Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, Модели p -адической механики, *ТМФ*,
2013, том 174, номер 2, 285–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:46:57

© 2013 г.

Е. И. Зеленов*

МОДЕЛИ p -АДИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В рамках стандартных моделей классической и квантовой механики выделяется подкласс ультраметрических (p -адических) систем. Показано, что ультраметрические модели описываются на языке стандартных моделей, но при этом обладают рядом отличительных свойств. В частности, показано, что для классических ультраметрических динамических систем справедлива усиленная теорема Пуанкаре о числе возвращений. В качестве примера квантовой p -адической системы рассматривается алгебра коммутационных соотношений одномерной квантовой механики. Показано, что, как и в вещественном случае, эта алгебра изоморфна алгебре компактных операторов.

Ключевые слова: ультраметрика, p -адическая классическая механика, p -адическая квантовая механика.

DOI: 10.4213/tmf8411

1. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

При построении формальной модели классической системы мы следуем подходу Макки [1]. Среди общих классических систем выделен класс ультраметрических классических систем. Для ультраметрических динамических систем доказаны свойство перемешиваемости и усиленный вариант теоремы Пуанкаре о числе возвращений.

1.1. Пространство результатов эксперимента. В качестве отправной точки построения модели классической системы примем понятие множества результатов эксперимента $\mathcal{E}$. Другими словами, это множество показаний регистрирующего прибора. В традиционном подходе в качестве множества $\mathcal{E}$ рассматривается множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ со всеми присущими этому множеству дополнительными структурами (полное нормированное упорядоченное коммутативное поле). Начиная с работы [2] возникла содержательная критика такого подхода. Основным постулатом выступило утверждение, что показание прибора – всегда рациональное число, и пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел до поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ – это вопрос удобства. Более того, это не единственная возможность. В качестве возможной альтернативы было предложено использовать другое пополнение поля $\mathbb{Q}$ – поле

*E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Уместно заметить, что вещественными и p -адическими числами исчерпываются, по существу, все возможности пополнения поля рациональных чисел до полного нормированного поля (теорема Островского). Это привело к развитию целого направления в математической физике – p -адической математической физике. Библиографию по этому вопросу можно найти в книге [3] и в обзоре [4].

Еще один подход к проблеме множества результатов экспериментов рассматривался в работе [5]. Предлагалось использовать в качестве множества $\mathcal{E}$ векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с континуальным базисом Гамеля (такую структуру имеют как поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, так и поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$). Элемент такого пространства – конечный набор рациональных чисел – интерпретировался как результат серии экспериментов.

В контексте настоящей статьи в качестве пространства $\mathcal{E}$ будет выступать измеримое пространство, т. е. множество $\mathcal{E}$ с заданной на нем сигма-алгеброй подмножеств. Заметим, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ и множества p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, снабженные соответствующими сигма-алгебрами борелевских подмножеств, изоморфны как измеримые пространства. Таким образом, если мы будем рассматривать $\mathcal{E}$ только как измеримое пространство, мы можем использовать в качестве модели $\mathcal{E}$ как вещественные, так и p -адические числа равноправным образом.

1.2. Множество параметров и наблюдаемые величины. Базовым постулатом при построении модели классической системы служит представление о том, что классическая физическая система обладает набором предустановленных параметров, и задача эксперимента состоит в определении численных значений этих параметров. Например, классическая частица обладает координатой и импульсом. Эксперимент состоит в определении численных значений координаты и импульса. Множество таких параметров будем обозначать через $\mathcal{P}$.

Наблюдаемая величина, или просто наблюдаемая, – это функция, определенная на множестве параметров $\mathcal{P}$ и принимающая значение в пространстве результатов $\mathcal{E}$. Еще раз отметим, что именно предположение о существовании априори предписанных параметров классической системы позволяет определить наблюдаемую как функцию на множестве параметров. Наличие дополнительной структуры на пространстве $\mathcal{E}$ – структуры измеримого пространства – позволяет для каждой наблюдаемой $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ определить структуру измеримого пространства на множестве $\mathcal{P}$. А именно, соответствующая сигма-алгебра на $\mathcal{P}$ задается как минимальная сигма-алгебра подмножеств множества параметров $\mathcal{P}$, для которой наблюдаемая f является измеримой функцией.

Если имеется семейство $\mathcal{O}$ наблюдаемых, то сигма-алгебру на $\mathcal{P}$ определяем как минимальную сигма-алгебру подмножеств $\mathcal{P}$, относительно которой все наблюдаемые из семейства $\mathcal{O}$ измеримы. К примеру, если мы требуем, чтобы наблюдаемой являлась любая функция, определенная на $\mathcal{P}$, то в качестве соответствующей сигма-алгебры будет выступать алгебра всех подмножеств множества параметров $\mathcal{P}$.

1.3. Состояние системы. Как отмечалось в предыдущем пункте, множество $\mathcal{P}$ параметров классической системы – измеримое пространство. *Состоянием системы* будем называть вероятностную меру на пространстве $\mathcal{P}$. Множество состояний будем обозначать через $\mathcal{S}$.

Пусть $f \in \mathcal{O}$ – наблюдаемая, $E \subset \mathcal{E}$ – подмножество пространства результатов, $\mu \in \mathcal{S}$ – состояние системы. Физический смысл придается величине $\mu(f^{-1}(E))$. Это вероятность того, что значение наблюдаемой f системы в состоянии μ лежит в множестве E .

Мы используем стандартную колмогоровскую вероятность. Подход, связанный с p -адической вероятностью, был предложен и развит в работе [6]. Заметим, что для вероятности, в отличие от наблюдаемых величин, нет веских аргументов в пользу того, что она должна принимать значения в поле рациональных чисел. Вероятность в данном контексте является математическим инструментом обработки статистических данных эксперимента.

1.4. Динамика классической системы. Динамика классической системы задается измеримым эндоморфизмом T пространства параметров $\mathcal{P}$. Множество измеримых эндоморфизмов $End(\mathcal{P})$ пространства параметров образует полугруппу относительно композиции. Обратимые (измеримые) эндоморфизмы образуют группу $Aut(\mathcal{P})$ автоморфизмов пространства параметров. Измеримое пространство $\mathcal{P}$ с заданным на нем измеримым эндоморфизмом T образует динамическую систему.

Пусть теперь заданы полугруппа G и ее представление $g \ni G \rightarrow T^g \in End(\mathcal{P})$ измеримыми эндоморфизмами пространства параметров. Элементы полугруппы G интерпретируем как моменты времени. В частности, если в качестве G выбрать полугруппу $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, то получим обычное понятие времени. В случае, когда G есть полугруппа $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, получим динамическую систему с дискретным временем. Динамические системы с p -адическим временем возникают естественным образом из систем с дискретным временем, если помимо измеримости потребовать непрерывность представления в p -адической топологии на $\mathbb{Z}_+$.

1.5. Логика классической модели. Как отмечалось в п. 1.3, физический смысл придается величине $\mu(f^{-1})$, поэтому можно абстрагироваться от самого пространства $\mathcal{P}$ и рассматривать только сигма-алгебру Σ измеримых подмножеств пространства параметров. Это несколько не огрубляет рассматриваемую картину, поскольку точки $\mathcal{P}$ могут рассматриваться как одноэлементные подмножества $\mathcal{P}$. Кроме того, будем считать, что выполнены условия $\emptyset \in \Sigma$, $\mathcal{P} \in \Sigma$.

Ключевым моментом является тот факт, что семейство подмножеств Σ образует дистрибутивную решетку с дополнением. Другими словами, на множестве Σ задано отношение частичного порядка (вложение множеств) $A \leq B \iff A \subseteq B$, $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$ и две операции: $\wedge$ (пересечение множеств) и $\vee$ (объединение множеств), удовлетворяющие следующим свойствам для всех $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, $C \in \Sigma$:

- $A \vee B = B \vee A$ и $A \wedge B = B \wedge A$ (коммутативность),
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ и $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (ассоциативность),
- $A \vee A = A$ и $A \wedge A = A$ (идемпотентность),
- $A = A \vee (A \wedge B)$ и $A = A \wedge (A \vee B)$ (поглощение),
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (дистрибутивность),
- для любого A найдутся B такие, что $A \wedge B = \emptyset$, $A \vee B = \mathcal{P}$ (дополнительность).

Множество Σ снабжается естественным образом структурой булевой алгебры, если в качестве нулевого элемента выбрать пустое множество, в качестве единичного элемента – все пространство параметров $\mathcal{P}$, а в качестве операции отрицания – операцию дополнения $\neg A = \mathcal{P} \setminus A$. Ключевым свойством, определяющим систему как классическую, является свойство дистрибутивности.

1.6. p -Адические классические системы. Для определения класса ультраметрических классических систем ограничим исходное определение классической системы. Далее будем считать, что пространство параметров $\mathcal{P}$ снабжено метрикой d и является полным сепарабельным метрическим пространством. Алгебру

измеримых подмножеств образуют борелевские подмножества относительно топологии на $\mathcal{P}$, порожденной метрикой d .

Под ультраметрической классической моделью будем понимать описанную выше модель при условии, что метрика d является ультраметрикой.

Отметим, что полные сепарабельные метрические пространства борелевски изоморфны. Тем не менее наличие ультраметрики приводит к особым свойствам модели. В качестве примера приведем ряд утверждений. Сначала докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{P}$ – пространство состояний ультраметрической классической системы с ультраметрикой d , μ – состояние системы (вероятностная мера на $\mathcal{P}$), T – преобразование пространства $\mathcal{P}$, сохраняющее метрику d . Тогда T не является перемешивающим преобразованием.

Действительно, по определению перемешивающего преобразования для любых измеримых множеств A и B должно выполняться равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Выберем в качестве множества A произвольный шар в $\mathcal{P}$, $0 < \mu(A) < 1$, множество B выберем совпадающим с A . Поскольку преобразование T сохраняет метрику, $T^n A$ – шар в $\mathcal{P}$, причем его радиус совпадает с радиусом шара A . В силу ультраметричности метрики d шары A и $T^n A$ либо не пересекаются, либо совпадают. Следовательно, если предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A \cap A)$$

существует, то он равен либо нулю, либо $\mu(A)$, что противоречит определению перемешиваемости.

На самом деле приведенного выше предела не существует, однако для эргодических преобразований он существует в смысле Чезаро.

Приведем еще одно утверждение про ультраметрические динамические системы – усиленную теорему Пуанкаре о числе возвращений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{P}$, μ и T те же, что в лемме 1, и мы потребуем дополнительно эргодичность преобразования T и инвариантность меры μ относительно преобразования T . Через $N_A^a(n)$ обозначим количество возвращений из точки $a \in A$ в шар A за время n . Тогда $N_A^a(n)$ не зависит от a , существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} N_A(n)/n$ и этот предел равен $\mu(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на ультраметричность метрики d и эргодическую теорему фон Неймана. Докажем сначала независимость функции $N_A^a(n)$ от a . Будем следить не за траекторией точки a под действием преобразований T^n , а за траекторией всего шара A . Поскольку преобразование T изометрично, $T^n A$ – шар такого же радиуса, что и шар A , следовательно, $T^n A$ и A либо не пересекаются, либо совпадают. Если $T^n a \in A$, то $T^n A = A$, откуда и следует независимость $N_A^a(n)$ от a .

Рассмотрим унитарный оператор U на пространстве $L^2(\mathcal{P}, \mu)$ следующего вида: $(Uf)(x) = f(Tx)$, $f \in L^2(\mathcal{P}, \mu)$. В соответствии с эргодической теоремой фон Неймана справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f = (f, 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k A \cap A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U^{-k} h_A, h_A) = (h_A, 1)(h_A, 1) = \mu^2(A),$$

где h_A – характеристическая функция шара A . С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k A \cap A) = N_A(n) \mu(A),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 вытекает важное следствие, характеризующее изометрические ультраметрические динамические системы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (P, d, μ, T) – изометрическая ультраметрическая динамическая система. Тогда существует такое натуральное число N , что динамическая система (P, d, μ, T^N) не является эргодической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если исходное преобразование T не является эргодическим, то утверждение очевидно верно при $N = 1$. Пусть T является эргодическим преобразованием. Выберем произвольный шар $A \subset P$ и $a \in A$. Согласно теореме 1 число возвращений $N_A^a(n) = N_A(n)$ из точки a в шар A за время n не равно нулю для некоторого n . Обозначим через N время первого возвращения, т. е. $N_A(N) = 1$. Тогда $T^N A = A$, откуда и следует утверждение.

Другие результаты по p -адическим динамическим системам и обширную библиографию можно найти, например, в книге [7].

1.7. Пространство параметров и алгебра параметров. Как было отмечено выше, логика классической модели определяется некоторой булевой алгеброй, которая первоначально возникла как алгебра подмножеств пространства параметров. Для краткости в дальнейшем будем эту алгебру называть алгеброй параметров.

В некотором смысле подход, в котором отправной точкой является пространство параметров, эквивалентен подходу, в котором отправной точкой является булева алгебра параметров. Эквивалентность подходов показывает теорема Стоуна.

Топологическое пространство называется пространством Стоуна, если оно компактно, хаусдорфово и вполне несвязно (т. е. имеет базу открыто-замкнутых множеств). В соответствии с теоремой Стоуна всякой булевой алгебре однозначно (с точностью до гомеоморфизма) можно сопоставить пространство Стоуна. При этом исходная булева алгебра будет изоморфна алгебре открыто-замкнутых подмножеств этого пространства.

Если булева алгебра параметров счетна, то ее пространство Стоуна (пространство параметров) метризуемо. В каком случае соответствующая метрика будет ультраметрикой?

Пусть Σ – булева алгебра параметров. Элемент $a \in \Sigma$ называется атомом, если из неравенства $b \leq a$, $b \in \Sigma$, следует $b = \emptyset$ или $b = a$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Σ – счетная булева алгебра, которая не содержит атомов. Тогда ее пространство Стоуна метризуемо и соответствующая метрика является ультраметрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из того факта, что пространство Стоуна безатомной счетной булевой алгебры есть канторово множество [8].

Таким образом, ультраметрические классические системы задаются свободными булевыми алгебрами.

1.8. Классические системы и C^* -алгебры. По булевой алгебре параметров однозначно строится C^* -алгебра наблюдаемых. Действительно, пусть задана булева алгебра Σ . Ей однозначно, с точностью до гомеоморфизма, соответствует топологическое пространство Стоуна $S(\Sigma)$. Топологическому пространству $S(\Sigma)$ однозначным образом, с точностью до изоморфизма, ставится в соответствие унитарная коммутативная C^* -алгебра $C(\Sigma)$ непрерывных комплекснозначных функций на $S(\Sigma)$ (теорема Гельфанда).

При этом существует взаимно однозначное соответствие между элементами булевой алгебры Σ и проекторами в C^* -алгебре $C(\Sigma)$.

2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Пусть H – комплексное гильбертово пространство. На множестве замкнутых подпространств H определим бинарные операции $\vee$ и $\wedge$ естественным образом: $\vee$ – линейная оболочка объединения подпространств, $\wedge$ – пересечение подпространств. Поскольку существует взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подпространствами и проекторами, операции $\vee$ и $\wedge$ естественным образом определяются на множестве проекторов в H . Легко показать, что множество проекторов с определенными выше операциями является решеткой с дополнением. Эта решетка не является дистрибутивной, в отличие от классической модели.

В качестве отправной точки построения квантовой системы, как и в классическом случае, примем понятие множества результатов эксперимента $\mathcal{E}$. Как и ранее, $\mathcal{E}$ – измеримое пространство. Наблюдаемой величиной в квантовой модели является мера на множестве $\mathcal{E}$ со значениями в множестве проекторов $\mathcal{L}$ гильбертова пространства H (проекторнозначная мера). В конкретных задачах часто в качестве наблюдаемых рассматриваются операторы, однако подход, основанный на проекторнозначных мерах, является более общим. Состояние системы определяется как вероятностная мера на $\mathcal{L}$. В соответствии с результатом Глисона [9] каждая такая мера однозначно определяется оператором плотности.

Пусть P – наблюдаемая, $E \subset \mathcal{E}$ – подмножество пространства результатов, μ – состояние системы. Физический смысл придается величине $\mu(P(E))$. Это вероятность того, что значение наблюдаемой P системы в состоянии μ лежит в множестве E .

2.1. p -Адические модели квантовой механики. Класс p -адических квантовых моделей является частным случаем вышеизложенной схемы. А именно, в p -адических моделях в качестве пространства результатов $\mathcal{E}$ рассматривается поле p -адических чисел. Несмотря на то что вещественные и p -адические числа изоморфны как борелевские пространства, p -адические модели обладают рядом специфических свойств. К примеру, “типичные” операторы в p -адических квантовых моделях имеют в качестве своих спектров канторовы множества (см. [10]).

Для примера рассмотрим простейшую квантовую модель – алгебру коммутационных соотношений в одномерном случае.

Через $\mathbb{Q}_\infty$ всюду далее будем обозначать поле вещественных чисел. Рассмотрим простейший случай классической системы – свободную одномерную частицу. Фазовым пространством F_p этой системы является двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$ с заданной невырожденной симплектической формой B_p . В качестве квантового объекта будем рассматривать представление коммутационных соотношений в форме Вейля.

Пусть H_p – комплексное гильбертово пространство, W_p – отображение фазового пространства F_p в семейство унитарных операторов на H_p , удовлетворяющее соотношению

$$W_p(z)W_p(z') = \chi_p(B_p(z, z'))W_p(z')W_p(z),$$

где $\chi_\infty(x) = e^{-2\pi i x}$, $\chi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$, $\{x\}_p$ – p -адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$.

Алгебру наблюдаемых $\mathcal{A}_p$ нашей модели построим следующим явным образом. Пусть (H_p, W_p) – непрерывное в сильной топологии представление коммутационных соотношений. Через $\mathcal{A}_p$ обозначим C^* -алгебру, порожденную операторами вида

$$\int_{\mathbb{Q}_p^2} \rho_p(z) W_p(z) dz,$$

где $\rho_p \in S(\mathbb{Q}_p^2)$, S – пространство Шварца в случае $p = \infty$ и пространство локально постоянных функций с компактным носителем в случае $p < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебры $\mathcal{A}_p$ изоморфны для всех p и изоморфны алгебре $\mathcal{K}(H_p)$ компактных операторов на пространстве H_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы, по существу, заключается в построении нетривиальных конечномерных проекторов в алгебре $\mathcal{A}_p$ (см. работы [11] для вещественного случая и [12] для p -адического).

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему учителю – академику В. С. Владимирову – за постоянное внимание к работам и всестороннюю поддержку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00828_а, 11-01-12114-офи_м-2011), а также Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1).

Список литературы

- [1] Дж. Макки, *Лекции по математическим основам квантовой механики*, Мир, М., 1965.
- [2] I. V. Volovich, *Number Theory as the Ultimate Physical Theory*, Preprint TH 4781/87, CERN, Geneva, 1987.
- [3] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Scientific, Singapore, 1994.
- [4] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
- [5] Е. И. Зеленов, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, **8**:1(67) (2008), 108–113.
- [6] А. Ю. Хренников, *ТМФ*, **97**:3 (1993), 348–363.
- [7] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, *p-Adic Deterministic and Random Dynamical Systems*, Mathematics and its Applications, **574**, Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 2004.
- [8] Р. Сикорский, *Булевы алгебры*, Мир, М., 1969.
- [9] A. M. Gleason, *J. Math. Mech.*, **6** (1957), 885–893.
- [10] Е. И. Зеленов, *ТМФ*, **164**:3 (2010), 426–434.
- [11] M. Rieffel, *Duke Math. J.*, **39**:4 (1972), 745–752.
- [12] Е. И. Зеленов, *ТМФ*, **86**:2 (1991), 210–220.

Поступила в редакцию 10.09.2012