Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Функциональное преобразование Фурье и преобразование ренормализационной группы в бозонных моделях теории поля, *ТМФ*, 2013, том 174, номер 2, 303–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:21:05

© 2013 г.

М. Д. Миссаров*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В БОЗОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Введено понятие функционального преобразования Фурье в бозонных p -адических и евклидовых моделях статистической физики. Доказано коммутационное соотношение между преобразованием Фурье и преобразованием ренормализационной группы Вильсона. Обсуждается сходство формализмов ренормализационной группы в p -адических и евклидовых моделях.

Ключевые слова: бозонные модели, ренормализационная группа, преобразование Фурье, иерархическая решетка, p -адические и евклидовы модели.

DOI: 10.4213/tmf8415

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучалось коммутационное соотношение между функциональным преобразованием Фурье и преобразованием ренормализационной группы (РГ) в фермионной иерархической модели, а также была выдвинута гипотеза, что такое же коммутационное соотношение справедливо для бозонных иерархических и евклидовых моделей. В фермионной иерархической модели оба этих преобразования вычисляются явно, и коммутационное соотношение устанавливается прямой проверкой. Модели на иерархической решетке были введены в статистическую физику Дайсоном. Иерархические модели Дайсона изучались в работах Блехера и Синая [2], [3] и многих других авторов. Позже было установлено [4], [5], что при определенном количестве точек в элементарной ячейке иерархическая решетка может быть реализована как решетка в p -адическом пространстве, а p -адические модели являются непрерывными версиями иерархических моделей. Предложение изучать модели математической физики над полем p -адических чисел впервые появилось в работе Владимирова и Воловича [6]. Позже в работе [7] был предложен p -адический аналог струнной амплитуды. Результаты первых исследований в различных областях p -адической математической физики изложены в монографии [8]. Более поздние результаты обсуждаются в обзоре [9].

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия.
E-mail: Moukadas.Missarov@ksu.ru

Сочетание принципа Паули и свойства ультраметричности p -адического расстояния позволило дать точное описание потока РГ в фермионной иерархической модели. Это точное решение выявило разнообразные динамические свойства и симметрии [5], [10]–[14]. Возможно, что некоторые из этих свойств сохраняются и в случае бозонных p -адических и евклидовых моделей.

Чтобы подчеркнуть сходство p -адической и евклидовой моделей, мы используем формализм РГ Вильсона. Это означает, в частности, что мы будем рассматривать поля в импульсном представлении. Пусть Ω – шар единичного радиуса с центром в нуле в d -мерном p -адическом пространстве Q_p^d или d -мерном евклидовом пространстве. Мы используем одинаковые обозначения как для p -адического, так и для евклидова пространства, поскольку до определенного момента многие утверждения могут быть сформулированы единообразно.

Пусть $\sigma(k)$ – бозонное (комплекснозначное) поле, определенное на шаре Ω . Преобразование РГ Вильсона в пространстве реализаций поля $\sigma(k)$ задается соотношением

$$r_\lambda(\alpha)\sigma(k) = |\lambda|^{-\alpha/2}\sigma\left(\frac{k}{\lambda}\right)\chi(k),$$

где λ – p -адическое число в p -адическом случае и вещественное число в евклидовом случае, по норме большее 1, α – вещественное число (параметр РГ), $\chi(k)$ – индикатор шара Ω . Тогда гауссовские поля с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\langle \sigma(k_1)\sigma(k_2) \rangle = \delta(k_1 + k_2)|k_1|^{d-\alpha}\chi(k_1)$$

инвариантны относительно преобразования $r_\lambda(\alpha)$, а также инвариантны относительно преобразования Фурье оператора трансляции t_a : $\sigma(k) \rightarrow e^{(a,k)}\sigma(k)$, где $a = (a_1, \dots, a_d)$ и $(a, k) = a_1k_1 + \dots + a_dk_d$. В форме Гиббса эти гауссовские поля описываются гамильтонианами

$$H_0(\sigma; \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \delta(k_1 + k_2) |k_1|^{\alpha-d} \sigma(k_1) \sigma(k_2) dk_1 dk_2.$$

Рассмотрим негауссовские гамильтонианы вида

$$H_0(\sigma; \alpha) + H(\sigma), \quad (1)$$

где

$$H(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega^m} h_m(k_1, \dots, k_m) \delta(k_1 + \dots + k_m) \sigma(k_1) \dots \sigma(k_m) dk_1 \dots dk_m. \quad (2)$$

Преобразование РГ $r_\lambda(\alpha)$ индуцирует преобразование РГ в пространстве гамильтонианов вида (1), которое переводит гамильтониан (1) в гамильтониан вида $H_0(\sigma; \alpha) + R_\lambda(\alpha)H$, где

$$R_\lambda(\alpha)H = P_\lambda(\alpha)S_\lambda(\alpha)H.$$

Здесь оператор скейлинга $S_\lambda(\alpha)$ индуцирован операцией скейлинга в пространстве реализаций $s_\lambda(\alpha)\sigma(k) = |\lambda|^{-\alpha/2}\sigma(k/\lambda)$ и фактически сводится к преобразованию коэффициентных функций гамильтониана H :

$$h_m(k_1, \dots, k_m) \rightarrow |\lambda|^{m\alpha/2 - md + d} h_m\left(\frac{k_1}{\lambda}, \dots, \frac{k_m}{\lambda}\right).$$

Операция $P_\lambda(\alpha)$ индуцирована операцией ограничения поля $\sigma(k)$ в шаре $\lambda\Omega$ на поле в шаре Ω (обозначаемое как $\sigma_0(k)$):

$$(P_\lambda(\alpha)H)(\sigma_0) = -\ln \langle e^{-H(\sigma_0 + \sigma_1)} \rangle_{\mu(d\sigma_1)}.$$

Здесь среднее берется по гауссовскому полю с носителем в кольце $\lambda\Omega \setminus \Omega$ с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\langle \sigma_1(k_1)\sigma_1(k_2) \rangle = \delta(k_1 + k_2)|k_1|^{d-\alpha} \left(\chi\left(\frac{k_1}{\lambda}\right) - \chi(k_1) \right).$$

В общем случае операция ограничения может вычисляться только в рамках теории возмущений с помощью разложения по фейнмановским диаграммам. Определим преобразование в пространстве гамильтонианов, которое естественно назвать функциональным преобразованием Фурье:

$$(FH)(\theta) = -\ln \frac{\int e^{(\theta, \sigma) - H(\sigma)} D\sigma}{\int e^{-H(\sigma)} D\sigma}. \quad (3)$$

Здесь $\theta(k)$ – поле в шаре Ω , интеграл понимается как формальный функциональный интеграл по полю σ , форма (θ, σ) в бозонном случае есть

$$(\theta, \sigma) = i \int \theta(k)\sigma(-k) dk.$$

Поскольку гамильтониан определен с точностью до аддитивной константы, нормирующий множитель в формуле (3) может быть опущен. Заметим, что, в отличие от обычного определения производящего функционала, гауссовская часть $H_0(\sigma; \alpha)$ не включена в правую часть равенства (3), поэтому, если мы хотим вычислить этот интеграл хотя бы в рамках теории возмущений, необходимо выделить из гамильтониана H гауссовскую часть и затем воспользоваться разложением по фейнмановским диаграммам.

ТЕОРЕМА 1. *Существует формальное коммутационное соотношение между преобразованиями $R(\alpha)$ и F :*

$$R(\alpha)F = FR(2d - \alpha). \quad (4)$$

Слово “формальное” означает, что в общем виде это соотношение записывается в терминах формальных функциональных интегралов. В p -адическом случае мы дадим строгую интерпретацию этого соотношения, в евклидовом случае приведем вывод в терминах формальных функциональных интегралов.

Из этого соотношения, в частности, следует, что если гамильтониан H является неподвижной точкой преобразования $R(\alpha)$, то FH – неподвижная точка преобразования $R(2d - \alpha)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОММУТАЦИОННОГО СООТНОШЕНИЯ В p -АДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Дробная часть p -адического числа $a = \sum_{i=-k}^{\infty} c_i p^i$ определяется формулой $\{a\} = \sum_{i=-k}^{-1} c_i p^i$. Для вектора $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q_p^d$ положим

$$|x|_p = \max_i |x_i|_p, \quad \{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_d\}).$$

Далее мы будем опускать индекс p в обозначении нормы p -адического вектора.

Пусть $T_p^d = \{x \in Q_p^d: x = \{x\}\}$ – дискретное множество, состоящее из чисто дробных p -адических векторов. Множество T_p^d может рассматриваться как иерархическая решетка с расстоянием $d(i, j) = |i - j|$, $i, j \in T_p^d$, в которой количество вершин

в элементарной ячейке равно $n = p^d$. Пусть $\sigma(k)$ – поле в шаре $\Omega = \{k: |k| \leq 1\}$. Определим поле $\xi(j)$ на решетке T_p^d соотношением

$$\xi(j) = \int_{\Omega} e^{2\pi i(j,k)} \sigma(k) dk.$$

Обратная связь задается рядом Фурье

$$\sigma(k) = \sum_{j \in T_p^d} e^{-2\pi i(j,k)} \xi(j).$$

Переход к представлению модели в терминах поля $\xi(j)$ называется переходом к координатному представлению модели. Вычислим действие преобразования РГ $r_{\lambda}(\alpha)$ в терминах поля ξ . Без ограничения общности положим $\lambda = p^{-1}$ и в дальнейшем будем опускать символ λ в обозначении преобразования РГ. Пусть ξ и ξ' – преобразования Фурье полей σ и $r(\alpha)\sigma$ соответственно. Тогда

$$\xi'(j) = p^{-\alpha/2} \sum_{\substack{l \in T_p^d, \\ |pl-j| \leq p^m}} \xi(l).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \xi'(j) &= \int_{\Omega} e^{2\pi i(j,k)} p^{-\alpha/2} \sigma(kp) \chi(k) dk = \\ &= \int_{\Omega} e^{2\pi i(j,k)} p^{-\alpha/2} \sum_m e^{-2\pi i(pk,m)} \xi(m) dk = p^{-\alpha/2} \sum_{m \in B(j)} \xi(m), \end{aligned}$$

где $B(j) = \{m \in T_p^d: |pm - j| \leq 1\}$. Отсюда следует, что преобразование РГ Вильсона в координатном представлении сводится к блок-спиновому преобразованию РГ Каданова–Вильсона на иерархической решетке.

Гауссовская часть гамильтониана $H_0(\sigma; \alpha)$ при переходе к координатному представлению принимает вид

$$H_0(\sigma; \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |k|^{\alpha-d} \sigma(k) \sigma(-k) dk = \frac{1}{2} \sum_{l, m \in T_p^d} \xi(l) \xi(m) \int_{\Omega} |k|^{\alpha-d} e^{2\pi i(k, l-m)} dk.$$

Таким образом, гауссовский гамильтониан в координатном представлении записывается как

$$H_0(\xi; \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{l, m \in T_p^d} h(l-m; \alpha) \xi(l) \xi(m),$$

где

$$h(l-m; \alpha) = \int_{\Omega} |k|^{\alpha-d} e^{2\pi i(k, l-m)} dk = \Gamma_p^d(\alpha) |l-m|^{-\alpha} (1 - \delta_{l,m}) + \frac{\psi_p(\alpha)}{\psi_p(d)} \delta_{l,m},$$

$\psi_p(\alpha) = (1-p^{-\alpha})^{-1}$, $\Gamma_p^d(\alpha) = \psi_p(\alpha) \psi_p^{-1}(d-\alpha)$ – p -адическая (d -мерная) гамма-функция, $\delta_{l,m}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим поле ξ на решетке T_p^d с гамильтонианом вида $H_0(\xi; \alpha) + H(\xi)$,

$$H(\xi) = \sum_{j \in T_p^d} L(\xi(j)), \quad L(\xi(j)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^{2k}(j),$$

где $c_1, c_2, \dots$ — вещественные константы. Применим к полю ξ преобразование РГ. Пусть $\xi' = r(\alpha)\xi$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Гамильтониан поля ξ' имеет вид $H_0(\xi'; \alpha) + H'(\xi')$, где

$$H'(\xi') = \sum_{j \in T_p^d} L'(\xi'(j)),$$

$$L'(y) = -\ln \left(\frac{1}{d_1} \int_{\Omega} \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2} + L(p^{\alpha/2-d}y + x_i) \right\} dx_i \right),$$

$$d_1 = \int_{\Omega} \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n \exp^{-x_i^2/2} dx_i = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{1/2}}, \quad n = p^d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вычислить гамильтониан поля ξ' , введем поле $\eta(i)$, $i \in T_p^d$, такое, что

$$\xi(i) = p^{\alpha/2-d}\xi'(pi) + \eta(i).$$

Поле η вырожденно в том смысле, что $\sum_{j \in B(i)} \eta(j) = 0$ для $i \in T_p^d$. Мы можем написать

$$\begin{aligned} H_0(\xi; \alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{i, j \in T_p^d} h(i-j; \alpha) (p^{\alpha/2-d}\xi'(pi) + \eta(i)) (p^{\alpha/2-d}\xi'(pj) + \eta(j)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i, j \in T_p^d} p^{\alpha-2d}\xi'(i)\xi'(j) \sum_{\substack{i' \in B(i), \\ j' \in B(j)}} h(i'-j'; \alpha) + \\ &+ \sum_{i, j \in T_p^d} p^{\alpha/2-d}\xi'(i) \sum_{\substack{i' \in B(i), \\ j' \in B(j)}} h(i'-j'; \alpha) \eta(j') + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in T_p^d} h(i-j; \alpha) \eta(i)\eta(j). \end{aligned}$$

Положим

$$t(i, j; \alpha) = p^{\alpha-2d} \sum_{\substack{i' \in B(i), \\ j' \in B(j)}} h(i'-j'; \alpha) \equiv p^{\alpha-2d} \sum_{\substack{k \in B(0), \\ l \in B(0)}} h(p^{-1}i + k - p^{-1}j - l; \alpha).$$

Нетрудно видеть, что если $i \neq j$, то

$$t(i, j; \alpha) = p^{\alpha-2d}\Gamma_p^d(\alpha)|p^{-1}(i-j)|^{-\alpha}p^{2d} = h(i-j; \alpha).$$

Если $i = j$, то

$$t(i, i; \alpha) = p^{\alpha-2d} \left(\Gamma_p^d(\alpha)(p^{2d} - p^d) + \frac{1-p^{-d}}{1-p^{-\alpha}}p^d \right) = \frac{1-p^{-d}}{1-p^{-\alpha}}.$$

Заметим также, что

$$\sum_{\substack{i' \in B(i), \\ j' \in B(j)}} h(i'-j'; \alpha) \eta(j') = \sum_{j' \in B(j)} \eta(j') \sum_{k \in B(0)} h(p^{-1}(i-j) + k; \alpha) = 0.$$

Наконец, мы можем записать равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i, j \in T_p^d} h(i-j; \alpha) \eta(i)\eta(j) &= \\ &= \sum_{i, j \in T_p^d} \sum_{k, l \in B(0)} h(p^{-1}i + k - p^{-1}j - l; \alpha) \eta(p^{-1}i + k) \eta(p^{-1}j + l). \end{aligned}$$

Если $i \neq j$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k, l \in B(0)} h(p^{-1}i + k - p^{-1}j - l; \alpha) \eta(p^{-1}i + k) \eta(p^{-1}j + l) = \\ = h(p^{-1}(i - j); \alpha) \sum_{k \in B(0)} \eta(p^{-1}i + k) \sum_{l \in B(0)} \eta(p^{-1}j + l) = 0. \end{aligned}$$

Если $i = j$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k, l \in B(0)} h(k - l; \alpha) \eta(p^{-1}i + k) \eta(p^{-1}i + l) = \\ = \sum_{k \in B(0)} \eta(p^{-1}i + k) \left(\frac{1 - p^{-d}}{1 - p^{-\alpha}} \eta(p^{-1}i + k) + \Gamma_p^d(\alpha) p^{-\alpha} \sum_{l \neq k} \eta(p^{-1}i + l) \right) = \\ = \sum_{k \in B(0)} \eta^2(p^{-1}i + k). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$H_0(\xi; \alpha) = H_0(\xi'; \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{j \in T_p^d} \sum_{i \in B(j)} \eta^2(i).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Заметим, что форма

$$(\theta, \sigma) = i \int_{\Omega} \theta(k) \sigma(-k) dk$$

при переходе к координатному представлению записывается в виде

$$(\theta, \sigma) = i \sum_{j \in T_p^d} \zeta(j) \xi(j), \quad \zeta(j) = \int_{\Omega} e^{2\pi i(j, k)} \sigma(k) dk.$$

Для упрощения формул введем “плотность свободной меры” $f(x) = e^{-L(x)}$. Заметим, что в силу условия нормировки распределения Гиббса нам достаточно знать плотность $f(x)$ с точностью до постоянного множителя. Из вышеприведенной леммы следует, что функциональный интеграл, задающий действие преобразования РГ на негауссовскую часть гамильтониана, в координатном представлении факторизуется и сводится к конечномерному интегральному преобразованию плотности свободной меры:

$$(R(\alpha)f)(y) = \int \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2/2} f(p^{\alpha/2-d}y + x_i) dx_i. \quad (5)$$

Функциональный интеграл, задающий функциональное преобразование Фурье, в координатном представлении сводится к обычному преобразованию Фурье плотности свободной меры:

$$(Ff)(y) = \int e^{ixy} f(x) dx. \quad (6)$$

Таким образом, чтобы доказать теорему 1 в p -адическом случае, надо проверить соотношение

$$FR(\alpha)f = R(2d - \alpha)Ff,$$

где операторы $R(\alpha)$ и F задаются формулами (5) и (6). Имеем

$$\begin{aligned}(FR(\alpha)f)(k) &= \int e^{iky} \left\{ \int \delta\left(\sum_{l=1}^n x_l\right) \prod_{l=1}^n e^{-x_l^2/2} f(p^{\alpha/2-d}y + x_l) dx_l \right\} dy = \\ &= \int e^{iky} \left\{ \int \delta\left(\sum_{l=1}^n z_l - p^{\alpha/2}y\right) \prod_{l=1}^n e^{-(z_l - p^{\alpha/2-d}y)^2/2} f(z_l) dz_l \right\} dy = \\ &= p^{-\alpha/2} \int \exp\left\{ ikp^{-\alpha/2} \sum_{l=1}^n z_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n z_l^2 + \frac{p^{-d}}{2} \left(\sum_{l=1}^n z_l\right)^2 \right\} \prod_{l=1}^n f(z_l) dz_l.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали замену переменных $x_l + p^{\alpha/2-d}y = z_l$, $l = 1, \dots, n$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}(R(2d - \alpha)Ff)(k) &= \int \delta\left(\sum_{l=1}^n x_l\right) \prod_{l=1}^n \left(e^{-x_l^2/2} \int e^{i(x_l + p^{-\alpha/2}k)z_l} f(z_l) dz_l \right) \prod_{l=1}^n dx_l = \\ &= \iint \delta\left(\sum_{l=1}^n x_l\right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n x_l^2 + i \sum_{l=1}^n x_l z_l + ip^{-\alpha/2}k \sum_{l=1}^n z_l \right\} \prod_{l=1}^n f(z_l) dz_l dx_l.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\int \delta\left(\sum_{l=1}^n x_l\right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n x_l^2 + \sum_{l=1}^n x_l z_l \right\} \prod_{l=1}^n dx_l = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint \exp\left\{ it \sum_{l=1}^n x_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n x_l^2 + i \sum_{l=1}^n x_l z_l \right\} \prod_{l=1}^n dx_l dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\prod_{l=1}^n \int e^{-x_l^2/2 + ix_l(z_l + t)} dx_l \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (z_l + t)^2 \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n z_l^2 \right\} \int \exp\left\{ -t \sum_{l=1}^n z_l - \frac{nt^2}{2} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n z_l^2 + \frac{1}{2n} \left(\sum_{l=1}^n z_l\right)^2 \right\}.\end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для $FR(\alpha)f$ и $R(2d - \alpha)Ff$, мы видим, что они равны с точностью до не существенного постоянного множителя.

Из точного решения фермионной иерархической модели следует, что существует непрерывная по α негауссовская ветвь неподвижных точек, которая при $\alpha = 3d/2$ проходит через гауссовскую неподвижную точку, а при $\alpha = d/2$ – через бесконечно удаленную неподвижную точку. Гауссовская точка задается плотностью свободной меры, равной 1, а бесконечно удаленная неподвижная точка задается плотностью свободной меры, равной грассмановозначной дельта-функции. Эти плотности являются преобразованиями Фурье друг друга. В работах [2], [3] показано, что в бозонной иерархической модели в окрестности гауссовской неподвижной точки, задаваемой единичной плотностью свободной меры, при $\alpha = 3d/2$ происходит бифуркация негауссовской ветви неподвижных точек. Таким образом, из коммутационного соотношения следует, что преобразование Фурье этой ветви при $\alpha = d/2$ проходит через неподвижную точку, плотность свободной меры которой задается обычной дельта-функцией. Несложно показать, что эта неподвижная точка соответствует постоянному (нулевому) случайному полю.

3. ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД КОММУТАЦИОННОГО СООТНОШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Приведем формальные выкладки в терминах функционального интеграла, доказывающие справедливость коммутационного соотношения в евклидовом случае (а также в p -адическом случае).

Пусть H – общий гамильтониан вида (2). Введем обозначение

$$h'_{\lambda,\alpha}(k_1, \dots, k_m) = |\lambda|^{m\alpha/2 - md + d} h_m\left(\frac{k_1}{\lambda}, \dots, \frac{k_m}{\lambda}\right).$$

Тогда действие оператора РГ $R(\alpha)$ на гамильтониан H мы можем записать формально как функциональный интеграл

$$(R_\lambda(\alpha)H)(\sigma_0) = -\ln \int \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{\alpha-d} |\sigma_1(k)|^2 dk - \sum_m \int_{\Omega^m} h'_{\lambda,\alpha}(k_1, \dots, k_m) \delta(k_1 + \dots + k_m) \prod_{i=1}^m (\sigma_0(k_i) + \sigma_1(k_i)) dk_i\right\} D\sigma_1,$$

где функциональный интеграл берется по полю $\sigma_1(k)$, определенному в области $\lambda\Omega \setminus \Omega$, поле $\sigma_0(k)$ определено в шаре Ω . Тогда с точностью до константы

$$FR(\alpha)H = -\ln \int \exp\left\{i \int \theta(k) \sigma_0(-k) dk - \frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{\alpha-d} |\sigma_1(k)|^2 dk - \sum_m h'_{\lambda,\alpha}(k_1, \dots, k_m) \delta(k_1 + \dots + k_m) \prod_{i=1}^n (\sigma_0(k_i) + \sigma_1(k_i)) dk_i\right\} D\sigma_1 D\sigma_0,$$

где

$$D\sigma_1 = \prod_{k \in \lambda\Omega \setminus \Omega} d\sigma_1(k), \quad D\sigma_0 = \prod_{k \in \Omega} d\sigma_0(k).$$

Изучим теперь композицию преобразований $R(2d - \alpha)F$. Запишем FH как

$$(FH)(\sigma) = -\ln \int \exp\left\{i \int \sigma(k) \zeta(-k) dk - \sum_m \int h_m(k_1, \dots, k_m) \delta(k_1 + \dots + k_m) \prod_{i=1}^m \zeta(k_i) dk_i\right\} D\zeta.$$

Рассмотрим действие оператора РГ $R(2d - \alpha)$ на гамильтониан $(FH)(\sigma)$. Результат действия оператора скейлинга $S_\lambda(2d - \alpha)$ на реализацию поля $\sigma(k)$ определяется как поле $\sigma'(k) = |\lambda|^{-(2d-\alpha)/2} \sigma(k/\lambda)$, поэтому действие этого оператора на гамильтониан состоит в замене $\sigma(k)$ на $|\lambda|^{d-\alpha/2} \sigma'(\lambda k)$.

Введем также поле $\zeta'(k) = \lambda^{-\alpha/2} \zeta(k/\lambda)$. Тогда мы можем написать

$$\int_{\Omega} |\lambda|^{d-\alpha/2} \sigma'(k\lambda) \zeta(-k) dk = \int_{\lambda\Omega} |\lambda|^{d-\alpha/2} \sigma'(k) \zeta\left(-\frac{k}{\lambda}\right) d\frac{k}{\lambda} = \int_{\lambda\Omega} \sigma'(k) \zeta'(-k) dk.$$

Тогда

$$S(2d - \alpha)FH(\sigma') = -\ln \int \exp\left\{i \int_{\lambda\Omega} \sigma'(k) \zeta(-k) dk - \sum_m \int_{\lambda\Omega} h'_{m,\alpha}(k_1, \dots, k_m) \delta(k_1 + \dots + k_m) \prod_{i=1}^m \zeta'(k_i)\right\} D\zeta'.$$

Действие операции ограничения $P_\lambda(2d - \alpha)$ поля $\sigma'(k)$, заданного в шаре $\lambda\Omega$, на шар Ω сводится к представлению поля $\sigma'(k)$ в виде суммы $\sigma'(k) = \sigma_0(k) + \sigma_1(k)$, где $\sigma_0(k) = \sigma'(k)\chi(k)$ и $\sigma_1(k) = \sigma'(k)(\chi(k/\lambda) - \chi(k))$, и интегрированию по гауссовскому полю $\sigma_1(k)$. Заметим, что гамильтониан гауссовского поля $\sigma_1(k)$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{d-\alpha} |\sigma_1(k)|^2 dk.$$

Введем также разложения

$$\zeta'(k) = \zeta_0(k) + \zeta_1(k), \quad \zeta_0(k) = \zeta'(k)\chi(k), \quad \zeta'_1(k) = \zeta'(k) \left(\chi\left(\frac{k}{\lambda}\right) - \chi(k) \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(2d - \alpha)FH(\sigma_0) = & -\ln \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{d-\alpha} |\sigma_1(k)|^2 dk + \right. \\ & + i \int_{\lambda\Omega} (\sigma_0(k) + \sigma_1(k)) (\zeta_0(-k) + \zeta_1(-k)) dk - \\ & \left. - \sum_m \int h'_{\lambda,\alpha}(k_1, \dots, k_m) \prod_{i=1}^m (\zeta_0(k_i) + \zeta_1(k_i)) dk_i \right\} D\zeta_0 D\zeta_1 D\sigma_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{\lambda\Omega} (\sigma_0(k) + \sigma_1(k)) (\zeta_0(-k) + \zeta_1(-k)) dk = \int_{\Omega} \sigma_0(k) \zeta_0(-k) dk + \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} \sigma_1(k) \zeta_1(-k) dk$$

и

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ i \int \sigma_1(k) \zeta_1(-k) dk - \frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{d-\alpha} |\sigma_1(k)|^2 dk \right\} D\sigma_1 = \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{\alpha-d} |\zeta_1(k)|^2 dk \right\}, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} R(2d - \alpha)FH(\sigma_0) = & -\ln \int \exp \left\{ i \int \sigma_0(k) \zeta_0(-k) dk - \frac{1}{2} \int_{\lambda\Omega \setminus \Omega} |k|^{\alpha-d} |\zeta_1(k)|^2 dk - \right. \\ & \left. - \sum_m \int h'_{\lambda,\alpha}(k_1, \dots, k_m) \prod_{i=1}^m (\zeta_0(k_i) + \zeta_1(k_i)) dk_i \right\} D\zeta_0 D\zeta_1 = (FR(\alpha)H)(\sigma_0). \end{aligned}$$

Как и в иерархических моделях, в окрестности гауссовского РГ-инвариантного поля при $\alpha = 3d/2$ происходит бифуркация негауссовской ветви неподвижных точек, гамильтониан которой строится в виде формального разложения по степеням параметра $\varepsilon = \alpha - 3d/2$ [15], [16]. Решение ищется в виде гамильтониана проекции φ^4 -теории поля во всем пространстве на шар, а именно, в виде $-\ln \langle e^{-uH_4(\sigma+\eta)} \rangle_{\mu(d\eta)}$, где усреднение ведется по гауссовскому полю с бинарной корреляционной функцией

$$\langle \eta(k_1)\eta(k_2) \rangle = \delta(k_1 + k_2) |k_1|^{d-\alpha} (1 - \chi(k_1)).$$

Здесь

$$H_4(\sigma) = \int \delta(k_1 + \dots + k_4) \sigma(k_1) \dots \sigma(k_4) dk_1 \dots dk_4.$$

При разложении этого проекционного гамильтониана по фейнмановским диаграммам возникают коэффициентные функции, содержащие полюсы по ε . Для регуляризации гамильтониана используется операция А.Р. аналитической перенормировки. Пусть

$$H(\sigma; u, \varepsilon) = \text{A.R.} \{ -\ln \langle e^{-uH_4(\sigma_0 + \eta)} \rangle_{\mu(d\eta)} \}. \quad (7)$$

Доказано существование формального степенного ряда $u(\varepsilon)$ такого, что формальный гамильтониан (7) во всех членах своего разложения не имеет полюсов по ε в нуле и является РГ-инвариантным. В силу теоремы о коммутации гамильтониан $FH(\sigma; u_0(\varepsilon), \varepsilon)$ должен быть инвариантен относительно преобразования $R(d/2 - \varepsilon)$. Как и в p -адическом случае, значение $\varepsilon = 0$ соответствует нулевому случайному полю.

Список литературы

- [1] М. Д. Миссаров, *Труды МИАН*, **245** (2004), 172–181.
- [2] P. M. Bleher, Ja. G. Sinai, *Commun. Math. Phys.*, **33**:1 (1973), 23–42.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов*, Наука, М., 1980.
- [4] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **78**:2 (1989), 248–257.
- [5] É. Yu. Lerner, M. D. Missarov, *Commun. Math. Phys.*, **121**:1 (1989), 35–48.
- [6] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **59**:1 (1984), 3–27.
- [7] И. В. Волович, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340.
- [8] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Физматлит, М., 1994.
- [9] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
- [10] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 323–336.
- [11] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **117**:3 (1998), 471–488.
- [12] М. Д. Миссаров, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 40–50.
- [13] É. Yu. Lerner, M. D. Missarov, *J. Stat. Phys.*, **76**:3–4 (1994), 805–817.
- [14] M. D. Missarov, “Renormalization group solution of fermionic Dyson model”, *Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (St. Petersburg, Russia, July 9–22, 2001), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, **77**, eds. V. A. Malyshev, A. M. Vershik, Kluwer, Dordrecht, 2002, 151–166.
- [15] P. M. Bleher, M. D. Missarov, *Commun. Math. Phys.*, **74**:3 (1980), 235–254.
- [16] P. M. Bleher, M. D. Missarov, *Commun. Math. Phys.*, **74**:3 (1980), 255–272.

Поступила в редакцию 27.09.2012