиболее полные результаты содержатся в работах [27], [28], где коэффициенты уравнения предполагаются непрерывными в $\bar{Q}$.

От условия непрерывности коэффициентов внутри области можно освободиться, если в определении решения отказаться от согласованного с принятием граничного значения требования принадлежности решения $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, заменив его условием $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$. Такое определение решения предложено в работе [26]; там же при выполнении условий (7) и (8) доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (3), (4) в такой постановке и установлена оценка решения через норму граничной функции u_0 в L_p . С этим решением мы и будем далее работать.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение (полный аналог теоремы Карлесона).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (7) и (8). Тогда для справедливости оценки (1) для всех u_0 из $L_p(\partial Q)$ необходимо и достаточно, чтобы мера μ являлась мерой Карлесона (выполнялось условие (2)). При этом постоянная C в оценке (1) является произведением нормы меры Карлесона μ и постоянной, зависящей только от размерности пространства n постоянной эллиптичности γ из (5), области Q , функции ω из условий (7), (8) и показателя p .

2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Под решением уравнения (3) из области Q мы будем понимать функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению в смысле равенства обобщенных функций, т. е. выполнение интегрального тождества

$$\int_Q (\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) dx = 0 \quad (9)$$

для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Q пробных функций η (а следовательно, и для всех финитных функций η из $W_2^1(Q)$). Хорошо известно, что решение u уравнения (3) непрерывно (и даже непрерывно по Гёльдеру [17]–[19], [29]–[31]) внутри области Q . При этом для произвольной подобласти Q' и для любого лежащего в Q' компакта K справедлива (см., например, книгу [30] или работу [26]) оценка

$$\|u\|_{C(K)} \leq C(n, \gamma) \text{dist}\{K, \partial Q'\}^{-n/p} \|u\|_{L_p(Q')}, \quad (10)$$

где $\text{dist}\{K, \partial Q'\}$ – расстояние от компакта K до границы области Q' . Здесь и далее символом $C = C(n, \gamma, \dots)$ обозначаются, вообще говоря, различные постоянные, зависящие от n , γ и т. д. Отметим также немедленно вытекающее из оценки (10) и оценки интеграла Дирихле по K через норму в $L_p(Q')$ неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(K)} \leq C(n, \gamma, \text{dist}\{K, \partial Q'\}) \|u\|_{L_p(Q')}. \quad (11)$$

Следуя работе [26], определим выполнение граничного условия (4) следующим образом. Из гладкости границы следует существование такого (достаточно малого) положительного числа $r_0 = r_0(\omega)$, что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ лежащая в шаре $B_{x^0}(2r_0)$ радиуса $2r_0$ с центром в x^0 часть области Q представляется в виде

$$Q \cap B_{x^0}(2r_0) = \{x = (x', x_n) : |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 < (2r_0)^2, x_n > \varphi(x')\},$$

где (x', x_n) , $x' = x_1, \dots, x_{n-1}$, – координаты точки x в местной системе координат (начало координат находится в точке x^0 , координатные оси $x_1, \dots, x_{n-1}$ лежат в касательной к ∂Q в точке x^0 плоскости, а ось x_n направлена по нормали $\nu(x^0)$), а функция φ (считаем ее определенной на всем $\mathbb{R}_{n-1}$) непрерывно дифференцируема и имеет достаточно малый градиент; будем предполагать, что $|\nabla \varphi(x')| < 1/2$, $x' \in \mathbb{R}_{n-1}$. Обозначим пересечение границы области с шаром радиуса r_0 через $V_{x^0}(r_0)$, $V_{x^0}(r_0) = \partial Q \cap B_{x^0}(r_0)$. Нетрудно проверить, что при таком выборе числа r_0 сдвиг $\{x \in \mathbb{R}_n : x = x' + \delta \nu(x^0), x' \in V_{x^0}(r_0)\}$ куска границы $V_{x^0}(r_0)$ на расстояние $\delta \in (0, r_0)$ вдоль внутренней (единичной) нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 лежит внутри области Q . Как и в работе [26], будем говорить, что решение u уравнения (3) удовлетворяет граничному условию (4), если для всех $x^0 \in \partial Q$

$$\int_{V_{x^0}(r_0)} |u(x + \delta \nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad (12)$$

при $\delta \rightarrow +0$.

Функцию u из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (3) в смысле (9) и граничному условию (4) в смысле (12), будем называть решением задачи Дирихле (3), (4) с граничным значением из $L_p(\partial Q)$, или L_p -решением.

В работе [26] доказана следующая теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле в приведенной постановке.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой $u_0 \in L_p(\partial Q)$ существует L_p -решение задачи Дирихле (3), (4). Это решение единственно, и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{\xi} \iint_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) + \iint_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ & \leq \text{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \end{aligned} \quad (13)$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q , а постоянная зависит только от размерности пространства n , постоянной эллиптичности γ из (5), области Q , функции ω из условий (7), (8) и показателя p .

Прежде всего отметим простые свойства L_p -решений, доказывающие, что решение не зависит от выбора показателя суммируемости (показателя p в условии (12)).

1. Пусть u является L_p -решением с граничным значением u_0 ($u_0 \in L_p(\partial Q)$, $p > 1$). Тогда u является и L_s -решением с любым показателем $s \in (1, p)$. Если, дополнительно, $u_0 \in L_q$ с $q > p$, то u является и L_q -решением.

Первое утверждение очевидно: из сходимости в $L_p(\partial Q)$ следует сходимость в $L_s(\partial Q)$. Столь же просто доказывается и второе утверждение. Пусть $u_0 \in L_q(\partial Q)$ с $q > p$. Рассмотрим L_q -решение той же задачи. Оно существует по теореме 2 и является также L_p -решением, а в силу утверждения о единственности совпадает с исходным решением u .

В связи с обсуждавшимся свойством показатель суммируемости, при котором решение удовлетворяет граничному условию (12), мы в дальнейшем отмечать не будем. Это условие выполняется при любом показателе, который не превосходит числа p ; напомним, что мы всегда предполагаем $u_0 \in L_p(\partial Q)$.

2. Пусть u – решение задачи (3), (4), а его граничное значение u_0 ($u_0 \in L_p(\partial Q)$) принадлежит, кроме того, пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$. Тогда $u \in W_2^1(Q)$ и является обобщенным (из $W_2^1(Q)$) решением рассматриваемой задачи.

Рассмотрим обобщенное решение $v \in W_2^1(Q)$ задачи Дирихле для уравнения (3) с граничным значением u_0 . Очевидно, что оно является L_2 -решением этой задачи, а согласно первому свойству также и L_p -решением. Поскольку такое решение единственно, то $u = v$.

Отметим также, что из неравенства (13) теоремы 2 немедленно вытекает и следующая оценка нормы решения в $L_p(Q)$:

$$\iint_Q |u(x)|^p dx \leq C(n, \gamma, Q, \omega, p) \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS. \quad (14)$$

Поэтому из неравенств (10) и (17) получаем справедливость следующего свойства.

3. Для решения задачи (3), (4) справедливы оценки

$$\|u\|_{C(K)} \leq C(n, \gamma, \text{dist}\{K, \partial Q\}) \|u_0\|_{L_p(\partial Q)}, \quad (15)$$

$$\|u\|_{W_2^1(K)} \leq C(n, \gamma, \text{dist}\{K, \partial Q\}) \|u_0\|_{L_p(\partial Q)}, \quad (16)$$

где $K = \overline{K} \subset Q$.

Легко видеть, что для рассматриваемого решения задачи Дирихле справедлив принцип максимума.

4. Если $u_0(x) \leq M$ на ∂Q (п.в.), то и решение u удовлетворяет неравенству $u(x) \leq M$ в Q (п.в.).

Чтобы убедиться в справедливости этого свойства, достаточно рассмотреть последовательность гладких (из $C^1(\partial Q)$) функций $\tilde{u}_0^{(k)}$, сходящуюся в $L_p(\partial Q)$ к граничной функции u_0 . Функции

$$u_0^{(k)}(x) = \begin{cases} \tilde{u}_0^{(k)}(x), & \tilde{u}_0^{(k)}(x) < M, \\ M, & \tilde{u}_0^{(k)}(x) \geq M, \end{cases}$$

удовлетворяют условию Липшица (а следовательно, принадлежат пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$), для них справедливо неравенство $u_0^{(k)}(x) \leq M$ на ∂Q , и составленная из них последовательность сходится к u_0 в $L_p(\partial Q)$. По свойству 2 решение $u^{(k)}$ задачи Дирихле с граничной функцией $u_0^{(k)}$ принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Для таких решений принцип максимума хорошо известен. А так как в силу оценки (15) последовательность $\{u^{(k)}\}$ сходится равномерно на любом лежащем в Q компакте к u , то и $u(x) \leq M$ для всех $x \in Q$.

Кроме того, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, характеризующее поведение решения вблизи границы. Напомним, что условия (7), (8), как и условие (5), мы договорились считать, не отмечая этого особо, выполненными.

Пусть $V = V_{x^0}(r) = \partial Q \cap B_{x^0}(r)$, где x^0 — произвольно взятая точка границы, а $r \in (0, r_0)$.

ЛЕММА 1. 1. Пусть $u_0(x) = 0$ при $x \in V$. Тогда для любого компакта $K \subset Q \cup V$ решение u принадлежит пространствам $W_2^1(K)$ и $C(K)$, и для него справедливы неравенства

$$\|u\|_{W_2^1(K)} + \|u\|_{C(K)} \leq \text{const} \|u\|_{L_p(Q)} \leq \text{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}, \quad (17)$$

постоянная в которых зависит от n , γ , ω , p и расстояния от компакта K до $\partial Q \setminus V$.

2. Найдется такая положительная постоянная $c = c(n, \gamma)$, что если $u_0(x) \geq 0$ на ∂Q и $u_0(x) \geq 1$ на V , то

$$u(x) \geq c \quad (18)$$

для всех $x \in \overline{Q} \cap B_{x^0}(r/4)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что ограничение на положительное число r несущественно; утверждения леммы сформулированы в том виде, в котором они будут использованы далее. Нет необходимости и в специальном виде куска границы V , в качестве него можно взять любое открытое (в топологии ∂Q) подмножество границы. При этом, конечно, во второе утверждение следует внести естественные изменения. Кроме того, в первом утверждении леммы нет необходимости требовать равенства нулю граничной функции на V ; для утверждения о непрерывности достаточно потребовать непрерывность u_0 на этом куске границы, а для принадлежности решения пространству $W_2^1(K)$ — принадлежность u_0 соответствующему пространству следов. Конечно, естественным образом изменятся и оценки решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Прежде всего заметим, что утверждения леммы достаточно доказать для граничной функции $u_0 \in C^1(\partial Q)$. Действительно, пусть утверждение справедливо для гладких граничных функций. Возьмем произвольную $u_0 \in L_p(\partial Q)$ и последовательность гладких функций $\{u_0^{(k)}\}$, сходящуюся к u_0 в $L_p(\partial Q)$. Если $u_0(x) = 0$ на V (первое утверждение леммы), то и $\{u_0^{(k)}\}$ можно считать равными нулю на этом множестве. Если же $u_0(x) \geq 0$ на ∂Q и $u_0(x) \geq 1$ на V (второе утверждение), то и все члены последовательности можно взять удовлетворяющими этим неравенствам. Последовательность решений $\{u^{(k)}\}$ рассматриваемой задачи с граничными значениями $\{u_0^{(k)}\}$ в силу неравенств (17) фундаментальна в пространствах $W_2^1(K)$ и $C(K)$ для любого компакта $K \subset Q \cup V$. Как легко видеть, она сходится к решению задачи с граничным значением u_0 (по поводу выполнения для предельной функции граничного условия см. работу [26]), откуда немедленно следует справедливость первого утверждения леммы для решения с граничным значением u_0 . Из справедливости для всех членов последовательности оценки $u^{(k)}(x) \geq c$ при $x \in \bar{Q} \cap B_{x^0}(r/4)$ и равномерной сходимости этой последовательности на содержащем $\bar{Q} \cap B_{x^0}(r/4)$ компакте вытекает доказываемая оценка предельной функции u .

Для обобщенного решения (из $W_2^1(Q)$) свойство непрерывности по Гёльдеру решения (и тем более его непрерывность) вплоть до заданного куска границы и первое неравенство из (17) известны (причем при существенно более слабых условиях для границы) [29], [30], [32], [33]. Отметим, что справедливость этого утверждения для обобщенных решений несложно доказывается и с помощью рассуждений, которые мы приведем далее при доказательстве второго утверждения. Второе неравенство из (17) следует из оценки (14). Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы для $u_0 \in C^1(\partial Q)$. Прежде всего отметим, что в силу принципа максимума его достаточно установить в случае, когда $u_0(x) \leq 1$ при $x \in \partial Q$ (в частности, $u_0(x) = 1$ на V). Далее будем рассматривать местную систему координат с началом в точке x^0 : $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, оси $x_1, \dots, x_{n-1}$ лежат в касательной к ∂Q в точке x^0 гиперплоскости, а ось x_n направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$. С помощью отображения

$$y' = x', \quad y_n = x_n - \varphi(x') \quad (19)$$

распрявим кусок границы $\partial Q \cap B_{x^0}(2r_0)$; напомним, что он задается уравнением $x_n = \varphi(x')$ и $|\nabla \varphi(x')| < 1/2$. Образ области $Q_{r_0}^+$ (здесь и далее $Q_\rho^+ = Q \cap B_{x^0}(\rho)$) будем обозначать через $\tilde{Q}_{r_0}^+$, образ V – через $\tilde{V}$, а решение u в новых переменных – через $\tilde{u}$, $\tilde{u}(y) = u(y', y_n + \varphi(y'))$. Функция $\tilde{u}$ является решением в $\tilde{Q}_{2r_0}^+$ эллиптического уравнения вида (3) с некоторыми коэффициентами $\tilde{a}_{ij}$, а постоянная эллиптичности этого уравнения оценивается сверху и снизу с абсолютными множителями постоянной γ [6].

Решение $\tilde{u}(y) - 1$ (с граничным значением $u_0(y', \varphi(y')) - 1 = 0$ на $\tilde{V}$) продолжим нечетно через гиперплоскость $\{y: y_n = 0\}$ на область $Q_{r_0}^- = \{y = (y', y_n): (y', -y_n) \in \tilde{Q}_{r_0}^+\}$. Нетрудно проверить, что продолженная таким образом функция $\tilde{u}(y) - 1$, а следовательно, и функция $\tilde{u}(y)$ (мы сохранили за продолженными функциями те же обозначения) являются решениями эллиптического уравнения в области, являющейся объединением областей $Q_{r_0}^+$, $Q_{r_0}^-$ и куска $\tilde{V}$ общей части их границ. Коэф-

фициенты этого уравнения являются продолжениями коэффициентов $\tilde{a}_{ij}$, описание этого “продолженного” уравнения имеется в работе [33]. Постоянная эллиптичности при этом продолжении не меняется.

Таким образом, мы имеем решение $\tilde{u}(y)$ эллиптического уравнения в области $\tilde{Q}_{r_0}^+ \cup \tilde{Q}_{r_0}^- \cup \tilde{V}$. Оно положительно в этой области (так как $0 < u(x) < 1$ в Q), а значения $\tilde{u}$ на $\tilde{V}$ равны единице. Так как расстояние между образами двух точек при отображении (19) оценивается расстоянием между их прообразами с множителем $\sqrt{2}$, то образ шара $B_{x^0}(r/4)$ лежит в шаре $\{y: |y| < 2r/5\}$. А шар $\{y: |y| < 4r/5\}$ принадлежит области $\tilde{Q}_{r_0}^+ \cup \tilde{Q}_{r_0}^- \cup \tilde{V}$, поскольку $|\nabla\varphi| < 1/2$. Оценка снизу для $\tilde{u}$ в $\{y: |y| < 2r/5\}$, а вместе с ней и доказываемая оценка для u в $B_{x^0}(r/4)$ следуют из неравенства Гарнака (см., например, книгу [30]).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем сначала более простое утверждение о необходимости условия (2) для справедливости оценки (1) при всех u_0 из $L_p(\partial Q)$.

Заметим, что его достаточно установить при малых значениях радиуса r , например для $r < r_0/4$. Действительно, для $r \geq r_0/4$

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq \mu(\bar{Q}) \leq \frac{4^{n-1}}{r_0^{n-1}} \mu(\bar{Q}) r^{n-1};$$

напомним, что $r_0 = r_0(\omega)$ не зависит от точки x_0 .

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \partial Q$ и любое положительное число $r < r_0/4$. Рассмотрим решение u задачи Дирихле (3), (4) с граничным значением u_0 , равным характеристической функции множества $B_{x^0}(4r) \cap \partial Q$, $u_0(x) = 1$ при $x \in B_{x^0}(4r) \cap \partial Q$ и $u_0 = 0$ при $x \in \partial Q \setminus B_{x^0}(4r)$. В соответствии со вторым утверждением леммы 1 $u(x) \geq c(n, \gamma) > 0$ для всех $x \in \bar{Q} \cap B_{x^0}(r)$. Поэтому из оценки (1) для такого решения получаем неравенство

$$\begin{aligned} c(n, \gamma) \mu(B_{x^0}(r)) &\leq \iint_Q |u|^p d\mu \leq C(n, \gamma, Q, \omega, p) \int_{\partial Q} |u_0|^p dS \leq \\ &\leq C(n, \gamma, Q, \omega, p) \text{mes}_{n-1}(B_{x^0}(4r) \cap \partial Q) \leq C(n, \gamma, Q, \omega, p) r^{n-1}, \end{aligned}$$

которое совпадает с доказываемой оценкой (2).

Для доказательства достаточности условия (2) для справедливости оценки (1) при всех u_0 из $L_p(\partial Q)$ нам потребуется следующая теорема, дающая оценку некасательной максимальной функции.

Возьмем произвольное положительное число a и любую точку $x^0 \in \partial Q$. Обозначим через $\Gamma(x^0) = \Gamma_a(x^0)$ лежащий в области Q открытый усеченный конус с вершиной в x^0 раствора a и фиксированной высоты h_0 , ось которого направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$; в местной системе координат этот конус описывается неравенствами $0 < x_n < h_0$, $|x'| < ax_n$. Высоту $h_0 = h_0(a, Q)$ (она одинакова для всех $x^0 \in \partial Q$) выберем такой, чтобы границы конуса и области пересекались только по вершине x^0 . Пусть $M(x^0) = \sup\{|u(x)|: x \in \Gamma(x^0)\}$ – некасательная (нетангенциальная) максимальная функция решения u .

ТЕОРЕМА 3 [34]. Для любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ решение u задачи Дирихле (3), (4) удовлетворяет оценке

$$\int_{\partial Q} M^p(x) dS \leq \text{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \quad (20)$$

постоянная в которой зависит от размерности пространства n , постоянной γ из (3), области Q , функции ω из (4), (5), показателя суммирования p и раствора конуса α .

Перейдем к доказательству достаточности условия (2) для справедливости оценки (1). Прежде всего заметим, что достаточно доказать справедливость этой оценки для мер Карлесона с носителями в некоторой окрестности границы рассматриваемой области. Для меры с лежащим внутри области Q носителем эта оценка немедленно следует из неравенства (15) свойства 3; мера замыкания области Q , очевидно, оценивается нормой меры, умноженной на радиус содержащего Q шара с лежащим на ∂Q центром в степени $n - 1$.

Возьмем покрытие конечной кратности $k = k(n)$ границы ∂Q шарами $B_{x(m)}(\rho_0)$, $m = 1, \dots, s$; можно считать, что шары радиуса $\rho_0/2$ не пересекаются. Радиус $\rho_0 < r_0/(2\sqrt{n})$ мы выберем позже. С помощью соответствующего разбиения единицы представим меру в виде суммы мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$, носители которых лежат в соответствующих элементах покрытия: $\text{supp } \mu_m \subset B_{x(m)}(\rho_0)$. Если мы установим оценку (1) для каждой из таких мер, то, суммируя эти оценки, получим доказываемое неравенство. Кроме того, приближая произвольную граничную функцию гладкими, сведем (аналогично тому, как это делалось выше) доказательство к случаю непрерывно дифференцируемой функции u_0 .

Итак, нам нужно доказать утверждение о достаточности теоремы 1 в случае, когда носитель меры лежит в шаре $B(\rho_0)$ радиуса ρ_0 с лежащим на границе центром; граничную функцию можно считать гладкой. Далее будем рассматривать местную систему координат с началом координат в центре этого шара. С помощью отображения (19) распрямим поверхность $\partial Q \cap B(2r_0)$. Выберем такое достаточно большое число $a = a(r_0, \omega) > 1$ и такое достаточно малое положительное число $h_1 = h_1(a, h_0) < h_0$, что для всех $x = (x', \varphi(x')) \in B(r_0) \cap \partial Q$ образ конуса $\Gamma_a(x)$ при отображении (13) содержит в себе конус $\Gamma_1(y') = \{z: 0 < z_n < h_1, |z' - y'| < z_n\}$; здесь $y' = (y_1, \dots, y_n)$ — точка $\mathbb{R}_{n-1}$ такая, что $(y', 0)$ является образом точки $x = (x', \varphi(x'))$ при рассматриваемом отображении. Выберем теперь $\rho_0 = \rho_0(h_1)$ так, чтобы образ Ω области $B(\rho_0) \cap Q$ лежал в объединении конусов $\Gamma_1(y')$ по всем y' из $(n-1)$ -мерного шара $B'(\rho_0) = \{y': |y'| < \rho_0\}$.

Легко видеть, что мера в пространстве образов, порожденная рассматриваемой мерой, также будет мерой Карлесона; сохраним за ней то же обозначение. При этом норма порожденной меры не больше, чем норма исходной меры, умноженная на абсолютную постоянную. Для доказательства оценки (1) нам достаточно установить справедливость неравенства

$$\iint_{\Omega} |\tilde{u}(y)|^p d\mu(y) \leq \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS. \quad (21)$$

Отметим, что из теоремы 3 следует неравенство

$$\int_{B'(r_0)} M_1^p(y') dy' \leq \text{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \quad (22)$$

где $M_1(y') = \max\{|u(z)|, z \in \Gamma_1(y')\}$, а $B'(r_0) = \{y': |y'| < r_0\}$.

Возьмем замкнутый куб с центром в начале координат, содержащий область Ω ; обозначим его через K_0 , $K_0 = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n): |y_i| \leq l_0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $\rho_0 \leq l_0 \leq 2\rho_0$. Разобьем этот куб на 2^n равных замкнутых кубов, разделив каждое ребро пополам. Будем рассматривать только те из них, которые лежат в полупространстве $\{y: y_n \geq 0\}$; обозначим их через $K_{1,j}$, $j = 1, \dots, 2^{n-1}$. Каждый из этих кубов снова разобьем на равные кубы, разделив каждое ребро пополам. Выбросим из полученных кубов те, которые не примыкают к гиперплоскости $\{y: y_n = 0\}$. Остальные (они лежат в полосе $\{y: 0 \leq y_n \leq l_0/2\}$) пронумеруем следующим образом: $K_{2,j}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{2(n-1)}$. Снова делим ребра отобранных кубов пополам и отбираем из полученных те, которые примыкают к координатной гиперплоскости $\{y: y_n = 0\}$, и т. д. На m -м шаге получаем кубы $K_{m,j}$, $1 \leq j \leq 2^{m(n-1)}$, с длиной ребра $l_m = l_0 2^{1-m}$. Отметим, что в силу условия (2) мера каждого из этих кубов удовлетворяет неравенству

$$\mu(K_{m,j}) \leq C(n) \|\mu\| l_m^{n-1}. \quad (23)$$

Возьмем произвольное число $\lambda \geq 0$ и рассмотрим множество $\mathcal{E}(\lambda) = \{y \in \Omega: |u(y)| > \lambda\}$. Для каждой точки y из $\mathcal{E}(\lambda)$ возьмем наименьший куб (из построенного набора), содержащий эту точку; если таких кубов несколько, то выбираем один из них произвольно; обозначим выбранный куб через $K_{mj}(y)$. Из построенного покрытия $\{K_{mj}(y), y \in \mathcal{E}(\lambda)\}$ множества Ω удалим те кубы, которые принадлежат некоторому большему кубу из этого же покрытия (перебираем кубы в порядке убывания длины ребра и отбрасываем те, которые лежат в уже отобранных кубах). Таким образом мы получили счетное или конечное подпокрытие покрытия $\{K_{mj}(y), y \in \mathcal{E}(\lambda)\}$ множества $\mathcal{E}(\lambda)$ кубами, которые могут пересекаться только по границам. Обозначим это подпокрытие буквой $\mathcal{K}$, а его элементы – через K_{mj} ; здесь m – номер шага, на котором получился этот куб при делении максимального куба K_0 . Кратность такого покрытия не больше, чем 2^{n-1} .

Возьмем произвольный куб K_{mj} из выбранного покрытия $\mathcal{K}$ и обозначим через K'_{mj} его проекцию на гиперплоскость $\{y: y_n = 0\}$. Отметим, что объединение проекций всех кубов из покрытия $\mathcal{K}$ содержится в проекции K'_0 на ту же гиперплоскость куба K_0 , а в силу выбора l_0 K'_0 лежит в $B'(r_0)$.

В кубе K_{mj} существует такая точка $y = (y', y_n) \in \mathcal{E}(\lambda)$, n -я координата которой больше, чем $l_m/2 = l_0 2^{-m}$ (если бы такой точки не существовало, то этот куб не был бы кубом $K_{mj}(z)$ ни с какой $z \in \mathcal{E}(\lambda)$ и не попал бы в покрытие $\mathcal{K}$). Но тогда

$$\text{mes}_{n-1}(\{z' \in K'_{mj}: M(z') > \lambda\}) \geq c(n) l_m^{n-1}, \quad (24)$$

поскольку из принадлежности точки $y = (y', y_n)$ множеству $\mathcal{E}(\lambda)$ следует, что для всех z' из $(n-1)$ -мерного шара с центром в y' радиуса y_n справедливо неравенство $M(z') > \lambda$ (для таких точек z' конус $\Gamma_1(z')$ содержит точку y). Из оценок (23), (24) получаем, что для каждого из кубов K_{mj} выбранного покрытия $\mathcal{K}$ справедливо неравенство

$$\mu(K_{mj}) \leq C(n) \|\mu\| \text{mes}_{n-1}(\{z' \in K'_{mj}: M(z') > \lambda\}),$$

откуда

$$\mu(\mathcal{E}(\lambda)) \leq \sum_{m,j: K_{mj} \in \mathcal{K}} \mu(K_{mj}) \leq C(n) \|\mu\| \operatorname{mes}_{n-1}(\{z' \in B'(r_0): M_1(z') > \lambda\}).$$

Отсюда и из неравенства (22) следует оценка

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |\tilde{u}(y)|^p d\mu(y) &= \int_0^{+\infty} \lambda^p d\mu(\mathcal{E}(\lambda)) = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mu(\mathcal{E}(\lambda)) d\lambda \leq \\ &\leq C(n) \|\mu\| p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \operatorname{mes}_{n-1}(\{z' \in B'(r_0): M_1(z') > \lambda\}) d\lambda \leq \\ &\leq C(n) \int_{B'(r_0)} M_1^p(y') dy' \leq \operatorname{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS. \end{aligned}$$

Она совпадает с неравенством (21), из которого, как отмечалось выше, следует доказываемая оценка (1).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178_а), а также Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1).

Список литературы

- [1] L. Carleson, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 921–930.
- [2] L. Carleson, *Ann. Math.*, **76** (1962), 547–559.
- [3] L. Hörmander, *Math. Scand.*, **20** (1967), 65–78.
- [4] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.
- [5] Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [6] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **137(179):1(9)** (1988), 19–64.
- [7] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
- [8] В. П. Михайлов, *Дифференц. уравнения*, **12:10** (1976), 1877–1891, 1919.
- [9] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гущин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, *Теоретическая и математическая физика*, Сборник обзорных статей 3. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **175**, 1986, 63–102.
- [10] И. М. Петрушко, *Матем. сб.*, **120(162):4** (1983), 569–588.
- [11] В. Ж. Думанян, *Матем. сб.*, **202:7** (2011), 75–94.
- [12] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **185:1** (1994), 121–160.
- [13] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **186:2** (1995), 37–58.
- [14] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Докл. РАН*, **351:1** (1996), 7–8.
- [15] А. К. Гущин, *Докл. РАН*, **373:2** (2000), 161–163.
- [16] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **193:5** (2002), 17–36.
- [17] E. De Giorgi, *Met. Accad. Sci. Torino*, **3** (1957), 25–43.
- [18] J. Nash, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931–954.
- [19] J. Moser, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13:3** (1960), 457–468.
- [20] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **189:7** (1998), 53–90.
- [21] А. К. Гущин, *Сиб. матем. журн.*, **46:5** (2005), 1036–1052.
- [22] А. К. Гущин, *ТМФ*, **157:3** (2008), 345–363.
- [23] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, **8:1(67)** (2008), 76–94.

- [24] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **108(150)**:1 (1979), 3–21.
- [25] Ю. А. Михайлов, *Дифференц. уравнения*, **19**:2 (1983), 318–337, 367.
- [26] А. К. Гущин, *Матем. сб.*, **203**:1 (2012), 3–30.
- [27] Ю. А. Алхутов, В. А. Кондратьев, *Дифференц. уравнения*, **28**:5 (1992), 806–817.
- [28] Ю. А. Алхутов, *Матем. сб.*, **189**:1 (1998), 3–20.
- [29] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [30] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [31] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, *Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”*, Лекционные курсы НОЦ, **7**, МИАН, М., 2007.
- [32] В. А. Кондратьев, И. Копачек, О. А. Олейник, *Матем. сб.*, **131(173)**:1(9) (1986), 113–125.
- [33] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 3, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **32**, ВИНТИ, М., 1988, 99–215.
- [34] А. К. Гущин, *Докл. РАН*, **446**:5 (2012), 667–669.

Поступила в редакцию 10.09.2012